

Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть I)

© И.С. Григорьев¹, А.И. Проскураков^{1,2}

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия

² Филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
в городе Баку, Баку, AZ1144, Азербайджан

В работе рассмотрена идея уменьшения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработавших ступеней в атмосферу Земли. Решена задача оптимизации импульсного перелета между опорной круговой орбитой искусственного спутника Земли и целевой эллиптической орбитой с фазовым ограничением на максимальное удаление космического аппарата от Земли. Производные в условиях трансверсальности принципа Лагранжа в процессе решения вычислены с помощью специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования. В первой части статьи представлена формализация задачи и приведено описание полученных траекторий. Во второй части статьи будет показан анализ условий принципа Лагранжа и сравнение полученных следствий с известными результатами.

Ключевые слова: космический мусор, импульсные перелеты, сброс в атмосферу, оптимизация траектории космического аппарата, фазовое ограничение

Введение. В работе рассматривается задача оптимизации траекторий перелетов космического аппарата (КА) с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли заданного наклона i_0 и радиуса R_0 на целевую эллиптическую орбиту. Исследование проводится в импульсной постановке. Предполагается, что сумма импульсов до выведения КА с целевой орбиты на геостационарную (ГСО) ограничена заданной величиной. КА оснащен двумя ступенями, содержащими необходимое количество топлива для совершения требуемых маневров. Отработавшие ступени за счет дополнительных импульсных воздействий переводятся на орбиты, касающиеся условной границы атмосферы (высота перигея 100 км). Время существования объектов на таких орбитах считается малым. Предполагается, что дополнительные импульсы для сброса ступеней в атмосферу подаются в апогеях орбит, с которых осуществляется увод ступеней, и не меняют наклон орбиты, т. е. являются тормозными. Расход массы на совершение маневров учитывается по формуле Циолковского, сухие массы ступеней считаются пропорциональными массе находящегося в них топлива с коэффициентом пропорциональности α [1]. Масса двигателя и дополнительных конструкций не учитывается. Оставшаяся после

сброса второй ступени масса КА на целевой орбите считается полезной и максимизируется.

В данной статье авторы продолжают раскрывать и развивать тему, затронутую в [2]. Однако в настоящей работе в постановке задачи отсутствует априорное предположение апсидальности импульсных воздействий, и ограничение на максимальное удаление учитывается как фазовое. Можно считать, что задача оптимизации рассматривается в кольце

$$K = \{R_{\min} \leq r(t) \leq R_{\max}\},$$

где $r(t)$ — расстояние от центра Земли до КА, км, в момент времени t , с; R_{\min} и R_{\max} — ограничение на минимальное и максимальное удаление КА от центра Земли соответственно, км.

Такая постановка задачи близка к постановке [3, с. 70]. Величина минимального удаления равна радиусу условной границы атмосферы. В задаче фазовое ограничение $r(t) \geq R_{\min}$ не является активным.

Существуют различные подходы получения необходимых условий оптимальности первого порядка в задачах оптимизации траекторий перелетов КА в импульсной постановке. Один из таких подходов предполагает рассмотрение задачи в импульсной постановке как задачи оптимизации в классе обобщенных функций. При этом импульсные воздействия интерпретируются в качестве управлений, обобщенных δ -функций Дирака [4]. Использование этого подхода приводит к громоздкому учету соответствующих множителей Лагранжа в виде меры, и данный подход в настоящее время при решении задач не получил большого распространения. Другой подход [5, 6], предполагающий непосредственное использование метода вариаций, также приводит к громоздким преобразованиям.

В работе используется подход, связанный с исключением из рассмотрения управлений δ -функций Дирака и формализацией в виде гладкой задачи на наборе участков пассивного полета [7]. Основным недостатком и одновременно достоинством используемого подхода является необходимость выбора структуры траектории — последовательности пассивных участков перелета, соединенных в общую траекторию условиями стыковки. Разные последовательности таких условий стыковки — основных импульсов маневра, импульсов сброса ступеней, моментов выхода на фазовое ограничение — приводят к разным формализациям задачи и с этой точки зрения являются недостатком. С другой стороны, наличие априорной информации о структуре решения задачи, полученной в результате рассмотрения задачи в более простой постановке, а также простой учет условий и ограничений по сравнению с другими подходами и однотипность проводимого анализа формально различных задач разной структуры являются достоинством.

В рассматриваемой задаче простой постановкой был случай с априорным предположением об апсидальности импульсных воздействий [2]. Изучение этой упрощенной задачи позволяет предполагать, что вне зависимости от величины суммы импульсов довыведения и разделяемого импульса весь перелет КА с опорной круговой орбиты на ГСО состоит из трех орбит и пяти основных импульсов, а также из двух дополнительных импульсных воздействий, переводящих отработавшие ступени на орбиты, касающиеся условной границы атмосферы. Причем некоторые из этих орбит составляют траекторию выведения КА с опорной орбиты на целевую, а оставшиеся орбиты — траекторию довыведения КА (спутника) с целевой орбиты на геостационарную.

Согласно [7], решение формализованной задачи импульсной постановки на основе принципа Лагранжа сводится к решению краевой задачи и осуществляется численно методом стрельбы. В силу громоздкости получение условий краевой задачи в явном виде вызывает определенные сложности. Поэтому уже на этапе формирования краевой задачи и далее при ее численном решении применяется метод численно-аналитического дифференцирования. При этом в программной реализации вместо стандартного класса «плавающая точка» используется специально разработанный класс `ext_value`, оказавшийся эффективной реализацией этой идеи.

После численного решения задачи для сравнения с результатами [3] проводится анализ полученных условий принципа Лагранжа.

Формализация задачи. Перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с центром Земли. Ось z этой системы перпендикулярна плоскости экватора и направлена с юга на север, ось x лежит в плоскости экватора и направлена по линии узлов начальной круговой орбиты от нисходящего узла к восходящему, ось y дополняет систему координат до правой. Система дифференциальных уравнений движения центра масс КА имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t), & \dot{y}(t) &= v_y(t), & \dot{z}(t) &= v_z(t), \\ \dot{v}_x(t) &= -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)}, & \dot{v}_y(t) &= -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)}, & \dot{v}_z(t) &= -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)}, \end{aligned}$$

где $x(t), y(t), z(t)$ — координаты центра масс КА, км, в момент времени t , с; $r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$ — расстояние от КА до центра Земли, км, в момент времени t , с; $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ — компоненты

вектора скорости центра масс КА в момент времени t , c ; μ — гравитационный параметр Земли.

Пусть в момент τ происходит мгновенное импульсное воздействие (это условие необходимо при формализации задачи согласно [7]):

$$\tau_- = \tau_+; \quad (1)$$

положение объекта при этом не изменяется:

$$x(\tau_-) = x(\tau_+), \quad y(\tau_-) = y(\tau_+), \quad z(\tau_-) = z(\tau_+); \quad (2)$$

скорость объекта и масса изменяются скачком. Следует учитывать, что скачок массы связан с величиной импульса формулой Циолковского:

$$m(\tau_+) = m(\tau_-) \exp\left(-\frac{\Delta v}{c}\right),$$

где

$$\Delta v = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2},$$

$$\Delta v_x = v_x(\tau_+) - v_x(\tau_-),$$

$$\Delta v_y = v_y(\tau_+) - v_y(\tau_-),$$

$$\Delta v_z = v_z(\tau_+) - v_z(\tau_-).$$

Здесь $c = P_{уд} g_3$ — скорость истечения реактивной струи, $P_{уд}$ — удельная тяга, g_3 — ускорение свободного падения на поверхности Земли; $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$ — компоненты вектора импульса.

Далее в настоящей статье рассмотрены общие условия импульсного воздействия и их формализация в требующихся в постановке задачи ситуациях:

- в моменты подачи импульсов (начало и конец траектории);
- промежуточных импульсных воздействий;
- импульсного воздействия на фазовом ограничении;
- импульсных воздействий сброса ступеней в атмосферу.

Импульс в начальный момент времени. До первого импульсного воздействия КА находится на опорной круговой орбите заданного наклона i_0 и с заданным восходящим узлом в положительной части оси Ox :

$$x^2(0_-) + y^2(0_-) + z^2(0_-) = R_0^2, \quad x(0_-)C_{0x} + y(0_-)C_{0y} + z(0_-)C_{0z} = 0,$$

$$v_x(0_-) = -\frac{v_0}{R_0} (y(0_-) \cos i_0 + z(0_-) \sin i_0), \quad (3)$$

$$v_y(0_-) = \frac{v_0}{R_0} x(0_-) \cos i_0, \quad v_z(0_-) = \frac{v_0}{R_0} x(0_-) \sin i_0,$$

где

$$C_{0x} = 0, \quad C_{0y} = -C_0 \sin i_0; \quad C_{0z} = C_0 \cos i_0, \quad C_0 = \sqrt{\mu R_0};$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}; \quad R_0 = R_3 + h_0.$$

Здесь C_{0x}, C_{0y}, C_{0z} — компоненты вектора кинетического момента КА относительно центра Земли; C_0 — значение модуля этого вектора; R_0 — радиус опорной орбиты; R_3 — радиус Земли; h_0 — высота опорной орбиты; v_0 — модуль вектора скорости на опорной орбите.

С использованием условий (1), (2) при формализации задачи величины $x(0_-), y(0_-), z(0_-), v_x(0_-), v_y(0_-), v_z(0_-)$ и сам момент 0_- из рассмотрения исключаются и условия (3) трансформируются:

$$x^2(0_+) + y^2(0_+) + z^2(0_+) = R_0^2,$$

$$x(0_+)C_{0x} + y(0_+)C_{0y} + z(0_+)C_{0z} = 0;$$

величина импульсного воздействия в начальный момент времени имеет вид:

$$\Delta v_0 = \sqrt{\Delta v_{0x}^2 + \Delta v_{0y}^2 + \Delta v_{0z}^2},$$

где

$$\Delta v_{0x} = v_x(0_+) + \frac{v_0}{R_0}(y(0_+) \cos i_0 + z(0_+) \sin i_0);$$

$$\Delta v_{0y} = v_y(0_+) - \frac{v_0}{R_0}x(0_+) \cos i_0; \quad \Delta v_{0z} = v_z(0_+) - \frac{v_0}{R_0}x(0_+) \sin i_0.$$

Промежуточные импульсные воздействия. В моменты импульсных воздействий в промежуточные моменты времени (без дополнительных условий и ограничений) t_1 и t_2 выполняются условия:

$$t_{k+} - t_{k-} = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$x(t_{k+}) - x(t_{k-}) = 0, \quad y(t_{k+}) - y(t_{k-}) = 0, \quad z(t_{k+}) - z(t_{k-}) = 0;$$

величины импульсных воздействий в эти моменты времени имеют вид

$$\Delta v_k = \sqrt{\Delta v_{kx}^2 + \Delta v_{ky}^2 + \Delta v_{kz}^2},$$

где

$$\Delta v_{kx} = v_x(t_{k+}) - v_x(t_{k-}),$$

$$\Delta v_{ky} = v_y(t_{k+}) - v_y(t_{k-}),$$

$$\Delta v_{kz} = v_z(t_{k+}) - v_z(t_{k-}).$$

Импульсное воздействие на фазовом ограничении. В момент импульсного воздействия t_R на фазовом ограничении выполняются условия:

$$t_{R+} - t_{R-} = 0;$$

$$x(t_{R+}) - x(t_{R-}) = 0,$$

$$y(t_{R+}) - y(t_{R-}) = 0,$$

$$z(t_{R+}) - z(t_{R-}) = 0;$$

$$x^2(t_{R+}) + y^2(t_{R+}) + z^2(t_{R+}) - R^2 = 0; \quad (4)$$

$$x(t_{R-})v_x(t_{R-}) + y(t_{R-})v_y(t_{R-}) + z(t_{R-})v_z(t_{R-}) \geq 0; \quad (5)$$

$$x(t_{R+})v_x(t_{R+}) + y(t_{R+})v_y(t_{R+}) + z(t_{R+})v_z(t_{R+}) \leq 0, \quad (6)$$

где R — величина максимального удаления КА от Земли, км.

Величина импульсного воздействия в момент подачи импульса на фазовом ограничении представлена следующим образом:

$$\Delta v_R = \sqrt{\Delta v_{xR}^2 + \Delta v_{yR}^2 + \Delta v_{zR}^2},$$

где

$$\Delta v_{xR} = v_x(t_{R+}) - v_x(t_{R-});$$

$$\Delta v_{yR} = v_y(t_{R+}) - v_y(t_{R-});$$

$$\Delta v_{zR} = v_z(t_{R+}) - v_z(t_{R-}).$$

Отметим, что условия (5), (6) подчеркивают возможность излома траектории в момент импульсного воздействия на фазовом ограничении: перед выходом на фазовое ограничение (4) радиальная составляющая скорости КА положительна (5), а после схода — отрицательна (6).

Импульсы сброса ступеней. В моменты τ_1 и τ_2 сброса первой и второй ступеней выполняются условия:

$$\tau_{i+} - \tau_{i-} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$x(\tau_{i+}) - x(\tau_{i-}) = 0, \quad y(\tau_{i+}) - y(\tau_{i-}) = 0, \quad z(\tau_{i+}) - z(\tau_{i-}) = 0,$$

$$v_x(\tau_{i+}) - v_x(\tau_{i-}) = 0, \quad v_y(\tau_{i+}) - v_y(\tau_{i-}) = 0, \quad v_z(\tau_{i+}) - v_z(\tau_{i-}) = 0,$$

$$x(\tau_{i-})v_x(\tau_{i-}) + y(\tau_{i-})v_y(\tau_{i-}) + z(\tau_{i-})v_z(\tau_{i-}) = 0.$$

Величины импульсных воздействий в моменты сброса ступеней представлены следующим образом:

$$\Delta v_{сбi} = v_{ti} - v_{сбi}, \quad i = 1, 2;$$

$$v_{ti} = \sqrt{v_x^2(\tau_{i-}) + v_y^2(\tau_{i-}) + v_z^2(\tau_{i-})},$$

где v_{ti} — модуль скорости в апогее орбиты сброса ступени; $v_{сбi}$ — модуль скорости ступени в апогее соответствующей орбиты, касающейся условной границы атмосферы (т. е. после дополнительного импульсного воздействия). Согласно [8], $v_{сбi}$ вычисляется по формуле

$$v_{сбi} = \sqrt{\frac{2\mu r_{атм}}{r_{ai}(r_{ai} + r_{атм})}},$$

$$r_{атм} = R_3 + 100;$$

$$r_{ai} = \sqrt{x^2(\tau_{i-}) + y^2(\tau_{i-}) + z^2(\tau_{i-})},$$

где r_{ai} — радиус апогея соответствующей орбиты, с которой происходит сброс ступени, км; $r_{атм}$ — радиус перигея орбиты, касающейся условной границы атмосферы (постоянная величина в задаче), км; R_3 — радиус Земли.

Импульс в конечный момент времени. После последнего импульсного воздействия КА должен находиться на ГСО:

$$x^2(T_+) + y^2(T_+) - R_T^2 = 0, \quad z(T_+) = 0;$$

$$v_x(T_+) = -\frac{v_T}{R_T} y(T_+); \quad v_y(T_+) = \frac{v_T}{R_T} x(T_+); \quad v_z(T_+) = 0; \quad (7)$$

$$v_T = \sqrt{\frac{\mu}{R_T}},$$

где v_T — модуль вектора скорости на ГСО; R_T — радиус ГСО, км.

Как и в начальный момент времени с использованием условий (1), (2), при формализации задачи величины $x(T_+)$, $y(T_+)$, $z(T_+)$, $v_x(T_+)$, $v_y(T_+)$, $v_z(T_+)$ и сам момент T_+ из рассмотрения исключаются, а условия (7) преобразуются:

$$x^2(T_-) + y^2(T_-) - R_T^2 = 0, \quad z(T_-) = 0;$$

величина импульсного воздействия в момент выведения на ГСО имеет вид

$$\Delta v_T = \sqrt{\Delta v_{Tx}^2 + \Delta v_{Ty}^2 + \Delta v_{Tz}^2},$$

где

$$\Delta v_{Tx} = -\frac{v_T}{R_T} y(T_-) - v_x(T_-),$$

$$\Delta v_{Ty} = \frac{v_T}{R_T} x(T_-) - v_y(T_-), \quad \Delta v_{Tz} = -v_z(T_-).$$

Функционал и ограничение импульса довыведения. Аналогично [2] масса КА считается безразмерной:

$$m_0 = 1.$$

Обозначим u_1 и u_2 характеристическую скорость маневра, реализованную за счет топлива из первой и второй ступеней соответственно. После выполнения первой серии маневров (до сброса первой ступени) масса КА

$$m_{1-} = m_0 \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right).$$

После тормозного импульса масса сброшенной ступени составляет

$$m_{1\text{сух}} = m_{1c} \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right),$$

где m_{1c} — масса сбрасываемой ступени, состоящая из сухой массы и массы топлива, необходимого для реализации маневра сброса в атмосферу.

Примем, что топлива в ступени не осталось и это ее сухая масса. С другой стороны, масса топлива в первой ступени составляет

$$m_{1T} = m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right) + m_{1c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right)\right)$$

тогда сухая масса ступени

$$m_{1\text{сух}} = \alpha \left(m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right) + m_{1c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right)\right) \right).$$

Масса сбрасываемой ступени m_{1c} определяется в результате решения линейного уравнения

$$m_{1c} \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right) = \alpha \left(m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right) + m_{1c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right)\right) \right):$$

$$m_{1c} = \frac{\alpha m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right) - \alpha}.$$

Итак, после сброса первой ступени масса КА

$$m_{1+} = m_{1-} - m_{1c}.$$

Вторая ступень отделяется на целевой орбите. Аналогично предыдущему случаю

$$m_{2-} = m_{1+} \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right); \quad m_{2c} = \frac{\alpha m_{1+} \left(1 - \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_{c62}}{c}\right) - \alpha};$$

$$m_n = m_{2+} = m_{2-} - m_{2c}.$$

Таким образом, полезная масса может быть представлена в виде произведения двух множителей:

$$m_n = m_{n1} \cdot m_{n2},$$

$$m_{n1} = \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \frac{\alpha \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right) - \alpha},$$

$$m_{n2} = \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right) - \frac{\alpha \left(1 - \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_{c62}}{c}\right) - \alpha}.$$

Решается задача максимизации полезной массы — массы КА на целевой орбите, оставшейся после сброса второй ступени:

$$-m_n \rightarrow \min.$$

Сумма импульсов довыведения $\Delta v_{\text{дов}}$ с целевой орбиты на ГСО ограничена заданной величиной Δv^* :

$$\Delta v_{\text{дов}} \leq \Delta v^*.$$

Неизвестными в задаче являются:

- моменты времени $t_1, t_2, t_R, \tau_1, \tau_2, T$;
- координаты и скорости КА в начальный момент времени после импульсного воздействия: $x(0_+), y(0_+), z(0_+), v_x(0_+), v_y(0_+), v_z(0_+)$;
- координаты и скорости КА в моменты времени t_i ($i = 1, 2, R$): $x(t_{i+}), x(t_{i-}), y(t_{i+}), y(t_{i-}), z(t_{i+}), z(t_{i-}), v_x(t_{i+}), v_x(t_{i-}), v_y(t_{i+}), v_y(t_{i-}), v_z(t_{i+}), v_z(t_{i-})$;
- координаты и скорости КА в конечный момент времени до импульсного воздействия: $x(T_-), y(T_-), z(T_-), v_x(T_-), v_y(T_-), v_z(T_-)$;
- координаты и скорости КА в моменты τ_j ($j = 1, 2$): $x(\tau_{j+}), x(\tau_{j-}), y(\tau_{j+}), y(\tau_{j-}), z(\tau_{j+}), z(\tau_{j-}), v_x(\tau_{j+}), v_x(\tau_{j-}), v_y(\tau_{j+}), v_y(\tau_{j-}), v_z(\tau_{j+}), v_z(\tau_{j-})$.

Отметим, что формализация задачи не закончена: не определены соответствия точной очередности между моментами $t_1, t_2, t_R, \tau_1, \tau_2$. Их установление зафиксирует структуру траектории и позволит на основе принципа Лагранжа сформировать краевую задачу.

Решение задачи. Полученная задача на условный экстремум в функциональном пространстве на основе соответствующего принципа Лагранжа сводится к краевой задаче [7]. Условия трансверсальности вычисляются с помощью технологии численно-аналитического дифференцирования. Отметим, что данная технология позволяет получить условия трансверсальности без проведения громоздких преобразований с высокой точностью. В основе технологии лежит идея применения объектно-ориентированного программирования к реализации графового подхода [9–11] вычисления производных функции многих переменных: в вершинах графа хранятся значения функций и их производных до требуемого порядка, вычисления проходят последовательно по правилам дифференцирования, начиная от вершин нулевого слоя, которым приписаны независимые переменные, до последней вершины графа, в которой хранится значение искомой функции и ее производных.

Краевая задача сводится с помощью метода стрельбы к системе нелинейных уравнений. Полученная система решается численно — модифицированным методом Ньютона (модификация Исаева — Сонина [12] с использованием в условии сходимости нормировки Федоренко [13]). Система линейных уравнений, получаемая в процессе применения метода Ньютона, решается методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу и повторным пересчетом [14]. Задача Коши решается методом Дормана — Принса 8 (7) с автоматическим выбором шага [15].

Результаты. Рассмотренную задачу удалось решить. Результаты приводятся для $i_0 = 0,9$ рад.

В случае импульса довыведения 0,5 км/с: $0 < \tau_1 < t_1 < t_R < t_2 < \tau_2 < T$ и траектория состоит из шести пассивных участков (рис. 1): 1) от 0_+ до τ_{1-} ; 2) от τ_{1+} до t_{1-} ; 3) от t_{1+} до t_{R-} ; 4) от t_{R+} до t_{2-} ; 5) от t_{2+} до τ_{2-} ; 6) от τ_{2+} до T_- .

В начальный момент времени подается импульс, переводящий КА с опорной орбиты на первую переходную с апогеем r_{a1} и наклоном i_1 (на рис. 1 этот участок обозначен цифрой 1). В момент τ_1 прохождения апогея первая ступень переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы (на рис. 1 — орбита C_1), далее в момент времени t_1 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на вторую переходную орбиту с апогеем r_{a2} и наклоном i_2

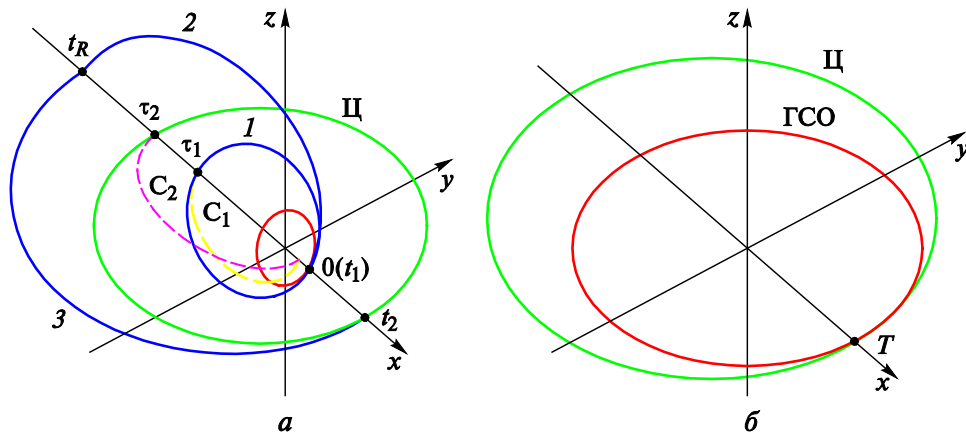


Рис. 1. Схема перелета на целевую орбиту с импульсом довыведения 0,5 км/с: *a* — перелет на целевую орбиту Ц; *б* — довыведение с целевой орбиты Ц на геостационарную; C_1, C_2 — орбиты сброса, соответственно, первой и второй ступени в атмосферу

(на рис. 1 — орбита, обозначенная цифрой 2). В момент времени t_R прохождения апогея (на фазовом ограничении) подается импульс, переводящий КА на третью переходную орбиту с перигеем $r_{п3}$ и наклоном i_3 (на рис. 1 — орбита, обозначенная цифрой 3). В момент времени t_2 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на целевую орбиту с апогеем $r_{а,ц}$ и наклоном $i_{ц}$ (на рис. 1 — орбита Ц). В момент времени τ_2 прохождения апогея подается импульс, переводящий вторую ступень на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы (на рис. 1 — орбита C_2). В момент времени T прохождения перигея КА переводится с целевой орбиты на ГСО — в рассматриваемом случае орбита довыведения с целевой на геостационарную отсутствует.

В случае импульса довыведения 1,0 км/с: $0 < \tau_1 < t_1 < t_R < \tau_2 < t_2 < T$ и траектория состоит из шести пассивных участков (рис. 2): 1) от 0_+ до τ_{1-} ; 2) от τ_{1+} до t_{1-} ; 3) от t_{1+} до t_{R-} ; 4) от t_{R+} до τ_{2-} ; 5) от τ_{2+} до t_{2-} ; 6) от t_{2+} до T_- .

В начальный момент времени подается импульс, переводящий КА с опорной орбиты на первую переходную с апогеем $r_{а1}$ и наклоном i_1 (на рис. 2 этот участок обозначен цифрой 1). В момент τ_1 прохождения апогея первая ступень переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы (на рис. 2 — орбита C_1), далее в момент времени t_1 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на вторую переходную орбиту с апогеем $r_{а2}$ и наклоном i_2

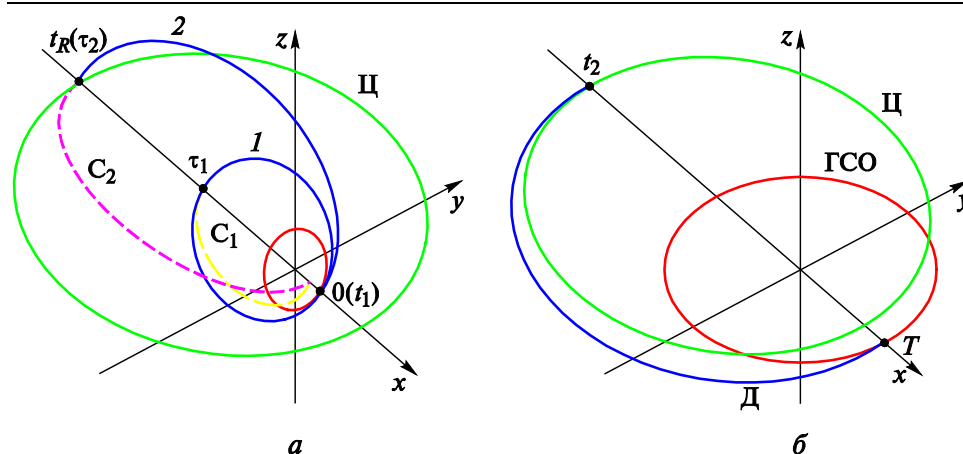


Рис. 2. Схема перелета на целевую орбиту с импульсом довыведения 1,0 км/с: *a* — перелет на целевую орбиту Ц; *б* — довыведение с целевой орбиты Ц на геостационарную; Д — орбита довыведения

(на рис. 2 — орбита, обозначенная цифрой 2). В момент времени t_R прохождения апогея (на фазовом ограничении) подается импульс, переводящий КА на целевую орбиту с перигеем $r_{п.ц}$ и наклоном $i_{ц}$ (на рис. 2 — орбита Ц). В момент времени τ_2 прохождения апогея подается импульс, переводящий вторую ступень на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы (на рис. 2 — орбита C_2). В момент времени t_2 прохождения апогея подается импульс, переводящий КА на орбиту довыведения с перигеем $r_{п.д}$ и наклоном $i_{д}$ (на рис. 2 — орбита Д). В момент времени T прохождения перигея КА переводится с орбиты довыведения на ГСО.

При импульсе довыведения 1,5 км/с $0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < t_R < T$ и траектория состоит из шести пассивных участков (рис. 3): 1) от 0_+ до τ_{1-} ; 2) от τ_{1+} до t_{1-} ; 3) от t_{1+} до τ_{2-} ; 4) от τ_{2+} до t_{2-} ; 5) от t_{2+} до t_{R-} ; 6) от t_{R+} до T_- .

В начальный момент времени подается импульс, переводящий КА с опорной орбиты на переходную с апогеем r_{a1} и наклоном i_1 (на рис. 3 этот участок обозначен цифрой 1). В момент τ_1 прохождения апогея первая ступень переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы (на рис. 3 — орбита C_1), далее в момент времени t_1 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на целевую орбиту с радиусом апогея $r_{a.ц}$ и наклоном $i_{ц}$ (на рис. 3 — орбита Ц). В момент времени τ_2 прохождения апогея подается импульс, переводящий вторую ступень на орбиту, касающуюся условной границы

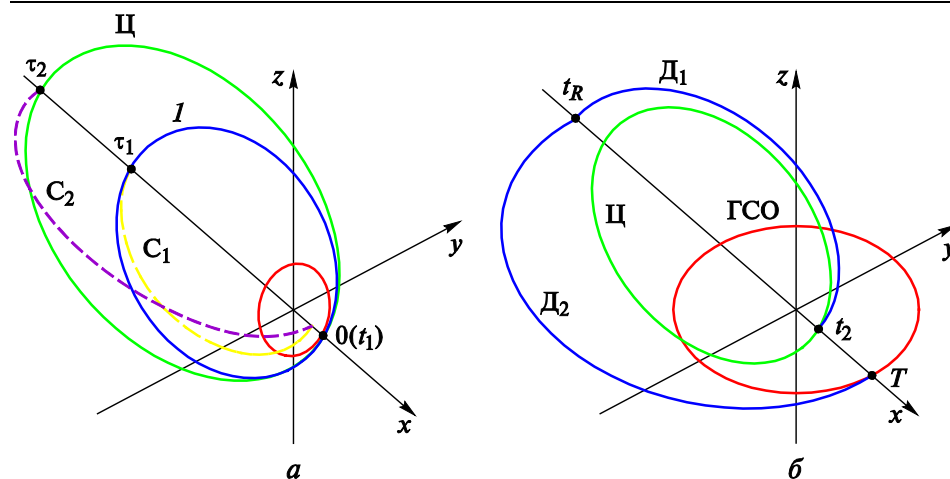


Рис. 3. Схема перелета на целевую орбиту с импульсом довыведения 1,5 км/с: *а* — перелет на целевую орбиту Ц; *б* — довыведение с целевой орбиты Ц на геостационарную; Д₁ — первая орбита довыведения, Д₂ — вторая орбита довыведения

атмосферы (на рис. 3 — орбита С₂). В момент времени t_2 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на первую орбиту довыведения с апогеем $r_{a,д1}$ и наклоном $i_{д1}$ (на рис. 3 — орбита Д₁). В момент времени t_R прохождения апогея (на фазовом ограничении) подается импульс, переводящий КА на вторую орбиту довыведения с перигеем $r_{п,д2}$ и наклоном $i_{д2}$ (на рис. 3. — орбита Д₂). В момент времени T прохождения перигея КА переводится со второй орбиты довыведения на ГСО.

Заключение. Оказалось, что решение задачи является апсидальным. В зависимости от величины импульса довыведения очередность указанных моментов, позволяющих получить решение задачи, различна и величины импульсов довыведения 0,5 км/с, 1,0 км/с и 1,5 км/с представляют собой три характерных случая. Выбор других очередностей либо не позволяет решить краевую задачу, либо полученное решение не является искомым. Во второй части статьи будет проведен анализ условий принципа Лагранжа, сравнение полученных результатов с уже известными.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. *Механика космического полета. Проблемы оптимизации*. Москва, Наука, 1975, 702 с.
- [2] Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Оптимизация целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса отработавших ступеней в атмосферу. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-4-1869

- [3] Ивашкин В.В. *Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет*. Москва, Наука, 1975, 392 с.
- [4] Орлов Ю.В. *Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями*. Москва, Наука, 1988, 187 с.
- [5] Дубовский С.В. Межорбитальные и межпланетные перелеты. *Космические исследования*, 1965, т. 5, № 4, с. 494–507.
- [6] Ильин В.А., Кузмак Г.Е. *Оптимальные перелеты космических аппаратов*. Москва, Наука, 1976, 744 с.
- [7] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. К проблеме решения в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой тяги в произвольном гравитационном поле в вакууме. *Космические исследования*, 2002, т. 40, № 1, с. 88–111.
- [8] Дубошин Г.Н. *Справочное руководство по небесной механике и астеродинамике*. Москва, Наука, 1976, 864 с.
- [9] Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. *Параллельные вычисления*. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2002, 1410 с.
- [10] Горбань А.Н., Сенашова М.Ю. Быстрое дифференцирование, двойственность и обратное распространение ошибки. *Вычислительные технологии*, 1999, т. 4, специальный выпуск, с. 55–68.
- [11] Сенашова М.Ю. Оценки погрешностей вычисления сложной функции многих переменных и ее градиента. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 2007, т. 10, № 1, с. 77–88.
- [12] Исаев В.К., Сонин В.В. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач. *Вычислительная математика и математическая физика*, 1963, т. 3, № 6, с. 1114–1116.
- [13] Федоренко Р.П. *Введение в вычислительную физику*. Москва, Издательство Московского физико-технического института, 1994, 528 с.
- [14] McCracken D.D., Dorn W.S. *Numerical Methods and Fortran Programming: with application in engineering and science*. Wiley International Edition, second ed., 1967, 457 p.
- [15] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Berlin, Springer, second ed., 1993, 528 p.

Статья поступила в редакцию 20.08.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть I). *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 9.
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1917>

Григорьев Илья Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. e-mail: iliagri@yandex.ru

Проскуряков Александр Игоревич — аспирант кафедры «Вычислительная математика» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, старший лаборант кафедры технических наук Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Баку. e-mail: ap_91@mail.ru

Spacecraft pulsed flights trajectories with the stages jettison into the atmosphere and phase restriction (part I)

© I.S. Grigoriev¹, A.I. Proskuryakov^{1,2}

¹ Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

² Baku Branch of Lomonosov Moscow State University, Baku, AZ1144, Azerbaijan

The part I of the paper considers the reducing of the near-Earth space debris due to the stages discharge into the Earth's atmosphere, introduces the solution for optimizing the impulse transfer between the artificial Earth satellite reference circular orbit and the target elliptical orbit with a phase constraint on the maximum distance of the spacecraft from the Earth. A specially developed numerical-analytical differentiation technology allows us to calculate derivatives under the transversality of Lagrange principle. The part II of the paper proposes the transversality and stationarity conditions analysis, which results in the conclusion that the Beletsky — Egorov — Pines integral, and the Hamiltonian are continuous in the moments of all intermediate impulse actions application, including the stage discharge moments. The paper shows that the problem solution for various flight schemes coincides with a similar one without a priori assumption about the impulse effects apsidal nature.

Keywords: space debris, impulse flights, discharge into the atmosphere, spacecraft trajectory optimization, phase constraint

REFERENCES

- [1] Grodzovsky G.L., Ivanov Yu.N., Tokarev V.V. *Mekhanika kosmicheskogo poleta. Problemy optimizatsii* [The mechanics of space flight. Optimization problems]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 702 p.
- [2] Grigor'ev I.S., Proskuryakov A.I. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, iss. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-4-1869
- [3] Ivashkin V.V. *Optimizatsiya kosmicheskikh manevrov pri ogranicheniyakh na rastoyaniya do planet* [Optimization of space maneuvers with distance to planet constraints]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 392 p.
- [4] Orlov Yu.V. *Teoriya optimalnykh sistem s obobshchennymi upravleniyami* [The theory of optimal systems with generalized controls]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 187 p.
- [5] Dubovsky S.V. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1965, vol. 5, no. 4, pp. 494–507.
- [6] Il'in V.A., Kuzmak G.E. *Optimalnye perelety kosmicheskikh apparatov* [Optimal spacecraft flights]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 744p.
- [7] Grigor'ev I.S., Grigor'ev K.G. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2002, vol. 40, no. 1, pp. 88–111.
- [8] Duboshin G.N. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoy mekhanike i astrodinamike* [A reference guide to celestial mechanics and astrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 864 p.
- [9] Voevodin V.V., Voevodin V.I. *Parallelnye vychisleniya* [Parallel computing]. St. Petersburg, BHV- Petersburg Publ., 2002, 1410 p.

- [10] Gorban A.N., Senashova M.YГ. *Vychislitelnye tekhnologii — Computational Technologies*, 1999, vol. 4, spec. no., pp. 55–68.
- [11] Senashova M.YU. *Sibirskiy zhurnal vychislitelnoy matematiki — Siberian Journal of Numerical Mathematics*, 2007, vol. 10, no. 1, pp. 77–88.
- [12] Isaev V.K., Sonin V.V. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki (Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics)*, 1963, vol. 3, no. 6, pp. 1114–1116.
- [13] Fedorenko R.P. *Vvedenie v vychislitelnyuyu fiziku [Introduction to computational physics]*. Moscow, MIPT Publ., 1994, 528p.
- [14] McCracken D.D., Dorn W.S. *Numerical Methods and Fortran Programming: with application in engineering and science*. Wiley International Edition, second printing, 1967, 457 p.
- [15] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Berlin, Springer, second edition, 1993, 528 p.

Grigoriev I.S., Cand. Sc. (Phys.-Mat.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University. e-mail: iliagri@yandex.ru

Proskuryakov A.I., post-graduate student, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Senior Laboratory Assistant, Department of Technical Sciences of Baku Branch of Lomonosov Moscow State University. e-mail ap_91@mail.ru