УДК 539.384.2 DOI: 10.18698/2308-6033-2019-10-1925

Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть II)

© И.С. Григорьев[1], А.И. Проскуряков[1,2]

[1] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия
[2] Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Баку, Баку, AZ1144, Азербайджан

Рассмотрена идея уменьшения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработавших ступеней в атмосферу Земли. Решена задача оптимизации импульсного перелета между опорной круговой орбитой искусственного спутника Земли и целевой эллиптической орбитой с фазовым ограничением на максимальное удаление космического аппарата от Земли. Производные в условиях трансверсальности принципа Лагранжа в процессе решения вычислены с помощью специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования. В первой части статьи была представлена формализация задачи и приведено описание полученных траекторий. Во второй части статьи исследованы условия оптимальности принципа Лагранжа, проведен их анализ и сравнение полученных следствий с ранее известными результатами.

Ключевые слова: *космический мусор, импульсные перелеты, сброс в атмосферу, оптимизация траектории космического аппарата, фазовое ограничение*

Введение. Импульсная постановка задачи перелета космического аппарата (КА) с опорной орбиты на целевую эллиптическую с фазовым ограничением на максимальное удаление КА от Земли, формализация задачи и общее описание результатов приведены в первой части статьи [1]. Вторая часть статьи посвящена анализу необходимых условий оптимальности принципа Лагранжа и сравнению с уже известными результатами.

Принцип Лагранжа. Введем следующие обозначения:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad \vec{p}_r=\begin{pmatrix} p_x\\ p_y\\ p_z\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix} v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix},\quad \vec{p}_v=\begin{pmatrix} p_{vx}\\ p_{vy}\\ p_{vz}\end{pmatrix}.$$

Применение принципа Лагранжа к решаемой задаче рассмотрим для случая импульса довыведения 1,5 км/с (определяет последовательность моментов $0<\tau_1<t_1<\tau_2<t_2<t_R<T$) [1]:

$$u_1=\Delta v_0,\quad u_2=\Delta v_1,\quad \Delta v_{\text{дов}}=\Delta v_2+\Delta v_R+\Delta v_T.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\Lambda = \int_{0_+}^{\tau_{1-}} L dt + \int_{\tau_{1+}}^{t_{1-}} L dt + \int_{t_{1+}}^{\tau_{2-}} L dt + \int_{\tau_{2+}}^{t_{2-}} L dt + \int_{t_{2+}}^{t_{R-}} L dt + \int_{t_{R+}}^{T_-} L dt + l.$$

Здесь лагранжиан

$$L = p_x(\dot{x} - v_x) + p_y(\dot{y} - v_y) + p_z(\dot{z} - v_z) +$$
$$+ p_{vx}\left(\dot{v}_x + \frac{\mu x}{r^3}\right) + p_{vy}\left(\dot{v}_y + \frac{\mu y}{r^3}\right) + p_{vz}\left(\dot{v}_z + \frac{\mu z}{r^3}\right),$$

терминант

$$l = l_0 + l_{\tau 1} + l_{t1} + l_{\tau 2} + l_{t2} + l_R + l_T + \lambda_{\text{дов}}(\Delta v_{\text{дов}} - \Delta v^*) - \lambda_0 m_{\text{п}}$$

и гамильтониан

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z - \frac{\mu}{r^3}\left(p_{vx} x + p_{vy} y + p_{vz} z\right),$$

где $p_x(\cdot)$, $p_y(\cdot)$, $p_z(\cdot)$, $p_{vx}(\cdot)$, $p_{vy}(\cdot)$, $p_{vz}(\cdot)$ — сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа) на каждом из шести участков [1]; l_0, $l_{\tau 1}$, $l_{\tau 2}$, l_{t1}, l_{t2}, l_R, l_T — части терминанта, соответствующие моментам времени 0, τ_1, τ_2, t_1, t_2, t_R, T из [1]. Величины импульсных воздействий Δv_0, Δv_k, Δv_R, $\Delta v_{\text{сб}i}$, Δv_T из [1] входят в терминант в виде компонент $\Delta v_{\text{дов}}$ и $m_{\text{п}}$:

$$l_0 = \lambda_{R0}\left(x^2(0_+) + y^2(0_+) + z^2(0_+) - R_0^2\right) +$$
$$+ \lambda_{C0}\left(x(0_+)C_{0x} + y(0_+)C_{0y} + z(0_+)C_{0z}\right);$$

$$l_{\tau i} = \lambda_{x\tau i}\left(x(\tau_{i+}) - x(\tau_{i-})\right) + \lambda_{y\tau i}\left(y(\tau_{i+}) - y(\tau_{i-})\right) + \lambda_{z\tau i}\left(z(\tau_{i+}) - z(\tau_{i-})\right) +$$
$$+ \lambda_{vx\tau i}\left(v_x(\tau_{i+}) - v_x(\tau_{i-})\right) + \lambda_{vy\tau i}\left(v_y(\tau_{i+}) - v_y(\tau_{i-})\right) + \lambda_{vz\tau i}\left(v_z(\tau_{i+}) - v_z(\tau_{i-})\right) +$$
$$+ \lambda_{rvi}\left(x(\tau_{i-})v_x(\tau_{i-}) + y(\tau_{i-})v_y(\tau_{i-}) + z(\tau_{i-})v_z(\tau_{i-})\right) + \lambda_{\tau i}\left(\tau_{i+} - \tau_{i-}\right), \quad i = 1, 2;$$

$$l_{tk} = \lambda_{xtk}\left(x(t_{k+}) - x(t_{k-})\right) + \lambda_{ytk}\left(y(t_{k+}) - y(t_{k-})\right) +$$
$$+ \lambda_{ztk}\left(z(t_{k+}) - z(t_{k-})\right) + \lambda_{tk}\left(t_{k+} - t_{k-}\right), \quad k = 1, 2;$$

$$l_R = \lambda_{xR}\left(x(t_{R+}) - x(t_{R-})\right) + \lambda_{yR}\left(y(t_{R+}) - y(t_{R-})\right) + \lambda_{zR}\left(z(t_{R+}) - z(t_{R-})\right) +$$
$$+ \lambda_R\left(t_{R+} - t_{R-}\right) + \lambda_{R1}\left(x^2(t_{R+}) + y^2(t_{R+}) + z^2(t_{R+}) - R^2\right) +$$
$$+ \lambda_{R2}\left(x(t_{R-})v_x(t_{R-}) + y(t_{R-})v_y(t_{R-}) + z(t_{R-})v_z(t_{R-})\right) +$$
$$+ \lambda_{R3}\left(x(t_{R+})v_x(t_{R+}) + y(t_{R+})v_y(t_{R+}) + z(t_{R+})v_z(t_{R+})\right);$$

$$l_T = \lambda_T\left(x^2(T_-)+y^2(T_-)-R_T^2\right)+\lambda_{zT}z(T_-).$$

Здесь λ_0, $\lambda_{\text{дов}}$; λ_{R0}, λ_{C0}; $\lambda_{x\tau i}$, $\lambda_{y\tau i}$, $\lambda_{z\tau i}$, $\lambda_{vx\tau i}$, $\lambda_{vy\tau i}$, $\lambda_{vz\tau i}$, λ_{rvi}, $\lambda_{\tau i}$ $(i=1,2)$; λ_{xtk}, λ_{ytk}, λ_{ztk}, λ_{tk} $(k=1,2)$; λ_{xR}, λ_{yR}, λ_{zR}, λ_R, λ_{R1}, λ_{R2}, λ_{R3}; λ_T, λ_{zT} — числовые множители Лагранжа. (Дополнительная нумерация функций, связанная с номером участка и формально необходимая, согласно теореме [2], в настоящей работе не используется для упрощения системы обозначений).

Согласно принципу Лагранжа, необходимые условия (первого порядка) минимума имеют следующий вид.

1. Условия стационарности по фазовым переменным (уравнения Эйлера — Лагранжа):

$$\dot p_x = \frac{\mu}{r^3}\left[p_{vx}-\frac{3x}{r^2}\left(xp_{vx}+yp_{vy}+zp_{vz}\right)\right],$$

$$\dot p_y = \frac{\mu}{r^3}\left[p_{vy}-\frac{3y}{r^2}\left(xp_{vx}+yp_{vy}+zp_{vz}\right)\right],$$

$$\dot p_z = \frac{\mu}{r^3}\left[p_{vz}-\frac{3z}{r^2}\left(xp_{vx}+yp_{vy}+zp_{vz}\right)\right],$$

$$\dot p_{vx}=-p_x,\quad \dot p_{vy}=-p_y,\quad \dot p_{vz}=-p_z.$$

2. Условия трансверсальности и стационарности

2.1. В начальный момент времени:

$$\begin{gathered}
p_x(0_+) = 2\lambda_{R0}x(0_+)+\lambda_{C0}C_{0x}-\rho_0\frac{v_0}{R_0}\left(\frac{\Delta v_{0y}}{\Delta v_0}\cos i_0+\frac{\Delta v_{0z}}{\Delta v_0}\sin i_0\right),\\
p_y(0_+) = 2\lambda_{R0}y(0_+)+\lambda_{C0}C_{0y}+\rho_0\frac{v_0}{R_0}\left(\frac{\Delta v_{0x}}{\Delta v_0}\cos i_0\right),\\
p_z(0_+) = 2\lambda_{R0}z(0_+)+\lambda_{C0}C_{0z}+\rho_0\frac{v_0}{R_0}\left(\frac{\Delta v_{0x}}{\Delta v_0}\sin i_0\right),\\
p_{vx}(0_+)=-\rho_0\frac{\Delta v_{0x}}{\Delta v_0},\quad p_{vy}(0_+)=-\rho_0\frac{\Delta v_{0y}}{\Delta v_0},\quad p_{vz}(0_+)=-\rho_0\frac{\Delta v_{0z}}{\Delta v_0}.
\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $\rho_0 = m_{\text{п}2}\left(1+\dfrac{\alpha}{(1+\alpha)\exp\left(-\dfrac{\Delta v_{\text{сб}1}}{c}\right)-\alpha}\right)\exp\left(-\dfrac{u_1}{c}\right)\left(-\dfrac{\lambda_0}{c}\right)$ — величина базис-вектора Лоудена в начальный момент времени, $\rho_0=\sqrt{p_{vx}^2(0_+)+p_{vy}^2(0_+)+p_{vz}^2(0_+)}$.

Из (1) можно получить:

$$p_x(0_+) = 2\lambda_{R0}x(0_+) + \lambda_{C0}C_{0x} + \frac{v_0}{R_0}\left(p_{vy}(0_+)\cos i_0 + p_{vz}(0_+)\sin i_0\right),$$

$$p_y(0_+) = 2\lambda_{R0}y(0_+) + \lambda_{C0}C_{0y} - \frac{v_0}{R_0}p_{vy}(0_+)\cos i_0,$$

$$p_z(0_+) = 2\lambda_{R0}z(0_+) + \lambda_{C0}C_{0z} - \frac{v_0}{R_0}p_{vz}(0_+)\sin i_0.$$

Условие стационарности в начальный момент времени отсутствует.

Интеграл Белецкого — Егорова — Пайнса в центральном ньютоновском гравитационном поле задается формулой

$$\vec{K} = [\vec{r}, \vec{p}_r] + [\vec{v}, \vec{p}_v].$$

Пусть $\vec{e}_r$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_c$ — три ортонормированных вектора, $\vec{C} = R_0 v_0 \vec{e}_c$ — вектор кинетического момента — постоянная задачи; $\vec{r}(0_+) = R_0\vec{e}_r$ — радиус-вектор; $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_v$ — вектор скорости на круговой орбите до приложения импульса. Согласно свойству векторного произведения,

$$[\vec{e}_r, \vec{e}_v] = \vec{e}_c, \quad [\vec{e}_v, \vec{e}_c] = \vec{e}_r, \quad [\vec{e}_c, \vec{e}_r] = \vec{e}_v.$$

Из условий (1) следует, что $\left(\vec{C}, \vec{K}\right) = 0$.

Докажем это:

$$\overrightarrow{\Delta v_0} = \vec{v}(0_+) - \vec{v}_0 = \vec{v}(0_+) - \frac{1}{R_0}\left[\vec{C}, \vec{r}\left(0_+\right)\right] = \begin{pmatrix} v_x(0_+) - \dfrac{zC_y}{R_0^2} + \dfrac{yC_z}{R_0^2} \\ v_y(0_+) - \dfrac{xC_z}{R_0^2} + \dfrac{zC_x}{R_0^2} \\ v_z(0_+) - \dfrac{yC_x}{R_0^2} + \dfrac{xC_y}{R_0^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \Delta v_{0r}\vec{e}_r + \Delta v_{0v}\vec{e}_v + \Delta v_{0c}\vec{e}_c;$$

$$\vec{p}_r(0_+) = 2\lambda_{R0}\vec{r}(0_+) + \lambda_{C0}\vec{C} - \lambda_0\frac{\partial m_n}{\partial \Delta v_0}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Delta v_0}{\partial x(0_+)} \\ \dfrac{\partial \Delta v_0}{\partial y(0_+)} \\ \dfrac{\partial \Delta v_0}{\partial z(0_+)} \end{pmatrix}.$$

С учетом

$$\frac{\partial \Delta v_0}{\partial x(0_+)} = \frac{\Delta v_{0z} C_y - \Delta v_{0y} C_z}{R_0^2 \Delta v_0}, \quad \frac{\partial \Delta v_0}{\partial y(0_+)} = \frac{\Delta v_{0x} C_z - \Delta v_{0z} C_x}{R_0^2 \Delta v_0},$$

$$\frac{\partial \Delta v_0}{\partial z(0_+)} = \frac{\Delta v_{0y} C_x - \Delta v_{0x} C_z}{R_0^2 \Delta v_0},$$

$$\vec{p}_r(0_+) = 2\lambda_{R0}\vec{r}(0_+) + \lambda_{C0}\vec{C} + \frac{\rho_0}{R_0^2 \Delta v_0}\left[\vec{C}, \overrightarrow{\Delta v_0}\right] =$$

$$= 2\lambda_{R0}\vec{r}(0_+) + \lambda_{C0}\vec{C} + \frac{\rho_0}{R_0^2 \Delta v_0} C_0 \left[\vec{e}_c, \Delta v_{0r}\vec{e}_r + \Delta v_{0v}\vec{e}_v + \Delta v_{0c}\vec{e}_c\right] =$$

$$= 2\lambda_{R0}\vec{r}(0_+) + \lambda_{C0}\vec{C} + \frac{v_0 \rho_0}{R_0 \Delta v_0}\Delta v_{0r}\vec{e}_v + \frac{v_0 \rho_0}{R_0 \Delta v_0}\Delta v_{0v}\left(-\vec{e}_r\right),$$

$$\vec{p}_v(0_+) = -\lambda_0 \frac{\partial m_{\text{п}}}{\partial \Delta v_0}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Delta v_0}{\partial v_x(0_+)} \\ \dfrac{\partial \Delta v_0}{\partial v_y(0_+)} \\ \dfrac{\partial \Delta v_0}{\partial v_z(0_+)} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left[\vec{r}(0_+), \vec{p}_r(0_+)\right] = \left[\vec{r}(0_+), 2\lambda_{R0}\vec{r}(0_+) + \lambda_{C0}\vec{C} + \frac{v_0 \rho_0}{R_0 \Delta v_0}\Delta v_{0r}\vec{e}_v - \frac{v_0 \rho_0}{R_0 \Delta v_0}\Delta v_{0v}\vec{e}_r\right].$$

Поскольку

$$\left[\vec{r}(0_+), \vec{r}(0_+)\right] = \vec{0},$$

$$\lambda_{C0}\left[\vec{r}(0_+), \vec{C}\right] = \lambda_{C0} R_0^2 v_0 \left[\vec{e}_r, \vec{e}_c\right] = -\lambda_{C0} R_0^2 \vec{v}_0,$$

то

$$\left(\vec{C}, \left[\vec{r}(0_+), \vec{p}_r(0_+)\right]\right) = \left(\vec{C}, \ \frac{v_0^3 \rho_0}{\Delta v_0}\Delta v_{0r}\vec{e}_c\right) = \frac{R_0 v_0^2 \rho_0}{\Delta v_0}\Delta v_{0r}. \qquad (2)$$

Второе слагаемое

$$\left[\vec{v}(0_+), \vec{p}_v(0_+)\right] = \left[\vec{v}(0_+), \frac{\rho_0}{\Delta v_0}\overrightarrow{\Delta v_0}\right] = \left(\vec{v}(0_+) = \overrightarrow{\Delta v_0} + \vec{v}_0\right) =$$

$$= \left[\overrightarrow{\Delta v_0} + \vec{v}_0, \frac{\rho_0}{\Delta v_0}\overrightarrow{\Delta v_0}\right] = \left[\frac{\rho_0 v_0}{\Delta v_0}\vec{e}_v, \Delta v_{0r}\vec{e}_r + \Delta v_{0v}\vec{e}_v + \Delta v_{0c}\vec{e}_c\right] =$$

$$= \frac{\rho_0 v_0}{\Delta v_0}\Delta v_{0r}\left(-\vec{e}_c\right) + \frac{\rho_0 v_0}{\Delta v_0}\Delta v_{0c}\vec{e}_r$$

и

$$\left(\vec{C},\left[\vec{v}(0_+)\vec{p}_v(0_+)\right]\right)=\left(\vec{C},\ \frac{\rho_0 v_0}{\Delta v_0}\Delta v_{0r}(-\vec{e}_c)\right)=-\frac{R_0 v_0^2\rho_0}{\Delta v_0}\Delta v_{0r}. \qquad (3)$$

Складывая (2) и (3), получаем, что $\left(\vec{C},\vec{K}\right)=0$, т. е. компонента векторного интеграла Белецкого — Егорова — Пайнса, сонаправленная с компонентой вектора $\vec{e}_c$, равна нулю. Что и требовалось доказать.

2.2. В моменты времени τ_i $(i=1,2)$ сброса отработавших ступеней

$$\frac{\partial m_{\text{п}i}}{\partial\Delta v_{\text{сб}i}}=\frac{\alpha(1+\alpha)\left(1-\exp\left(-\frac{u_i}{c}\right)\right)\exp\left(-\frac{\Delta v_{\text{сб}i}}{c}\right)}{\left((1+\alpha)\exp\left(-\frac{\Delta v_{\text{сб}i}}{c}\right)-\alpha\right)^2}\left(-\frac{1}{c}\right);$$

$$\frac{\partial v_{\text{сб}i}}{\partial r_{ai}}=\frac{\mu r_{\text{атм}}}{v_{\text{сб}i}}\frac{2r_{ai}+r_{\text{атм}}}{\left(r_{ai}(r_{ai}+r_{\text{атм}})\right)^2}.$$

Введем обозначения:

$$\gamma_{\tau i}=\lambda_0 m_{\text{п}(3-i)}\frac{\partial m_{\text{п}i}}{\partial\Delta v_{\text{сб}i}}\left(-\frac{\partial v_{\text{сб}i}}{\partial r_{ai}}\right),\quad \gamma'_{\tau i}=\lambda_0 m_{\text{п}(3-i)}\frac{\partial m_{\text{п}i}}{\partial\Delta v_{\text{сб}i}}. \qquad (4)$$

С учетом (4) вид условий трансверсальности упрощается:

$$\begin{gathered}
p_x(\tau_{i-})=\lambda_{x\tau i}-\lambda_{rvi}v_x(\tau_{i-})+\gamma_{\tau i}\frac{x(\tau_{i-})}{r_{ai}},\\
p_y(\tau_{i-})=\lambda_{y\tau i}-\lambda_{rvi}v_y(\tau_{i-})+\gamma_{\tau i}\frac{y(\tau_{i-})}{r_{ai}},\\
p_z(\tau_{i-})=\lambda_{z\tau i}-\lambda_{rvi}v_z(\tau_{i-})+\gamma_{\tau i}\frac{z(\tau_{i-})}{r_{ai}},\\
p_{vx}(\tau_{i-})=\lambda_{vx\tau i}-\lambda_{rvi}x(\tau_{i-})+\gamma'_{\tau i}\frac{v_x(\tau_{i-})}{v_{\tau i}},\\
p_{vy}(\tau_{i-})=\lambda_{vy\tau i}-\lambda_{rvi}y(\tau_{i-})+\gamma'_{\tau i}\frac{v_y(\tau_{i-})}{v_{\tau i}},\\
p_{vz}(\tau_{i-})=\lambda_{vz\tau i}-\lambda_{rvi}z(\tau_{i-})+\gamma'_{\tau i}\frac{v_z(\tau_{i-})}{v_{\tau i}},\\
p_x(\tau_{i+})=\lambda_{x\tau i},\quad p_y(\tau_{i+})=\lambda_{y\tau i},\quad p_z(\tau_{i+})=\lambda_{z\tau i},\\
p_{vx}(\tau_{i+})=\lambda_{vx\tau i},\quad p_{vy}(\tau_{i+})=\lambda_{vy\tau i},\quad p_{vz}(\tau_{i+})=\lambda_{vz\tau i}.
\end{gathered} \qquad (5)$$

Из условий стационарности $H(\tau_{i-}) = -\lambda_{\tau i}$, $H(\tau_{i+}) = -\lambda_{\tau i}$ следует непрерывность гамильтониана в моменты времени τ_i:

$$H(\tau_{i-}) = H(\tau_{i+}). \tag{6}$$

Из условий трансверсальности (5) следует, что в моменты сброса ступеней векторный интеграл Белецкого — Егорова — Пайнса непрерывен:

$$\vec{K}\,|_{\tau i-} = \vec{K}\,|_{\tau i+}\,.$$

Доказательство: используя непрерывность координат и скоростей КА:

$$\vec{p}_r(\tau_{i+}) - \vec{p}_r(\tau_{i-}) = \lambda_{rvi}\begin{pmatrix} v_x(\tau_{i-}) \\ v_y(\tau_{i-}) \\ v_z(\tau_{i-}) \end{pmatrix} - \frac{\gamma_{\tau i}}{r_{ai}}\begin{pmatrix} x(\tau_{i-}) \\ y(\tau_{i-}) \\ z(\tau_{i-}) \end{pmatrix} = \lambda_{rvi}\vec{v}(\tau_i) - \frac{\gamma_{\tau i}}{r_{ai}}\vec{r}(\tau_i),$$

$$\vec{p}_v(\tau_{i+}) - \vec{p}_v(\tau_{i-}) = \lambda_{rvi}\begin{pmatrix} x(\tau_{i-}) \\ y(\tau_{i-}) \\ z(\tau_{i-}) \end{pmatrix} - \frac{\gamma'_{\tau i}}{v_{\tau i}}\begin{pmatrix} v_x(\tau_{i-}) \\ v_y(\tau_{i-}) \\ v_z(\tau_{i-}) \end{pmatrix} = \lambda_{rvi}\vec{r}(\tau_i) - \frac{\gamma'_{\tau i}}{v_{\tau i}}\vec{v}(\tau_i).$$

Тогда, используя свойства векторного произведения:

$$\left[\vec{r}(\tau_{i+}), \vec{p}_r(\tau_{i+})\right] - \left[\vec{r}(\tau_{i-}), \vec{p}_r(\tau_{i-})\right] =$$

$$= \left[\vec{r}(\tau_i), \vec{p}_r(\tau_{i+}) - \vec{p}_r(\tau_{i-})\right] = \left[\vec{r}(\tau_i), \lambda_{rvi}\vec{v}(\tau_i) - \frac{\gamma_{\tau i}}{r_{ai}}\vec{r}(\tau_i)\right] =$$

$$= \lambda_{rvi}\left[\vec{r}(\tau_i), \vec{v}(\tau_i)\right] - \frac{\gamma_{\tau i}}{r_{ai}}\left[\vec{r}(\tau_i), \vec{r}(\tau_i)\right] = \lambda_{rvi}\left[\vec{r}(\tau_i), \vec{v}(\tau_i)\right];$$

$$\left[\vec{v}(\tau_{i+}), \vec{p}_v(\tau_{i+})\right] - \left[\vec{v}(\tau_{i-}), \vec{p}_v(\tau_{i-})\right] =$$

$$= \left[\vec{v}(\tau_i), \vec{p}_v(\tau_{i+}) - \vec{p}_v(\tau_{i-})\right] = \left[\vec{v}(\tau_i), \lambda_{rvi}\vec{r}(\tau_i) - \frac{\gamma'_{\tau i}}{v_{\tau i}}\vec{v}(\tau_i)\right] =$$

$$= \lambda_{rvi}\left[\vec{v}(\tau_i), \vec{r}(\tau_i)\right] - \frac{\gamma'_{\tau i}}{v_{\tau i}}\left[\vec{v}(\tau_i), \vec{v}(\tau_i)\right] = \lambda_{rvi}\left[\vec{v}(\tau_i), \vec{r}(\tau_i)\right].$$

Отсюда следует непрерывность интеграла Белецкого — Егорова — Пайнса:

$$\vec{K}\,|_{\tau i+} - \vec{K}\,|_{\tau i-} = \lambda_{rvi}\left[\vec{r}(\tau_i), \vec{v}(\tau_i)\right] + \lambda_{rvi}\left[\vec{v}(\tau_i), \vec{r}(\tau_i)\right] =$$

$$= \lambda_{rvi}\left(\left[\vec{r}(\tau_i), \vec{v}(\tau_i)\right] - \left[\vec{r}(\tau_i), \vec{v}(\tau_i)\right]\right) = \vec{0}.$$

Что и требовалось доказать.

2.3. В момент времени t_1

Обозначим через ρ_1 следующее выражение:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_0}{c}\exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\left(1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)\exp\left(-\frac{\Delta v_{\text{сб}2}}{c}\right)-\alpha}\right)m_{\text{п}1}.$$

Тогда

$$p_x(t_{1-})=\lambda_{xt1},\quad p_y(t_{1-})=\lambda_{yt1},\quad p_z(t_{1-})=\lambda_{zt1},$$

$$p_{vx}(t_{1-})=\rho_1\frac{\Delta v_{1x}}{\Delta v_1},\quad p_{vy}(t_{1-})=\rho_1\frac{\Delta v_{1y}}{\Delta v_1},\quad p_{vz}(t_{1-})=\rho_1\frac{\Delta v_{1z}}{\Delta v_1},$$

$$p_x(t_{1+})=\lambda_{xt1},\quad p_y(t_{1+})=\lambda_{yt1},\quad p_z(t_{1+})=\lambda_{zt1},$$

$$p_{vx}(t_{1+})=\rho_1\frac{\Delta v_{1x}}{\Delta v_1},\quad p_{vy}(t_{1+})=\rho_1\frac{\Delta v_{1y}}{\Delta v_1},\quad p_{vz}(t_{1+})=\rho_1\frac{\Delta v_{1z}}{\Delta v_1},$$

$$H(t_{1-})=-\lambda_{t1},\quad H(t_{1+})=-\lambda_{t1},$$

где $\rho_1=\sqrt{p_{vx}^2(t_{1-})+p_{vy}^2(t_{1-})+p_{vz}^2(t_{1-})}=\sqrt{p_{vx}^2(t_{1+})+p_{vy}^2(t_{1+})+p_{vz}^2(t_{1+})}.$

Следствиями условий трансверсальности и стационарности в момент t_1 являются сонаправленность вектора импульса $(\Delta v_{1x},\ \Delta v_{1y},\ \Delta v_{1z})$ и базис-вектора Лоудена $(p_{vx}(t_1), p_{vy}(t_1), p_{vz}(t_1))$ и условия непрерывности сопряженных переменных и гамильтониана в данный момент времени:

$$\begin{aligned} &p_x(t_{1+})-p_x(t_{1-})=0,\quad p_{vx}(t_{1+})-p_{vx}(t_{1-})=0,\\ &p_y(t_{1+})-p_y(t_{1-})=0,\quad p_{vy}(t_{1+})-p_{vy}(t_{1-})=0,\\ &p_z(t_{1+})-p_z(t_{1-})=0,\quad p_{vz}(t_{1+})-p_{vz}(t_{1-})=0,\end{aligned}\tag{7}$$

$$H(t_{1+})-H(t_{1-})=0.\tag{8}$$

Учет непрерывности радиус-вектора $(x(t_1),\ y(t_1),\ z(t_1))$ и сопряженных переменных (7) позволяет упростить выражение (8) до условия ортогональности вектора $(p_x(t_1),\ p_y(t_1),\ p_z(t_1))$ и вектора импульса, известное ранее как необходимое условие максимума функции $\rho(t)$ в момент промежуточного импульсного воздействия без дополнительных ограничений [3].

Из условий трансверсальности следует, что в момент времени t_1

$$\vec{K}\,|_{t_{1-}}=\vec{K}\,|_{t_{1+}}.$$

Доказательство: из непрерывности координат КА и сопряженных переменных получаем, что

$$\left[\vec{r}(t_{1+}), \vec{p}_r(t_{1+})\right]-\left[\vec{r}(t_{1-}), \vec{p}_r(t_{1-})\right]=\left[\vec{r}(t_1), \vec{p}_r(t_1)\right]-\left[\vec{r}(t_1), \vec{p}_r(t_1)\right]=\vec{0}.$$

Используя свойства векторного произведения и непрерывность сопряженных переменных, вычислим:

$$\left[\vec{v}(t_{1+}), \vec{p}_v(t_{1+})\right]-\left[\vec{v}(t_{1-}), \vec{p}_v(t_{1-})\right]=$$
$$=\left[\vec{v}(t_{1+}), \vec{p}_v(t_1)\right]-\left[\vec{v}(t_{1-}), \vec{p}_v(t_1)\right]=\left[\vec{v}(t_{1+})-\vec{v}(t_{1-}), \vec{p}_v(t_1)\right]=$$
$$=\frac{\rho_1}{\Delta v_1}\left[\vec{v}(t_{1+})-\vec{v}(t_{1-}), \vec{v}(t_{1+})-\vec{v}(t_{1-})\right]=\vec{0}.$$

Что и требовалось доказать.

2.4. В момент времени t_2

$$\begin{gathered}
p_x(t_{2-})=\lambda_{xt2}, \quad p_y(t_{2-})=\lambda_{yt2}, \quad p_z(t_{2-})=\lambda_{zt2}, \\
p_{vx}(t_{2-})=\lambda_{\text{дов}}\frac{\Delta v_{2x}}{\Delta v_2}, \quad p_{vy}(t_{2-})=\lambda_{\text{дов}}\frac{\Delta v_{2y}}{\Delta v_2}, \quad p_{vz}(t_{2-})=\lambda_{\text{дов}}\frac{\Delta v_{2z}}{\Delta v_2}, \\
p_x(t_{2+})=\lambda_{xt2}, \quad p_y(t_{2+})=\lambda_{yt2}, \quad p_z(t_{2+})=\lambda_{zt2}, \\
p_{vx}(t_{2+})=\lambda_{\text{дов}}\frac{\Delta v_{2x}}{\Delta v_2}, \quad p_{vy}(t_{2+})=\lambda_{\text{дов}}\frac{\Delta v_{2y}}{\Delta v_2}, \quad p_{vz}(t_{2+})=\lambda_{\text{дов}}\frac{\Delta v_{2z}}{\Delta v_2};
\end{gathered} \tag{9}$$

$$H(t_{2-})=-\lambda_{t2}, \quad H(t_{2+})=-\lambda_{t2}, \tag{10}$$

где $\lambda_{\text{дов}}=\sqrt{p_{vx}^2(t_{2-})+p_{vy}^2(t_{2-})+p_{vz}^2(t_{2-})}=\sqrt{p_{vx}^2(t_{2+})+p_{vy}^2(t_{2+})+p_{vz}^2(t_{2+})}.$

Следствиями условий (9), (10) являются сонаправленность вектора импульса и базис-вектора Лоудена

$$\left(\Delta v_{2x}, \Delta v_{2y}, \Delta v_{2z}\right) \uparrow\uparrow \left(p_{vx}(t_2), p_{vy}(t_2), p_{vz}(t_2)\right)$$

и условия непрерывности сопряженных переменных и гамильтониана в данный момент времени:

$$\begin{gathered}
p_x(t_{2+})-p_x(t_{2-})=0, \quad p_y(t_{2+})-p_y(t_{2-})=0, \quad p_z(t_{2+})-p_z(t_{2-})=0, \\
p_{vx}(t_{2+})-p_{vx}(t_{2-})=0, \quad p_{vy}(t_{2+})-p_{vy}(t_{2-})=0, \quad p_{vz}(t_{2+})-p_{vz}(t_{2-})=0, \\
H(t_{2+})-H(t_{2-})=0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Учет непрерывности радиус-вектора $\left(x(t_2), y(t_2), z(t_2)\right)$ и сопряженных переменных (9) позволяет упростить (11) до условия ортогональности вектора $(p_x(t_2), p_y(t_2), p_z(t_2))$ и вектора импульса, известное ранее как необходимое условие максимума функции $\rho(t)$ в момент промежуточного импульсного воздействия без дополнительных ограничений [3].

Ступенчатость КА внесла коррективы: максимумы функции $\rho(t)$ в моменты t_1 и t_2 по величине могут различаться. Из условий трансверсальности следует, что в момент времени t_2

$$\vec{K}\,|_{t_{2-}} = \vec{K}\,|_{t_{2+}}. \tag{12}$$

Доказательство (12) аналогично доказательству, приведенному для момента времени t_1.

2.5. В момент времени t_R импульса на фазовом ограничении

$$\begin{gathered}
p_x(t_{R-}) = \lambda_{xR} - \lambda_{R2} v_x(t_{R-}),\\
p_y(t_{R-}) = \lambda_{yR} - \lambda_{R2} v_y(t_{R-}),\\
p_z(t_{R-}) = \lambda_{zR} - \lambda_{R2} v_z(t_{R-}),\\
p_x(t_{R+}) = \lambda_{xR} + 2\lambda_{R1} x(t_{R+}) + \lambda_{R3} v_x(t_{R+}),\\
p_y(t_{R+}) = \lambda_{yR} + 2\lambda_{R1} y(t_{R+}) + \lambda_{R3} v_y(t_{R+}),\\
p_z(t_{R+}) = \lambda_{zR} + 2\lambda_{R1} z(t_{R+}) + \lambda_{R3} v_z(t_{R+});
\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
p_{vx}(t_{R-}) = -\lambda_{R2} x(t_{R-}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{xR}}{\Delta v_R},\\
p_{vy}(t_{R-}) = -\lambda_{R2} y(t_{R-}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{yR}}{\Delta v_R},\\
p_{vz}(t_{R-}) = -\lambda_{R2} z(t_{R-}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{zR}}{\Delta v_R},\\
p_{vx}(t_{R+}) = \lambda_{R3} x(t_{R+}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{xR}}{\Delta v_R},\\
p_{vy}(t_{R+}) = \lambda_{R3} y(t_{R+}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{yR}}{\Delta v_R},\\
p_{vz}(t_{R+}) = \lambda_{R3} z(t_{R+}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{zR}}{\Delta v_R};
\end{gathered} \tag{14}$$

$$H(t_{R-}) = -\lambda_R, \quad H(t_{R+}) = -\lambda_R. \tag{15}$$

Следствием (15) является условие непрерывности гамильтониана:

$$H(t_{R+}) - H(t_{R-}) = 0. \tag{16}$$

Исходя из условий трансверсальности (13), (14) можно сделать вывод, что в этот момент времени $\vec{K}|_{t_{R-}} = \vec{K}|_{t_{R+}}$. Докажем это:

$$\vec{p}_r(t_{R+}) - \vec{p}_r(t_{R-}) = 2\lambda_{R1}\vec{r}(t_R) + \lambda_{R3}\vec{v}(t_{R+}) + \lambda_{R2}\vec{v}(t_{R-}).$$

Используя непрерывность координат КА и свойства векторного произведения, получаем:

$$\left[\vec{r}(t_{R+}), \vec{p}_r(t_{R+})\right] - \left[\vec{r}(t_{R-}), \vec{p}_r(t_{R-})\right] = \left[\vec{r}(t_R), \vec{p}_r(t_{R+}) - \vec{p}_r(t_{R-})\right] =$$

$$= \left[\vec{r}(t_R), 2\lambda_{R1}\vec{r}(t_R) + \lambda_{R3}\vec{v}(t_{R+}) + \lambda_{R2}\vec{v}(t_{R-})\right] =$$

$$= 2\lambda_{R1}\left[\vec{r}(t_R), \vec{r}(t_R)\right] + \lambda_{R3}\left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R+})\right] + \lambda_{R2}\left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R-})\right] =$$

$$= \lambda_{R3}\left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R+})\right] + \lambda_{R2}\left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R-})\right];$$

$$\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{p}_v(t_{R+})\right] = \left[\vec{v}(t_{R+}), \lambda_{R3}\vec{r}(t_R)\right] + \left[\vec{v}(t_{R+}), \frac{\lambda_{\text{дов}}}{\Delta v_R}\begin{pmatrix}\Delta v_{xR}\\ \Delta v_{yR}\\ \Delta v_{zR}\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \lambda_{R3}\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{r}(t_R)\right] + \frac{\lambda_{\text{дов}}}{\Delta v_R}\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{v}(t_{R+}) - \vec{v}(t_{R-})\right] =$$

$$= \lambda_{R3}\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{r}(t_R)\right] - \frac{\lambda_{\text{дов}}}{\Delta v_R}\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{v}(t_{R-})\right];$$

$$\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{p}_v(t_{R-})\right] = -\left[\vec{v}(t_{R-}), \lambda_{R2}\vec{r}(t_R)\right] + \left[\vec{v}(t_{R-}), \frac{\lambda_{\text{дов}}}{\Delta v_R}\begin{pmatrix}\Delta v_{xR}\\ \Delta v_{yR}\\ \Delta v_{zR}\end{pmatrix}\right] =$$

$$= -\lambda_{R2}\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{r}(t_R)\right] + \frac{\lambda_{\text{дов}}}{\Delta v_R}\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{v}(t_{R+}) - \vec{v}(t_{R-})\right] =$$

$$= -\lambda_{R2}\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{r}(t_R)\right] + \frac{\lambda_{\text{дов}}}{\Delta v_R}\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{v}(t_{R+})\right];$$

$$\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{p}_v(t_{R+})\right] - \left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{p}_v(t_{R-})\right] =$$

$$= \lambda_{R3}\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{r}(t_R)\right] - \frac{\lambda_{\text{дов}}}{\Delta v_R}\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{v}(t_{R-})\right] +$$

$$+ \lambda_{R2}\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{r}(t_R)\right] - \frac{\lambda_{\text{дов}}}{\Delta v_R}\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{v}(t_{R+})\right] = \lambda_{R3}\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{r}(t_R)\right] +$$

$$+ \lambda_{R2}\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{r}(t_R)\right] - \frac{\lambda_{\text{дов}}}{\Delta v_R}\left(\left[\vec{v}(t_{R+})\vec{v}(t_{R-})\right] - \left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{v}(t_{R-})\right]\right) =$$

$$= \lambda_{R3}\left[\vec{v}(t_{R+}), \vec{r}(t_R)\right] + \lambda_{R2}\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{r}(t_R)\right];$$

$$\vec{K}|_{t_{R+}} - \vec{K}|_{t_{R-}} = \lambda_{R3}\left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R+})\right] + \lambda_{R2}\left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R-})\right] +$$

$$+\lambda_{R3}\left[\vec{v}(t_{R+})\vec{r}(t_R)\right] + \lambda_{R2}\left[\vec{v}(t_{R-}), \vec{r}(t_R)\right] =$$

$$= \lambda_{R3}\left(\left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R+})\right] - \left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R+})\right]\right) +$$

$$+\lambda_{R2}\left(\left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R-})\right] - \left[\vec{r}(t_R), \vec{v}(t_{R-})\right]\right) = \vec{0}.$$

Что и требовалось доказать.

2.6. В момент времени T_-

$$p_x(T_-) = -2\lambda_T x(T_-) - \lambda_{\text{дов}} \frac{v_T}{R_T} \frac{\Delta v_{Ty}}{\Delta v_T},$$

$$p_y(T_-) = -2\lambda_T y(T_-) + \lambda_{\text{дов}} \frac{v_T}{R_T} \frac{\Delta v_{Tx}}{\Delta v_T},$$

$$p_z(T_-) = -\lambda_{zT};$$

$$p_{vx}(T_-) = \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{Tx}}{\Delta v_T}, \quad p_{vy}(T_-) = \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{Ty}}{\Delta v_T}, \quad p_{vz}(T_-) = \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{Tz}}{\Delta v_T}. \quad (17)$$

Условие стационарности в конечный момент времени имеет вид

$$H(T) = 0.$$

Аналогично начальному моменту времени компонента интеграла Белецкого — Егорова — Пайнса (сонаправленная с вектором $\vec{e}_z$) равна нулю.

Таким образом, данный интеграл сохраняет свое значение на всех участках траектории и ортогонален векторам $\vec{C}$ и $\vec{e}_z$. Следовательно, он коллинеарен вектору $\vec{e}_x$ (только первая его компонента отлична от нуля).

3. Условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_{\text{дов}}\left(\Delta v_{\text{дов}} - \Delta v^*\right) = 0,$$

$$\lambda_{R2}\left(x(t_{R-})v_x(t_{R-}) + y(t_{R-})v_y(t_{R-}) + z(t_{R-})v_z(t_{R-})\right) = 0,$$

$$\lambda_{R3}\left(x(t_{R+})v_x(t_{R+}) + y(t_{R+})v_y(t_{R+}) + z(t_{R+})v_z(t_{R+})\right) = 0.$$

4. Условия неотрицательности (неположительности):

$$\lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_{R2} \leqslant 0, \quad \lambda_{R3} \geqslant 0, \quad \lambda_{\text{дов}} \geqslant 0.$$

5. Множители Лагранжа не равны одновременно нулю (условие НЕРОН).

6. Множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя (условие нормировки). В качестве такого условия используется $\lambda_0 = 1$.

Теперь можно провести сравнение полученных условий оптимальности и их следствий с известными результатами задачи импульсной постановки без учета ступенчатости [3].

Согласно (6), (8), (11), (16), гамильтониан непрерывен в точках приложения импульсных воздействий [3, с. 34] (результат расширен на случай импульсов сброса ступеней в атмосферу). Согласно (13), функции $p_x(\cdot)$, $p_y(\cdot)$, $p_z(\cdot)$ разрывны в момент приложения импульса на фазовом ограничении: «Если в момент сообщения импульса точка находится на границе, то функция $\Psi_r(t)$ разрывна в этой точке» [3, с. 34].

В моменты приложения всех импульсных воздействий (кроме импульсов сброса ступени) импульс скорости направлен вдоль сопряженного вектора. Этот результат соответствует формуле (1.42) в работе [3].

Гамильтониан в конечный момент времени равен нулю, что соответствует результату, представленному в [3, с. 35].

В моменты приложения промежуточных импульсных воздействий (кроме импульсов сброса ступеней и импульса на фазовом ограничении) векторы $\left(p_x(\cdot),\, p_y(\cdot),\, p_z(\cdot)\right)$ и $\left(p_{vx}(\cdot),\, p_{vy}(\cdot),\, p_{vz}(\cdot)\right)$ ортогональны [3, с. 36].

Условия трансверсальности вычислялись с использованием технологии численно-аналитического дифференцирования. Всего имеется 72 фазовые переменные и, следовательно, столько же условий трансверсальности. В классе ext_value выделяется память под 72 переменные. Для каждой сопряженной переменной в каждый момент времени (0_+, $\tau_{i\pm}$, $t_{k\pm}$, $t_{R\pm}$, T_-, $i = 1, 2, k = 1, 2$) создается отдельная переменная в программе.

Результаты расчетов. Траектории рассматриваемых перелетов КА между опорной круговой и целевой эллиптической орбитами рассчитаны при $P_{\text{уд}} = 350$ с, $g = 9{,}80665$ км/с^2, $i_0 = 0{,}9$ рад, $R_0 = R_З + 200$ км, $\mu = 398601{,}19$ км^3/с^2, $\alpha = 0{,}08$, $R = 280\,000$ км, $r_{\text{атм}} = R_З + 100$ км, $R_З = 6378{,}25$ км, $R_T = 42\,164$ км.

Результаты расчетов приводятся для рассмотренной траектории с импульсом довыведения $\Delta v^* = 1{,}5$ км/с.

На рис. 1 представлен общий вид зависимости функции ρ от времени на траектории перелета. Детально вид этой зависимости в окрестности характерных точек τ_1, t_1, τ_2, t_2 и t_R представлен на рис. 2.

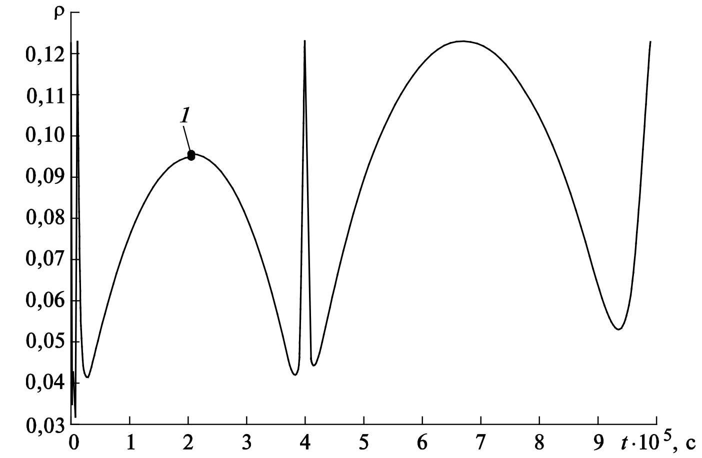

Рис. 1. График зависимости функции ρ от времени:
1 — разрыв рассматриваемой функции в момент сброса второй ступени

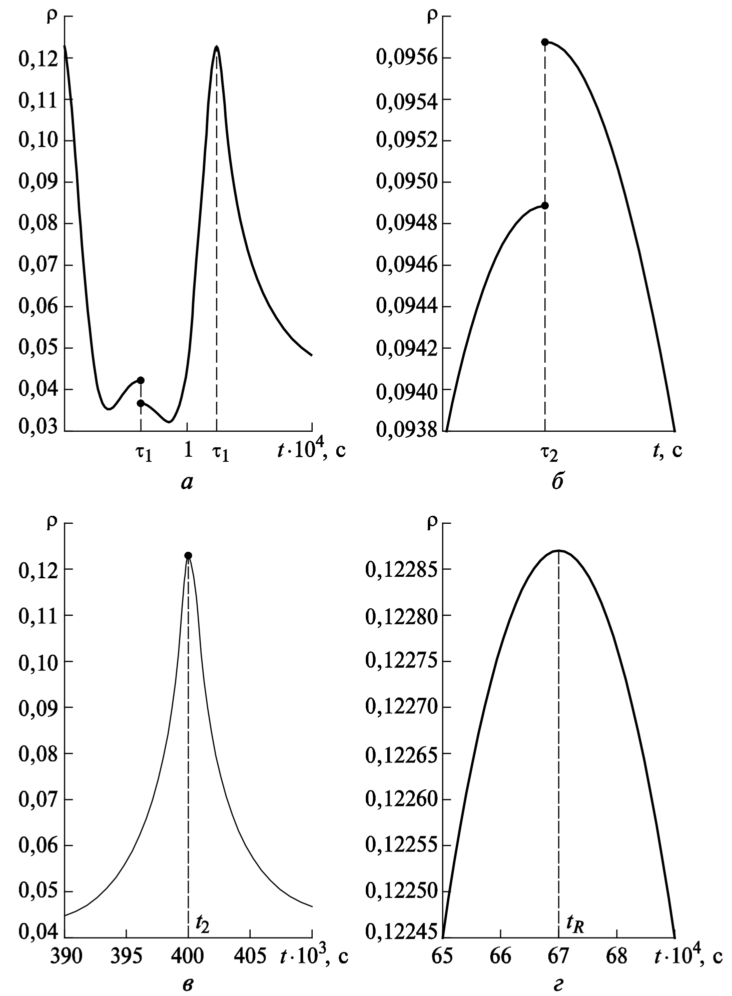

Рис. 2. График зависимости функции ρ от времени в окрестности точек τ_1, t_1, τ_2, t_2, t_R

Как следует из (9) и (17), $\rho(t_2) = \rho(T) = \lambda_{\text{дов}}$. Кроме того, в (14) $\lambda_{R2} = \lambda_{R3} = 0$, и потому $\rho(t_R) = \lambda_{\text{дов}} = 0{,}1228696733$. Значения $\rho(0) = 0{,}1230001207$ и $\rho(t_1) = 0{,}1229511111$ близки к значению $\rho(t_2) = \rho(t_R) = \rho(T) = 0{,}1228696733$, но не равны ему, и это не погрешность расчетов. Как отмечалось выше, различие максимумов функции ρ связано со ступенчатостью КА.

В начальный момент времени КА переводится на переходную орбиту:

$$x(0_+) = 6578{,}25 \text{ км}, \; y(0_+) = 0\,, \; z(0_+) = 0\,, \; v_x(0_+) = 0\,,$$

$$v_y(0_+) = 5{,}826811 \text{ км/с}, \; v_z(0_+) = 7{,}265244 \text{ км/с},$$

$$p_x(0_+) = 1{,}0344951 \cdot 10^{-4}, \; p_y(0_+) = 0, \; p_z(0_+) = 0, \; p_{vx}(0_+) = 0,$$

$$p_{vy}(0_+) = 0{,}0794531, \; p_{vz}(0_+) = 0{,}0938949.$$

Отделение первой ступени происходит в апогее первой переходной орбиты в момент времени $\tau_1 = 6192{,}47$ с:

$$x(\tau_{1-}) = x(\tau_{1+}) = -16561{,}18066 \text{ км}, \; y(\tau_{1-}) = y(\tau_{1+}) = 0\,,$$

$$z(\tau_{1-}) = z(\tau_{1+}) = 0\,, \; v_x(\tau_{1-}) = v_x(\tau_{1+}) = 0\,,$$

$$v_y(\tau_{1-}) = v_y(\tau_{1+}) = -2{,}314462 \text{ км/с}, \; v_z(\tau_{1-}) = v_z(\tau_{1+}) = -2{,}88582 \text{ км/с},$$

$$p_x(\tau_{1-}) = -1{,}8935453 \cdot 10^{-6}, \; p_y(\tau_{1-}) = 0, \; p_z(\tau_{1-}) = 0, \; p_{vx}(\tau_{1-}) = 0,$$

$$p_{vy}(\tau_{1-}) = 0{,}0195526, \; p_{vz}(\tau_{1-}) = 0{,}0374016, \; p_x(\tau_{1+}) = -2{,}9551455 \cdot 10^{-6},$$

$$p_y(\tau_{1+}) = 0, \; p_z(\tau_{1+}) = 0, \; p_{vx}(\tau_{1+}) = 0, \; p_{vy}(\tau_{1+}) = 0{,}0160736,$$

$$p_{vz}(\tau_{1+}) = 0{,}0330637.$$

В момент времени $t_1 = 12384{,}96$ с прохождения перигея КА переводится на целевую эллиптическую орбиту:

$$x(t_{1-}) = x(t_{1+}) = 6578{,}25 \text{ км}, y(t_{1-}) = y(t_{1+}) = 0\,, \; z(t_{1-}) = z(t_{1+}) = 0\,,$$

$$v_x(t_{1-}) = 0\,, \; v_y(t_{1-}) = 5{,}826811 \text{ км/с}, \; v_z(t_{1-}) = 7{,}265244 \text{ км/с}, \; v_x(t_{1+}) = 0\,,$$

$$v_y(t_{1+}) = 6{,}819735 \text{ км/с}, \; v_z(t_{1+}) = 8{,}43862 \text{ км/с}, \; p_x(t_{1-}) = p_x(t_{1+}) = 1{,}0452395 \cdot 10^{-4},$$

$$p_y(t_{1-}) = p_y(t_{1+}) = 0, \; p_z(t_{1-}) = p_z(t_{1+}) = 0, \; p_{vx}(t_{1-}) = p_{vx}(t_{1+}) = 0,$$

$$p_{vy}(t_{1-}) = p_{vy}(t_{1+}) = 0{,}0794224, \; p_{vz}(t_{1-}) = p_{vz}(t_{1+}) = 0{,}0938565.$$

Отделение второй ступени происходит на целевой эллиптической орбите.

В апогее целевой эллиптической орбиты в момент времени $\tau_2 = 206\,237{,}84$ с происходит перевод второй ступени на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы:

$$x(\tau_{2-}) = x(\tau_{2+}) = \, = -223\,261{,}13382 \text{ км}, \; y(\tau_{2-}) = y(\tau_{2+}) = 0\,,$$

$$z(\tau_{2-}) = z(\tau_{2+}) = 0\,, \; v_x(\tau_{2-}) = v_x(\tau_{2+}) = 0\,,$$

$$v_y(\tau_{2-}) = v_y(\tau_{2+}) = -0,200939 \text{ км/с}, \; v_z(\tau_{2-}) =$$

$$= v_z(\tau_{2+}) = -0,248637 \text{ км/с}, \; p_x(\tau_{2-}) = -1,0066009 \cdot 10^{-7}, \;\; p_y(\tau_{2-}) = 0,$$

$$p_z(\tau_{2-}) = 0, \;\; p_{vx}(\tau_{2-}) = 0, \; p_{vy}(\tau_{2-}) = -0,0800844, \;\; p_{vz}(\tau_{2-}) = 0,0508963,$$

$$p_x(\tau_{2+}) = -1,0845194 \cdot 10^{-7}, \; p_y(\tau_{2+}) = 0, \;\; p_z(\tau_{2+}) = 0, \;\; p_{vx}(\tau_{2+}) = 0,$$

$$p_{vy}(\tau_{2+}) = -0,0835796, \;\; p_{vz}(\tau_{2+}) = 0,0465714.$$

В момент времени $t_2 = 400090,72$ с прохождения перигея целевой орбиты начинается довыведение КА на геостационарную орбиту — КА переводится на первую орбиту довыведения:

$$x(t_{2-}) = x(t_{2+}) = 6578,25 \text{ км}, \; y(t_{2-}) = y(t_{2+}) = 0, \; z(t_{2-}) = z(t_{2+}) = 0,$$

$$v_x(t_{2-}) = 0, \; v_y(t_{2-}) = 6,819734 \text{ км/с}, \; v_z(t_{2-}) = 8,43862 \text{ км/с},$$

$$v_x(t_{2+}) = 0, \; v_y(t_{2+}) = 6,840153 \text{ км/с}, \; v_z(t_{2+}) = 8,462749 \text{ км/с},$$

$$p_x(t_{2-}) = p_x(t_{2+}) = 1,0458611 \cdot 10^{-4}, \;\; p_y(t_{2-}) = p_y(t_{2+}) = 0, \;\; p_z(t_{2-}) = p_z(t_{2+}) = 0,$$

$$p_{vx}(t_{2-}) = p_{vx}(t_{2+}) = 0, \;\; p_{vy}(t_{2-}) = p_{vy}(t_{2+}) = 0,0793712,$$

$$p_{vz}(t_{2-}) = p_{vz}(t_{2+}) = 0,0937932.$$

В момент времени $t_R = 669989,19$ с прохождения апогея первой орбиты довыведения импульсом на фазовом ограничении КА переводится на вторую орбиту довыведения:

$$x(t_{R-}) = x(t_{R+}) = -280\,000 \text{ км}, \; y(t_{R-}) = y(t_{R+}) = 0, \; z(t_{R-}) = z(t_{R+}) = 0,$$

$$v_x(t_{R-}) = 0, \; v_y(t_{R-}) = -0,160701 \text{ км/с}, \; v_z(t_{R-}) = -0,198822 \text{ км/с},$$

$$v_x(t_{R+}) = 0, \; v_y(t_{R+}) = -0,610317 \text{ км/с}, \; v_z(t_{R+}) = -0,01179 \text{ км/с},$$

$$p_x(t_{R-}) = 0, \;\; p_y(t_{R-}) = 0, \;\; p_z(t_{R-}) = 0, \;\; p_{vx}(t_{R-}) = 0,$$

$$p_{vy}(t_{R-}) = -0,1134457, \;\; p_{vz}(t_{R-}) = 0,0471911,$$

$$p_x(t_{R+}) = -1,13047596 \cdot 10^{-7}, \;\; p_y(t_{R+}) = 0, \;\; p_z(t_{R+}) = 0, \;\; p_{vx}(t_{R+}) = 0,$$

$$p_{vy}(t_{R+}) = -0,1134457, \;\; p_{vz}(t_{R+}) = 0,047191.$$

В перигее второй орбиты довыведения импульсным воздействием в конечный момент времени $T = 991689,22$ с КА переводится на геостационарную орбиту:

$$x(T_-) = 42164 \text{ км}, \; y(T_-) = 0, \; z(T_-) = 0, \; v_x(T_-) = 0,$$

$$v_y(T_-) = 4,052965 \text{ км/с}, \; v_z(T_-) = 0,078297 \text{ км/с},$$

$$p_x(T_-) = -5,95937049 \cdot 10^{-6}, \;\; p_y(T_-) = 0, \;\; p_z(T_-) = 0, \;\; p_{vx}(T_-) = 0,$$

$$p_{vy}(T_-) = -0,122478, \;\; p_{vz}(T_-) = -0,0098024.$$

Числовые множители Лагранжа для представленной экстремали:

$$\lambda_{\text{дов}} = 0{,}1228697,\ \lambda_{R0} = 1{,}8920412 \cdot 10^{-8},\ \lambda_{C0} = 0,\ \lambda_{rv1} = 0,\ \lambda_{\tau 1} = 0,$$
$$\lambda_{t1} = 0,\ \lambda_{rv2} = 0,\ \lambda_{\tau 2} = 0,\ \lambda_{t2} = 0,\ \lambda_{xR} = -1{,}130476 \cdot 10^{-7},\ \lambda_{yR} = 0,$$
$$\lambda_{zR} = 0,\ \lambda_{R} = 0,\ \lambda_{R1} = 0,\ \lambda_{R2} = 0,\ \lambda_{R3} = 0,\ \lambda_{T} = 0,\ \lambda_{zT} = 0.$$

Заключение. Интеграл Белецкого — Егорова — Пайнса и гамильтониан непрерывны в моменты подачи промежуточных импульсных воздействий, включая моменты сброса ступеней. Решение задачи перелета КА с опорной орбиты на целевую эллиптическую в рассмотренном случае задачи с фазовым ограничением и при неограниченном заранее времени перелета и довыведения без априорного предположения об апсидальности импульсов является апсидальным. Максимумы функции ρ на экстремалях различны (и это не является погрешностью расчетов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть I). *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2019, вып. 9. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-9-1917
2. Григорьев И.С., Григорьев К.Г. К проблеме решения в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой тяги в произвольном гравитационном поле в вакууме. *Космические исследования*, 2002, т. 40, № 1, с. 88–111.
3. Ивашкин В.В. *Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет*. Москва, Наука, 1975, 392 с.

Статья поступила в редакцию 06.09.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть II). *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 10.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-10-1925

Григорьев Илья Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. e-mail: iliagri@yandex.ru

Проскуряков Александр Игоревич — аспирант кафедры «Вычислительная математика» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, старший лаборант кафедры технических наук филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Баку. e-mail: ap_91@mail.ru

Spacecraft pulsed flights trajectories with the stages jettison into the atmosphere and phase restriction (part II)

© I.S. Grigoriev[1], A.I. Proskuryakov[2]

[1] Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia
[2] Baku Branch of Lomonosov Moscow State University,
Baku, AZ1144, Azerbaijan

The paper considers the idea of reducing near-Earth space debris by discarding expended stages into the Earth's atmosphere. The problem of optimizing the pulsed flight between the reference circular orbit of an artificial Earth satellite and the target elliptical orbit with a phase restriction on the maximum distance of the spacecraft from the Earth has been solved. Derivatives under the transversality of Lagrange principle in the process of solving are calculated by means of a specially developed technology of numerical-analytical differentiation. The first part of the paper introduces the statement and formalization of the problem. The second part of the paper studies the conditions for the optimality of Lagrange principle, analyses them and compares the findings obtained with the previously known results.

Keywords: *space debris, impulses, flights, stage jettison into the atmosphere, spacecraft trajectory optimization, phase restriction*

REFERENCES

[1] Grigoriev I.S., Proskuryakov A.I. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2019, iss. 9. https://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1917
[2] Grigoriev I.S., Grigoriev K.G. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2002, vol. 40, no. 1, pp. 81–103.
[3] Ivashkin V.V. *Optimizatsiya kosmicheskikh manevrov pri ogranicheniyakh na rasstoyaniya do planet* [Optimization of space maneuvers under constraints on the distances to planets]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 392 p.

Grigoriev I.S. Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University. e-mail: iliagri@yandex.ru

Proskuryakov A.I. post-graduate student, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Senior Laboratory Assistant, Department of Engineering Sciences, Baku Branch of Lomonosov Moscow State University. e-mail: ap_91@mail.ru