

## Гравитационные маневры при осуществлении марсианской пилотируемой экспедиции с электроракетной двигательной установкой

© А.А. Сеницын

ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша», Москва, 125438, Россия

*Выполнен анализ энергобаллистической эффективности использования гравитационных маневров при осуществлении марсианской пилотируемой экспедиции в период 2049–2050 годов. Цель проведения этого анализа — определение возможностей улучшения энергобаллистических показателей эффективности марсианской пилотируемой экспедиции за счет использования гравитационных маневров около Земли и Венеры. Методический подход к расчету основных энергобаллистических показателей марсианской пилотируемой экспедиции основан на разбиении траектории перелета на участки, при определении основных характеристик которых используется постановка, соответствующая ограниченной задаче двух тел. С использованием принципа максимума Понтрягина оптимизированы гелиоцентрические участки траектории. Получены семейства решений с гравитационным маневром у Венеры, отличающиеся направлением облета Венеры и высотой перицентра орбиты пролета. Установлено существование близких по характеристикам экстремалей с выходом на ограничение по высоте перицентра орбиты пролета и без него. Проведено сравнение по продолжительности экспедиции и начальной массе с решениями без гравитационного маневра.*

**Ключевые слова:** марсианская пилотируемая экспедиция, электроракетная двигательная установка, гравитационные маневры, оптимизация межпланетных траекторий, многоэкстремальность, продолжительность экспедиции, начальная масса марсианского экспедиционного комплекса

**Введение.** Среди возможных технических решений по реализации марсианской пилотируемой экспедиции часто рассматривают перелеты Земля—Марс—Земля с однокорабельной схемой построения [1, 2]. В этом случае полезный груз марсианского экспедиционного комплекса (МЭК) включает в себя не только орбитальный модуль (ОМ), корабль возвращения на Землю (КВЗ), но и взлетно-посадочный комплекс (ВПК) для осуществления высадки экипажа на поверхность Марса. Такая схема экспедиции обладает рядом как положительных, так и отрицательных свойств. С одной стороны, данная схема предъявляет наиболее жесткие требования к совершенству и уровню характеристик энергодвигательного комплекса для обеспечения приемлемых энергобаллистических показателей эффективности (продолжительности экспедиции и начальной массы МЭК). С другой стороны, именно такая схема снижает риски экспедиции, а также дает возможность реализовать эскадренные экспедиции (одновременный полет

нескольких однотипных МЭЖ с одним экипажем), что позволяет улучшить показатели надежности экспедиции [3].

Известно, что использование гравитационных маневров в ряде случаев улучшает энергобаллистические показатели межпланетных перелетов КА, хотя риски при этом возрастают. Для вариантов марсианской экспедиции на базе двигательных установок (ДУ) большой тяги использование гравитационных маневров позволяет повысить энергобаллистические показатели и значительно снизить скорость входа КВЗ в атмосферу Земли. Применение гравитационных маневров для марсианской пилотируемой экспедиции с ДУ малой тяги изучено в меньшей степени, что связано со значительным усложнением расчетов при использовании гравитационных маневров.

Цель данной работы — исследование эффективности использования гравитационных маневров в одном из вариантов марсианской пилотируемой экспедиции с ДУ малой тяги.

В марсианской пилотируемой экспедиции потенциально наибольший интерес представляют гравитационные маневры у Земли (на этапе возвращения, т. е. схема полета Земля—Марс—Земля—Земля) и у Венеры (как по схеме Земля—Венера—Марс—Земля, так и по схеме Земля—Марс—Венера—Земля).

**Методический подход.** Определение энергобаллистических показателей эффективности марсианской пилотируемой экспедиции базировалось на расчетах отдельных участков траектории перелета Земля—Марс—Земля. Такое упрощение расчетов (связанное с разбиением траектории перелета на участки, позволяющие оценивать характеристики участков перелета в рамках решения ограниченной задачи двух тел) является достаточно распространенным (см., например, работу [4]). В настоящей работе рассмотрена следующая последовательность участков траектории перелета:

- 1) раскрутка у Земли;
- 2) гелиоцентрический перелет Земля—Марс;
- 3) скрутка у Марса;
- 4) орбитально-десантная операция у Марса в течение 30 сут;
- 5) раскрутка у Марса;
- 6) гелиоцентрический перелет Марс—Земля;
- 7) скрутка у Земли и выход на монтажную орбиту.

В качестве монтажной (стартовой) орбиты принята околоземная круговая орбита высотой 1000 км, в качестве орбиты базирования у Марса — круговая орбита высотой 400 км.

Характеристики припланетных участков могут быть с достаточной точностью оценены с использованием зависимости из работы [5] (в данной работе среди прочих рассмотрена и задача плоского перелета с заданной круговой орбиты на параболическую). Данная зависимость является аппроксимацией большого числа оптимальных по

быстродействию траекторий раскрутки. Вследствие симметрии можно оценивать продолжительность и затраты топлива на скрутку и раскрутку аналогичным образом:

$$t_k = \frac{1 - 0,8209\sqrt[4]{a_0} - (1 - 0,8209\sqrt[4]{a_0})^2 / 2V_{уд}}{a_0}, \quad (1)$$

где  $t_k$  — безразмерная продолжительность раскрутки (скрутки);  $a_0$  — безразмерное начальное ускорение;  $V_{уд}$  — безразмерная скорость истечения реактивной струи. Связь безразмерных переменных с размерными (помечены звездочками) имеет следующий вид:

$$t_k = t_k^* / \sqrt{\frac{r_0^{*3}}{\mu_{пл}}}; \quad a_0 = \frac{a_0^*}{\frac{\mu_{пл}}{r_0^{*2}}}; \quad V_{уд} = I_{уд}g / \sqrt{\frac{\mu_{пл}}{r_0^*}}. \quad (2)$$

Здесь  $r_0^*$  — радиус начальной (конечной) орбиты раскрутки (скрутки);  $\mu_{пл}$  — гравитационный параметр планеты;  $I_{уд}$  — удельный импульс электроракетной двигательной установки (ЭРДУ);  $g$  — стандартное ускорение свободного падения (9,80665 м/с<sup>2</sup>).

Гелиоцентрические участки траекторий рассматривались в рамках метода грависфер нулевой протяженности, т. е. краевые условия на концах гелиоцентрических участков состояли в совпадении координат и скоростей КА и соответствующих планет.

Для определения характеристик гелиоцентрического участка межпланетного перелета применялись уравнения движения в сферической системе координат (аналогично работам [5, 6]):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V_r; \\ \dot{\phi} &= \frac{V_\phi}{r \cos \theta}; \\ \dot{\theta} &= \frac{V_\theta}{r}; \\ \dot{V}_r &= \frac{V_\phi^2 + V_\theta^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{R_d}{m} \delta \sin \gamma \cos \alpha; \\ \dot{V}_\phi &= -\frac{V_r V_\phi}{r} + \frac{V_\phi V_\theta}{r} \operatorname{tg} \theta + \frac{R_d}{m} \delta \cos \gamma \cos \alpha; \\ \dot{V}_\theta &= -\frac{V_r V_\theta}{r} - \frac{V_\phi^2}{r} \operatorname{tg} \theta + \frac{R_d}{m} \delta \sin \alpha; \\ \dot{m} &= -\tilde{m} \delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $r$  — расстояние от КА до притягивающего центра;  $V_r$  — радиальная составляющая скорости;  $\varphi$  — фазовый угол (угол между опорным направлением и проекцией радиуса-вектора на опорную плоскость);  $\theta$  — угол между направлением от притягивающего центра к КА и опорной плоскостью;  $V_\varphi$  — составляющая скорости, перпендикулярная радиусу-вектору и лежащая в опорной плоскости;  $V_\theta$  — составляющая скорости, перпендикулярная радиусу-вектору, лежащая в плоскости, перпендикулярной опорной и проходящей через радиус-вектор;  $R_d$  — тяга ЭРДУ (принята постоянной на траектории перелета);  $m$  — текущая масса КА;  $\gamma$  — угол между проекцией направления вектора тяги на опорную плоскость и опорным направлением;  $\alpha$  — угол между направлением вектора тяги и опорной плоскостью;  $\tilde{m}$  — задаваемый уровень массового расхода рабочего тела ЭРДУ;  $\delta$  — функция включения (выключения). Переменные  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  являются переменными управления. В качестве опорной плоскости рассматривалась плоскость эклиптики, угол  $\varphi$  рассчитывали от направления на точку весеннего равноденствия.

Приведенные выше уравнения движения записаны в безразмерном виде. Аналогично работе [5], обезразмеривание проведено следующим образом (размерные переменные выделены звездочкой):

$$\text{скорость} \quad V^* = V \frac{\mu}{r_{\text{хар}}};$$

$$\text{ускорение} \quad a^* = a \frac{\mu}{r_{\text{хар}}^2};$$

$$\text{время} \quad t^* = t \sqrt{\frac{r_{\text{хар}}^3}{\mu}};$$

$$\text{масса} \quad m^* = m m_{\text{хар}}.$$

Здесь индекс «хар» обозначает характерные расстояние (полагалось равным одной астрономической единице); и массу (принята равной массе КА в начале рассматриваемого участка);  $\mu$  — гравитационный параметр Солнца.

В качестве функционала  $J$  системы рассматривалось:

1) масса КА в конце гелиоцентрического участка при ограничении на продолжительность  $T$  гелиоцентрического участка, т. е.

$$J_1 = -m(T);$$

2) продолжительность гелиоцентрического участка  $T$  (задача на быстроедействие), т. е.

$$J_2 = T.$$

Гамильтониан системы:

$$\begin{aligned} H = & -\tilde{m}\delta\psi_m + V_r\psi_r + \frac{V_\varphi}{r\cos\theta}\psi_\varphi + \frac{V_\theta}{r}\psi_\theta + \\ & + \left( \frac{V_\varphi^2 + V_\theta^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{R_d}{m}\delta\sin\gamma\cos\alpha \right) \psi_{V_r} + \\ & + \left( -\frac{V_rV_\varphi}{r} + \frac{V_\varphi V_\theta}{r}\operatorname{tg}\theta + \frac{R_d}{m}\delta\cos\gamma\cos\alpha \right) \psi_{V_\varphi} + \\ & + \left( -\frac{V_rV_\theta}{r} - \frac{V_\varphi^2}{r}\operatorname{tg}\theta + \frac{R_d}{m}\delta\sin\alpha \right) \psi_{V_\theta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Переменные управления определялись согласно принципу максимума Понтрягина [7, 8]:

$$\sin\gamma = \frac{\psi_{V_r}}{\sqrt{\psi_{V_r}^2 + \psi_{V_\varphi}^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{\psi_{V_\varphi}}{\sqrt{\psi_{V_r}^2 + \psi_{V_\varphi}^2}}; \quad (5)$$

$$\sin\alpha = \frac{\psi_{V_\theta}}{\sqrt{\psi_{V_r}^2 + \psi_{V_\varphi}^2 + \psi_{V_\theta}^2}}; \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{\psi_{V_r}^2 + \psi_{V_\varphi}^2}}{\sqrt{\psi_{V_r}^2 + \psi_{V_\varphi}^2 + \psi_{V_\theta}^2}}; \quad (6)$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } -\tilde{m}\psi_m + \frac{R_d}{m}\sqrt{\psi_{V_r}^2 + \psi_{V_\varphi}^2 + \psi_{V_\theta}^2} \geq 0; \\ 0, & \text{если } -\tilde{m}\psi_m + \frac{R_d}{m}\sqrt{\psi_{V_r}^2 + \psi_{V_\varphi}^2 + \psi_{V_\theta}^2} < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Сопряженная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_r = & \frac{V_\varphi}{r^2\cos\theta}\psi_\varphi + \frac{V_\theta}{r^2}\psi_\theta - \left( \frac{2}{r^3} - \frac{V_\varphi^2 + V_\theta^2}{r^2} \right) \psi_{V_r} - \\ & - \left( \frac{V_rV_\varphi}{r^2} - \frac{V_\varphi V_\theta}{r^2}\operatorname{tg}\theta \right) \psi_{V_\varphi} - \left( \frac{V_rV_\theta}{r^2} + \frac{V_\varphi^2}{r^2}\operatorname{tg}\theta \right) \psi_{V_\theta}; \\ \dot{\psi}_\varphi = & 0; \\ \dot{\psi}_\theta = & -\frac{V_\varphi\operatorname{tg}\theta}{r\cos\theta}\psi_\varphi - \frac{V_\varphi V_\theta}{r\cos^2\theta}\psi_{V_\varphi} + \frac{V_\varphi^2}{r\cos^2\theta}\psi_{V_\theta}; \\ \dot{\psi}_{V_r} = & -\psi_r + \frac{V_\varphi}{r}\psi_{V_\varphi} + \frac{V_\theta}{r}\psi_{V_\theta}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_{V_\varphi} &= -\frac{1}{r \cos \theta} \Psi_\varphi - \frac{2V_\varphi}{r} \Psi_{V_r} + \frac{2V_\varphi \operatorname{tg} \theta}{r} \Psi_{V_\theta} - \left( -\frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta}{r} \operatorname{tg} \theta \right) \Psi_{V_\varphi}; \\ \dot{\Psi}_{V_\theta} &= -\frac{1}{r} \Psi_\theta - \frac{2V_\theta}{r} \Psi_{V_r} + \frac{V_r}{r} \Psi_{V_\theta} - \frac{V_\varphi \operatorname{tg} \theta}{r} \Psi_{V_\varphi}; \\ \dot{\Psi}_m &= \frac{R_d}{m^2} \delta \sqrt{\Psi_{V_r}^2 + \Psi_{V_\varphi}^2 + \Psi_{V_\theta}^2}.\end{aligned}\quad (8)$$

Дифференциальные уравнения движения и сопряженные им интегрировались численно с применением метода Рунге — Кутты — Фельберга седьмого (восьмого) порядка [9].

Методика моделирования межпланетного перелета предполагала использование метода грависфер нулевой протяженности. При этом полагались, что припланетные участки раскрутки обеспечивают нулевой гиперболический избыток скорости. Для участков скрутки начальные условия также принимались соответствующими движению по параболе. Таким образом, краевые условия на гелиоцентрических участках состояли в совпадении соответствующих координат КА и планет старта и назначения.

Эфемериды планет определяли согласно модели EPM2008 [10].

Краевые условия на гелиоцентрических участках и порядок расчета существенно зависели от постановки решаемой задачи (с гравитационными маневрами и без них). Для вариантов без гравитационных маневров порядок расчетов состоял в следующем. Вначале рассчитывали параметры перелета по схеме Земля—Марс—Земля с непрерывной работой ЭРДУ. При этом направленным перебором подбирались начальная масса МЭК, обеспечивающая требуемую массу в конце экспедиции (масса ВПК, ОМ и ЭРДУ с баками). Далее для каждого из рассматриваемых значений начальных масс МЭК (меньших, чем в случае непрерывной работы ЭРДУ) направленным перебором продолжительности участка траектории Земля—Марс (задача максимизации конечной массы с фиксированной продолжительностью гелиоцентрического участка, начиная от продолжительности с непрерывной работой ЭРДУ и далее с увеличением продолжительности участка Земля—Марс за счет пассивных участков с шагом ~5 сут) последовательно определялись начальные условия участка траектории Марс—Земля. В условия краевой задачи перелета возвращения Марс—Земля вносились дата отлета от Марса, фиксированная масса в конце участка (обеспечивающая требуемую массу в конце экспедиции у Земли), а продолжительность перелета определялась численно из решения краевой задачи. Таким образом, для каждой из рассматриваемых начальных масс МЭК в результате решения ряда краевых задач Земля—Марс—Земля (с последовательным опре-

делением характеристик каждого из участков траектории) определялось оптимальное (обеспечивающее минимальную продолжительность всей экспедиции) соотношение длительностей полета на гелиоцентрических участках Земля—Марс и Марс—Земля.

Использование гравитационного маневра на каком-либо из гелиоцентрических участков ведет к некоторому усложнению решаемой задачи гелиоцентрического перелета, так как фактически решается краевая задача с разрывом фазовых переменных в неопределенный момент перелета [8].

Принятые в качестве ограничений в момент выполнения гравитационного маневра условия могут несколько различаться [11–15]. При этом важным моментом является приведенное в работах [11–15] различие в записи условий оптимальности в зависимости от наличия или отсутствия факта выхода на ограничение на высоту перицентра гиперболы пролета. Эта особенность приводит либо к необходимости решения краевых задач как с ограничением на высоту перицентра орбиты при гравитационном маневре, так и без такого ограничения (т. е. к увеличению объема расчетов), либо к необходимости разработки специального методического подхода, учитывающего возможность выхода на ограничение и позволяющего определять в процессе решения оптимальную высоту перицентра орбиты пролета за счет использования специальных приемов (как это было сделано в работе [16]).

В настоящей работе также рассматривался подход, позволяющий определить оптимальную высоту перицентра гиперболы пролета с учетом ограничения на минимальную высоту перицентра пролетной орбиты, в основу которого положены идеи, предложенные в работе [14].

Ограничения, заданные во внутренней точке траектории в момент  $t_1$  гравитационного маневра:

$$g_1 = \bar{r}^- - \bar{r}_{\text{пл}} = 0; \quad (9)$$

$$g_2 = \bar{r}^+ - \bar{r}_{\text{пл}} = 0, \quad (10)$$

где  $\bar{r}$  — радиусы-векторы; индекс «-» означает переменную до осуществления гравитационного маневра; «+» — после, индекс «пл» обозначает планету, около которой происходит гравитационный маневр.

В момент  $t_1$  фазовые координаты (координаты скорости) претерпевают разрыв. Условие в точке разрыва:

$$g_3 = \bar{V}_{\infty}^+ - A(\bar{V}_{\infty}^-) \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \cos \gamma_{\text{гр}} \\ \sin \beta \sin \gamma_{\text{гр}} \end{pmatrix} = 0, \quad (11)$$

где  $\bar{V}_\infty^+ = \bar{V}^+ - \bar{V}_{пл}$  — гиперболический избыток скорости после гравитационного маневра;  $\bar{V}_\infty^- = \bar{V}^- - \bar{V}_{пл}$  — гиперболический избыток скорости до гравитационного маневра;  $\beta$  — угол поворота планетоцентрической скорости (гиперболического избытка скорости);  $\gamma_{гр}$  — угол между линиями пересечения картинной плоскости (плоскость, перпендикулярная вектору  $\bar{V}_\infty^-$ ) с плоскостью гравитационного маневра и с плоскостью эклиптики.

Угол поворота

$$\beta = \beta_{\max} \cos^2 \xi_\beta; \quad \beta_{\max} = \pi - 2 \arccos \left( \frac{V_{кр}^2}{V_{кр}^2 + V_\infty^2} \right); \quad V_{кр}^2 = \frac{\mu_{пл}}{r_\pi^{\min}}, \quad (12)$$

где  $\xi_\beta$  — дополнительная неизвестная, вводимая вместо неизвестной  $\beta$ , и выступающая как параметр в задаче оптимального управления;  $\mu_{пл}$  — гравитационный параметр планеты, около которой проводится гравитационный маневр;  $r_\pi^{\min}$  — минимальный радиус перицентра орбиты при выполнении гравитационного маневра (минимальный радиус перицентра пролетной гиперболы задавали соответствующим высоте 1000 км).

Вариант матрицы  $A(\bar{V}_\infty^-)$  принят такой же, как в работах [14, 15]:

$$A(\bar{V}_\infty^-) = \begin{pmatrix} V_{\infty x}^- & -\frac{V_{\infty y}^- V_\infty^-}{V_{\infty xy}^-} & -\frac{V_{\infty x}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \\ V_{\infty y}^- & \frac{V_{\infty x}^- V_\infty^-}{V_{\infty xy}^-} & -\frac{V_{\infty y}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \\ V_{\infty z}^- & 0 & V_{\infty xy}^- \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где  $V_\infty = \sqrt{V_{\infty x}^{-2} + V_{\infty y}^{-2} + V_{\infty z}^{-2}}$ ;  $V_{\infty xy}^- = \sqrt{V_{\infty x}^{-2} + V_{\infty y}^{-2}}$ .

Использование в качестве неизвестной параметра  $\xi_\beta$  вместо угла  $\beta$  аналогично приему из работы [14], заключающемуся в использовании переменной  $0 \leq \xi_\beta \leq 1$ ,  $\beta = \beta_{\max} \xi_\beta$ . Рассмотрение указанных переменных позволяет использовать единую форму условий оптимальности. Такая замена при минимальном усложнении математических выражений позволяет в рамках решения одной краевой задачи определить радиус перицентра пролетной гиперболы. В работе [16] для получения единой формы условий оптимальности (для задач с выходом на ограничение по радиусу перицентра пролетной гипербо-

лы и без ограничения) введены две вспомогательные переменные (неизвестные краевой задачи).

Условия (девять), добавляющиеся в невязку в случае гравитационного маневра, помимо трех условий  $g_1$  (9), приведены ниже (см. (14)–(17), (20), (21)). Эти условия для простоты записаны в декартовой системе координат. Для перевода из сферической системы координат в декартову использовались канонические преобразования:

$$\begin{aligned}
 & \Psi_{V_x}^- + \Psi_{V_x}^+ \left[ \begin{aligned} & -\cos \beta + \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty x}^-}{V_{\infty xy}^- V_{\infty}^-} \sin \beta \cos \gamma_{гр} - \\ & - \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty} V_{\infty x}^-}{V_{\infty xy}^{-3}} \sin \beta \cos \gamma_{гр} + \\ & + \frac{V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \sin \beta \sin \gamma_{гр} - \frac{V_{\infty x}^{-2} V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^{-3}} \sin \beta \sin \gamma_{гр} - \\ & - \left\{ \begin{aligned} & V_{\infty x}^- \sin \beta + \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \cos \gamma_{гр} + \\ & + \frac{V_{\infty x}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \sin \gamma_{гр} \end{aligned} \right\} \times \\ & \times \frac{4}{V_{\infty} \sqrt{2V_{кр}^2 + V_{\infty}^2}} \frac{V_{кр}^2}{V_{кр}^2 + V_{\infty}^2} V_{\infty x}^- \cos^2 \xi_{\beta} \end{aligned} \right] + \\
 & + \Psi_{V_y}^+ \left[ \begin{aligned} & - \frac{V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^-} \sin \beta \cos \gamma_{гр} - \frac{V_{\infty x}^{-2}}{V_{\infty xy}^- V_{\infty}^-} \sin \beta \cos \gamma_{гр} + \\ & + \frac{V_{\infty x}^{-2} V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^{-3}} \sin \beta \cos \gamma_{гр} - \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty z}^- V_{\infty x}^-}{V_{\infty xy}^{-3}} \sin \beta \sin \gamma_{гр} - \\ & - \left\{ \begin{aligned} & V_{\infty y}^- \sin \beta - \frac{V_{\infty x}^- V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \cos \gamma_{гр} + \\ & + \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \sin \gamma_{гр} \end{aligned} \right\} \times \\ & \times \frac{4}{V_{\infty} \sqrt{2V_{кр}^2 + V_{\infty}^2}} \frac{V_{кр}^2}{V_{кр}^2 + V_{\infty}^2} V_{\infty x}^- \cos^2 \xi_{\beta} \end{aligned} \right] + \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\Psi_{V_z}^+ \left[ \begin{aligned} & -\frac{V_{\infty x}^-}{V_{\infty xy}^-} \sin \beta \sin \gamma_{\text{гр}} - \\ & -\left\{ V_{\infty z}^- \sin \beta - V_{\infty xy}^- \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}} \right\} \times \\ & \times \frac{4}{V_{\infty} \sqrt{2V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2}} \frac{V_{\text{кр}}^2}{V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2} V_{\infty x}^- \cos^2 \xi_{\beta} \end{aligned} \right] = 0; \\
 & \Psi_{V_y}^- + \Psi_{V_x}^+ \left[ \begin{aligned} & \frac{V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^-} \sin \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \frac{V_{\infty y}^{-2}}{V_{\infty xy}^- V_{\infty}^-} \sin \beta \cos \gamma_{\text{гр}} - \\ & -\frac{V_{\infty y}^{-2} V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^{-3}} \sin \beta \cos \gamma_{\text{гр}} - \frac{V_{\infty x}^- V_{\infty}^- V_{\infty y}^-}{V_{\infty xy}^{-3}} \sin \beta \sin \gamma_{\text{гр}} - \\ & - \left\{ \begin{aligned} & V_{\infty x}^- \sin \beta + \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \\ & + \frac{V_{\infty x}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}} \end{aligned} \right\} \times \\ & \times \frac{4}{V_{\infty} \sqrt{2V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2}} \frac{V_{\text{кр}}^2}{V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2} V_{\infty y}^- \cos^2 \xi_{\beta} \end{aligned} \right] + \\
 & +\Psi_{V_y}^+ \left[ \begin{aligned} & -\cos \beta - \frac{V_{\infty x}^- V_{\infty y}^-}{V_{\infty xy}^- V_{\infty}^-} \sin \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \frac{V_{\infty x}^- V_{\infty}^- V_{\infty y}^-}{V_{\infty xy}^{-3}} \sin \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \\ & + \frac{V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \sin \beta \sin \gamma_{\text{гр}} - \frac{V_{\infty y}^{-2} V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^{-3}} \sin \beta \sin \gamma_{\text{гр}} - \\ & - \left\{ \begin{aligned} & V_{\infty y}^- \sin \beta - \frac{V_{\infty x}^- V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \\ & + \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}} \end{aligned} \right\} \times \\ & \times \frac{4}{V_{\infty} \sqrt{2V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2}} \frac{V_{\text{кр}}^2}{V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2} V_{\infty y}^- \cos^2 \xi_{\beta} \end{aligned} \right] + \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Psi_{V_z}^+ \left[ \begin{aligned} & -\frac{V_{\infty y}^-}{V_{\infty xy}^-} \sin \beta \sin \gamma_{\text{гр}} - \\ & -\{V_{\infty z}^- \sin \beta - V_{\infty xy}^- \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}}\} \times \\ & \times \frac{4}{V_{\infty} \sqrt{2V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2}} \frac{V_{\text{кр}}^2}{V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2} V_{\infty y}^- \cos^2 \xi_{\beta} \end{aligned} \right] = 0; \\
 & \Psi_{V_z}^- + \Psi_{V_x}^+ \left[ \begin{aligned} & \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^- V_{\infty}^-} \sin \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \frac{V_{\infty x}^-}{V_{\infty xy}^-} \sin \beta \sin \gamma_{\text{гр}} - \\ & - \left\{ \begin{aligned} & V_{\infty x}^- \sin \beta + \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \\ & + \frac{V_{\infty x}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}} \end{aligned} \right\} \times \\ & \times \frac{4}{V_{\infty} \sqrt{2V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2}} \frac{V_{\text{кр}}^2}{V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2} V_{\infty z}^- \cos^2 \xi_{\beta} \end{aligned} \right] + \\
 & + \Psi_{V_y}^+ \left[ \begin{aligned} & -\frac{V_{\infty x}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^- V_{\infty}^-} \sin \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \frac{V_{\infty y}^-}{V_{\infty xy}^-} \sin \beta \sin \gamma_{\text{гр}} - \\ & - \left\{ \begin{aligned} & V_{\infty y}^- \sin \beta - \frac{V_{\infty x}^- V_{\infty}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \\ & + \frac{V_{\infty y}^- V_{\infty z}^-}{V_{\infty xy}^-} \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}} \end{aligned} \right\} \times \\ & \times \frac{4}{V_{\infty} \sqrt{2V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2}} \frac{V_{\text{кр}}^2}{V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2} V_{\infty z}^- \cos^2 \xi_{\beta} \end{aligned} \right] + \quad (16) \\
 & + \Psi_{V_z}^+ \left[ \begin{aligned} & -\cos \beta - \{V_{\infty z}^- \sin \beta - V_{\infty xy}^- \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}}\} \times \\ & \times \frac{4}{V_{\infty} \sqrt{2V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2}} \frac{V_{\text{кр}}^2}{V_{\text{кр}}^2 + V_{\infty}^2} V_{\infty z}^- \cos^2 \xi_{\beta} \end{aligned} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Условие для определения момента времени  $t_1$  [8]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H^- - H^+ = 0,$$

где  $\Phi = \sum_i v_i g_i$ ;  $H^-$ ,  $H^+$  — гамильтонианы системы до и после момента времени  $t_1$ . Отсюда можно получить следующее выражение для определения  $t_1$ :

$$-\bar{\Psi}_r^+ \bar{V}_\infty^+ + \bar{\Psi}_r^- \bar{V}_\infty^- + (\bar{\Psi}_V^+ - \bar{\Psi}_V^-) \left( \dot{\bar{V}}^{\text{шт}} + \frac{\bar{r}}{r^3} \right) + \frac{R_d}{m} (|\bar{\Psi}_V^-| \delta^- - |\bar{\Psi}_V^+| \delta^+) = 0. \quad (17)$$

Дополнительные условия трансверсальности:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\beta} = 0; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{\text{гр}}} = 0 \quad (19)$$

или

$$\left[ \begin{aligned} & \Psi_{V_x}^+ \left( V_{\infty_x}^- \sin \beta + \frac{V_{\infty_y}^- V_\infty^-}{V_{\infty_{xy}}^-} \cos \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \frac{V_{\infty_x}^- V_{\infty_z}^-}{V_{\infty_{xy}}^-} \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}} \right) + \\ & + \Psi_{V_y}^+ \left( V_{\infty_y}^- \sin \beta - \frac{V_{\infty_x}^- V_\infty^-}{V_{\infty_{xy}}^-} \cos \beta \cos \gamma_{\text{гр}} + \frac{V_{\infty_y}^- V_{\infty_z}^-}{V_{\infty_{xy}}^-} \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}} \right) + \\ & + \Psi_{V_z}^+ \left( V_{\infty_z}^- \sin \beta - V_{\infty_{xy}}^- \cos \beta \sin \gamma_{\text{гр}} \right) \end{aligned} \right] \times \quad (20)$$

$$\times \beta_{\text{max}} \sin \xi_\beta \cos \xi_\beta = 0;$$

$$\begin{aligned} & \Psi_{V_x}^+ \left( -\frac{V_{\infty_y}^- V_\infty^-}{V_{\infty_{xy}}^-} \sin \gamma_{\text{гр}} + \frac{V_{\infty_x}^- V_{\infty_z}^-}{V_{\infty_{xy}}^-} \cos \gamma_{\text{гр}} \right) + \\ & + \Psi_{V_y}^+ \left( \frac{V_{\infty_x}^- V_\infty^-}{V_{\infty_{xy}}^-} \sin \gamma_{\text{гр}} + \frac{V_{\infty_y}^- V_{\infty_z}^-}{V_{\infty_{xy}}^-} \cos \gamma_{\text{гр}} \right) + \\ & + \Psi_{V_z}^+ \left( -V_{\infty_{xy}}^- \cos \gamma_{\text{гр}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Размерность краевой задачи с гравитационным маневром (по сравнению с краевой задачей с прямым перелетом) возрастает на девять (неизвестные в момент  $t_1 - t_1$ ,  $\Psi_x^+$ ,  $\Psi_y^+$ ,  $\Psi_z^+$ ,  $\Psi_{V_x}^+$ ,  $\Psi_{V_y}^+$ ,  $\Psi_{V_z}^+$ ,  $\xi_\beta$ ,  $\gamma_{\text{гр}}$ ) с шести (для задачи быстрогодействия) или семи (для задачи мак-

сумма конечной массы при фиксированной продолжительности перелета). Следует отметить, что размерность краевой задачи с гравитационным маневром может быть сокращена на три, если вектор  $\bar{\Psi}_V^+$  исключить из неизвестных краевой задачи и определять его через  $\bar{\Psi}_V^-$  и фазовые координаты в точке гравитационного маневра, как это было сделано в работе [16].

Применительно к перелетам с гравитационными маневрами около Венеры важным оказался выбор даты отлета от Земли (Марса). В этом случае размерность краевой задачи возрастает на единицу: неизвестная — дата отлета, а дополнительное условие (аналогично [17]) представлено ниже:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} \Psi_x V_x^{\text{пл.0}} + \Psi_y V_y^{\text{пл.0}} + \Psi_z V_z^{\text{пл.0}} + \\ + \Psi_{V_x} \dot{V}_x^{\text{пл.0}} + \Psi_{V_y} \dot{V}_y^{\text{пл.0}} + \Psi_{V_z} \dot{V}_z^{\text{пл.0}} \end{array} \right) \Big|_{t_0} - \\ & - \left( \begin{array}{l} \Psi_x V_x^{\text{пл.к}} + \Psi_y V_y^{\text{пл.к}} + \Psi_z V_z^{\text{пл.к}} + \\ + \Psi_{V_x} \dot{V}_x^{\text{пл.к}} + \Psi_{V_y} \dot{V}_y^{\text{пл.к}} + \Psi_{V_z} \dot{V}_z^{\text{пл.к}} \end{array} \right) \Big|_{t_0+T} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь индексы «пл.0» и «пл.к» означают принадлежность к планетам отлета и назначения рассматриваемого гелиоцентрического участка;  $T$  — его продолжительность.

Расчет участков в случае гравитационного маневра у Венеры на этапе Земля—Марс (схема перелета Земля—Венера—Марс—Земля) проводился последовательно (так же, как и для вариантов расчетов без гравитационных маневров).

Для случая когда гравитационный маневр у Венеры предполагается на этапе возвращения от Марса (схема перелета Земля—Марс—Венера—Земля), вначале рассчитывался гелиоцентрический участок перелета возвращения Марс—Венера—Земля. Таким образом определялась дата отлета от Марса и вычислялась дата окончания гелиоцентрического участка Земля—Марс. В условия невязки краевой задачи гелиоцентрического участка перелета Земля—Марс наряду с фазовыми координатами Марса вносились заданные дата окончания участка и масса в конце участка.

Принятые характеристики составляющих МЭК: ВПК — 40 т, ОМ — 60 т, КВЗ — 16,5 т, энергодвигательный комплекс (ЭДК) с баками — 270 т ( $\gamma_{\text{ЭДК}} \approx 10$  кг/кВт). Мощность ЭРДУ 25 МВт, тяговый КПД 0,7, КПД системы преобразования и управления 0,95, удельный импульс тяги 7000 с.

Продолжительность пребывания у Марса 30 сут.

**Характеристики марсианской пилотируемой экспедиции без гравитационных маневров.** В настоящей работе применительно к ЭДК на базе ЭРДУ в качестве опорных вариантов приняты однокорабельные экспедиции с перелетами классов А и В [18]. Деление траекторий перелета проведено по свойствам экстремалей наиболее продолжительного участка: классу А соответствуют траектории с приближением к Солнцу, классу В — без приближения. Перелеты с длительным ожиданием у Марса не рассматривались.

При сравнении результатов расчетов различных схем экспедиции с опорными вариантами наиболее важными параметрами являются энергобаллистические показатели эффективности МЭК — начальная масса МЭК и продолжительность экспедиции.

Энергобаллистические показатели эффективности для опорных вариантов приведены на рис. 1 в виде зависимостей начальной массы МЭК от продолжительности экспедиции (на рис. 1 также приведена зависимость, соответствующая перелету по классу А для дополнительной даты отлета от Земли в течение синодического периода 2049–2050 гг.).

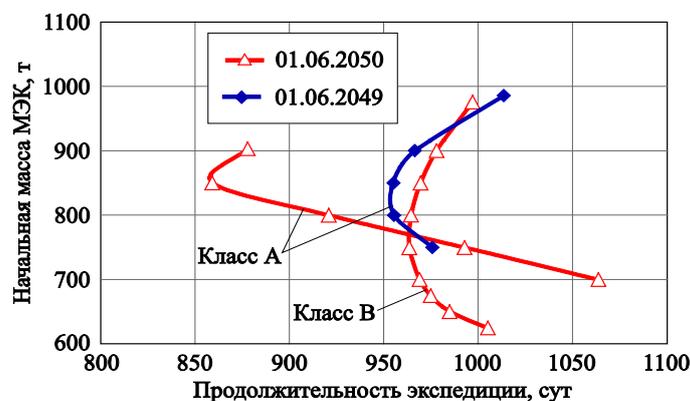


Рис. 1. Зависимость начальной массы МЭК от продолжительности марсианской экспедиции для двух дат отлета от Земли

**Эффективность использования гравитационных маневров у Земли.** Для анализа эффекта от использования гравитационных маневров рассматривались лишь траектории класса А как наиболее энергоемкие. Качественно эффект от применения гравитационных маневров у Земли и Венеры до выполнения расчетов прогнозировался в сокращении участка работы ЭРДУ для торможения (разгона) у планеты назначения и возможной ненужности дополнительного витка вокруг Солнца, связанного с недостаточной тяговооруженностью МЭК.

Результаты расчетов применительно к гравитационному маневру у Земли (схема полета Марс—Земля—Земля) показали невозможность сокращения угловой дальности полета. Более того, оптимизация момента осуществления гравитационного маневра у Земли продемонстрировала нецелесообразность его проведения (так как для всех проведенных расчетов наличие гравитационного маневра у Земли не приводит к улучшению функционала по сравнению с перелетом без гравитационного маневра). На рис. 2 представлены результаты расчетов решения краевых задач с фиксированными моментами гравитационного маневра у Земли и датой отлета от Марса, а также с непрерывной работой ЭРДУ (начальная масса МЭК принята равной 903 т, что соответствует опорному варианту с непрерывной работой ЭРДУ). Эти результаты представлены на рис. 2 в виде зависимостей продолжительности перелета возвращения и гиперболического избытка скорости от момента совершения гравитационного маневра.

Как видно на рис. 2, с ростом момента гравитационного маневра у Земли (со смещением вправо по оси ординат) продолжительность перелета и гиперболический избыток скорости в момент гравитационного маневра уменьшаются. Соответственно продолжительность перелета асимптотически стремится к продолжительности перелета без гравитационного маневра, а гиперболический избыток скорости — к нулю. Таким образом, можно говорить о нецелесообразности гравитационного маневра для данной даты отлета от Марса. Оптимизация даты отлета от Марса (в пределах выбранного синодического периода 2049–2050 гг.) также не привела к получению решения, обеспечивающего улучшение варианта без гравитационного маневра у Земли (расчеты приводили к гравитационным маневрам с нулевым избытком скорости и совпадению моментов гравитационного маневра и окончания полета).

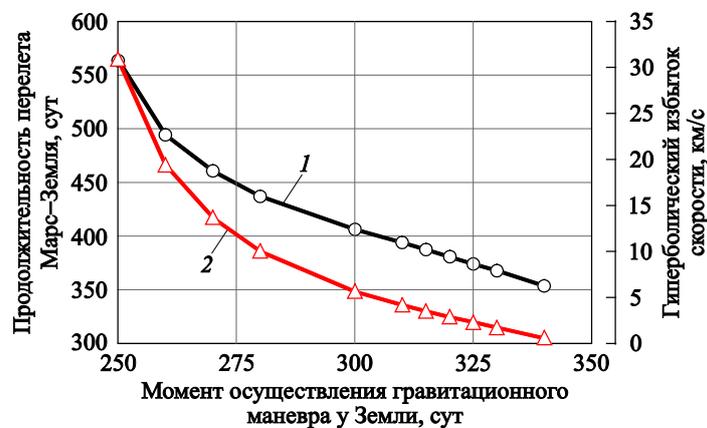
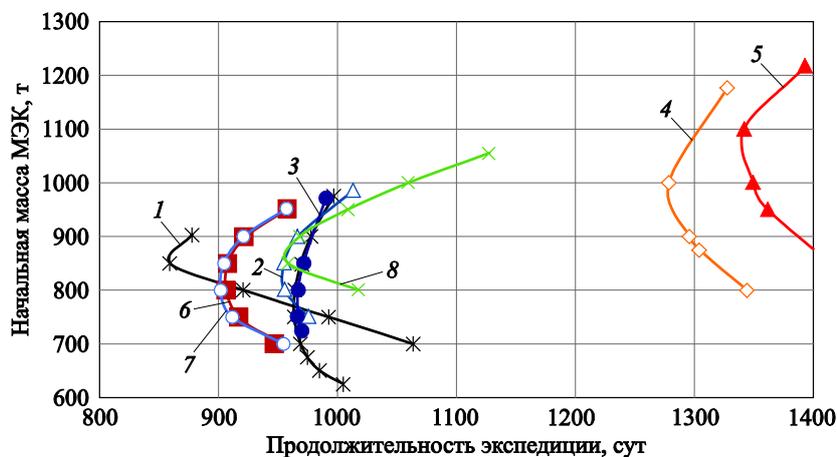


Рис. 2. Зависимости продолжительности перелета Марс—Земля (1) и гиперболического избытка скорости (2) от момента осуществления гравитационного маневра у Земли

**Эффективность использования гравитационных маневров у Венеры.** Применительно к использованию гравитационных маневров у Венеры был получен ряд семейств траекторий с гравитационными маневрами, на которых выполнялись необходимые условия оптимальности. Интересным фактом использования методики расчетов с определением оптимального радиуса перицентра (при соблюдении ограничения на высоту перицентра), а также угла  $\gamma_{гр}$  стало получение семейств экстремалей как с выходом на ограничение по высоте перицентра (большинство найденных решений), так и с радиусом перицентра пролетной гиперболы, превышающим заданное ограничение (одно семейство решений). Существенным фактором в расчетах является близость ряда полученных решений при отклонении угла  $\gamma_{гр}$  приблизительно на  $180^\circ$  (изменено направление облета Венеры). При использовании методик [11–13], где угол  $\gamma_{гр}$  не применяется, выявление различия между данными семействами экстремалей затруднено.

Показатели энергобаллистической эффективности для схемы экспедиции с гравитационным маневром у Венеры в виде зависимости начальной массы МЭК от продолжительности перелета приведены на рис. 3. Имеется существенное различие в показателях эффективности для найденных экстремалей. Часть найденных семейств (см. рис. 3, поз. 4, 5 и 8) может быть заранее отбракована, так как они не приводят к улучшению ни по одному из показателей эффективности. Семейства экстремалей 3, 7 и 6 обеспечивают сопоставимые показатели эффективности либо позволяют незначительно улучшить



**Рис. 3.** Зависимость начальной массы МЭК от продолжительности экспедиции (приведены схемы с гравитационным маневром у Венеры и без него):  
1–8 — семейства экстремалей

энергобаллистические показатели эффективности по сравнению с опорным вариантом без использования гравитационного маневра у Венеры (семейства экстремалей 1). В частности, при начальной массе МЭК 800 т продолжительность экспедиции может быть снижена (экстремаль 7) на ~2 % (~20 сут) по сравнению с классом перелета А опорного варианта (при дате отлета от Земли 01.06.2050). Максимальное снижение продолжительности экспедиции (экстремаль 7 при начальной массе МЭК 750 т) составляет ~5 % (~50 сут) по сравнению с классом перелета В опорного варианта. Следует отметить, что при продолжительности экспедиции ~920 сут начальная масса МЭК может быть уменьшена с 800 т до ~750 т (на ~6 %), а при продолжительности экспедиции ~950 сут снижение массы МЭК составляет ~80 т (на ~10 %) по сравнению с классом перелета А опорного варианта.

На рис. 3 приведены следующие схемы экспедиции:

- без гравитационных маневров, где 1 — дата отлета из сферы действия Земли 01.06.2050, классы А и В траекторий возвращения; 2 — дополнительная дата отлета 01.06.2049;

- с гравитационным маневром у Венеры (Земля—Марс, Марс—Венера—Земля), где 3 — даты отлета июнь 2050 г.;  $\gamma_{гр} \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$ ;

- с гравитационным маневром у Венеры (Земля—Венера—Марс, Марс—Земля), где 4 — даты отлета от Земли сентябрь — октябрь 2049 г.;  $\gamma_{гр} \in \left(\frac{\pi}{2}; +\frac{3\pi}{2}\right)$ ; 5 — дата отлета июнь — июль 2049 г.;

$\gamma_{гр} \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$ ; 6 — даты отлета март 2049 г.;  $\gamma_{гр} \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$ ; радиус перицентра пролетной гиперболы у Венеры 9000...12 000 км; 7 — даты отлета февраль — март 2049 г.;  $\gamma_{гр} \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$ ; 8 — даты отлета январь — март 2049 г.;  $\gamma_{гр} \in \left(\frac{\pi}{2}; +\frac{3\pi}{2}\right)$ .

Следует отметить, что значимым фактором от использования гравитационных маневров у Венеры может оказаться возможность использования дополнительных окон старта.

Проекция гелиоцентрических участков траектории марсианской экспедиции для каждого из найденных семейств экстремалей при начальной массе МЭК 800 т приведены на рис. 4–12. Выбор начальной массы МЭК 800 т для иллюстрации траекторий перелета связан с тем, что при этом значении начальной массы МЭК для всех найденных семейств экстремалей получены траектории с пассивными и активными участками. Нумерация на рис. 4–12 вариантов траекторий

аналогична при введенной на рис. 3 для найденных семейств траекторий. На рис. 4–12 полужирной линией темно-синего цвета выделены активные участки траектории (пассивные участки желтого цвета более тонкие), крестом отмечено положение гравитационного маневра.

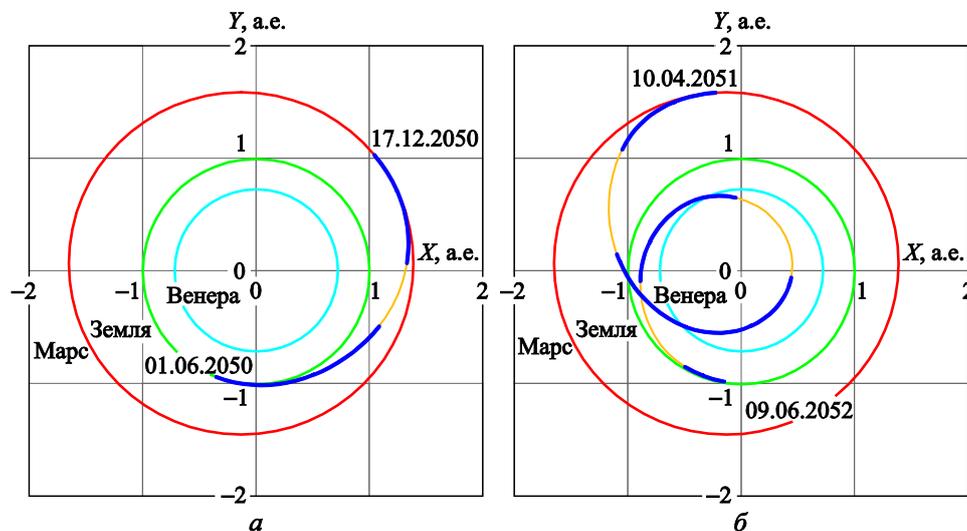


Рис. 4. Траектория № 1 (класс А, без гравитационных маневров):  
 а — Земля—Марс; б — Марс—Земля

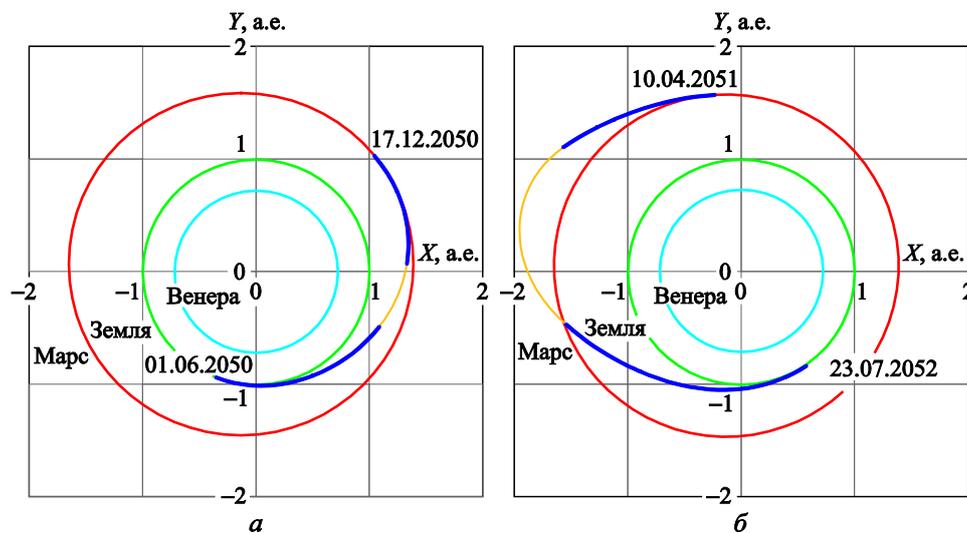


Рис. 5. Траектория № 1 (класс В, без гравитационных маневров):  
 а — Земля—Марс; б — Марс—Земля

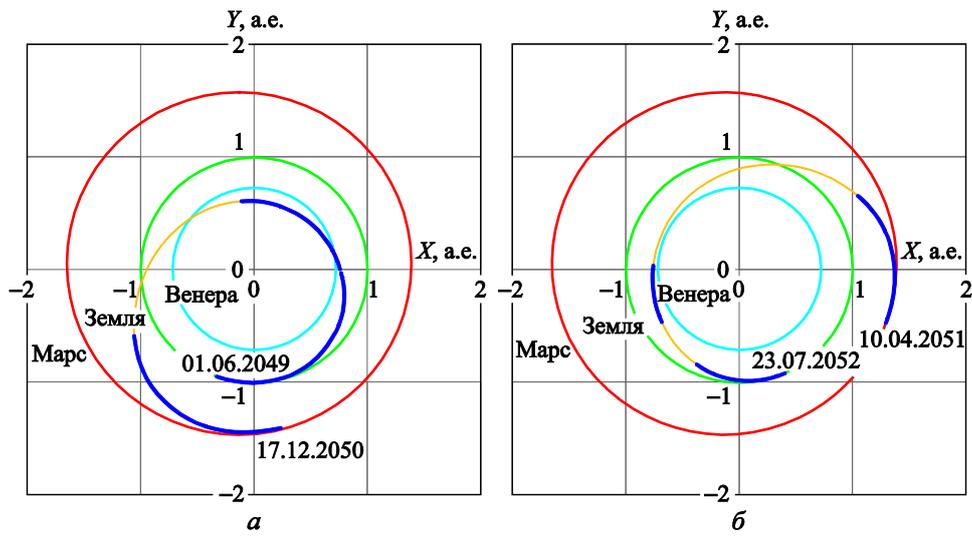


Рис. 6. Траектория № 2 (класс А, дополнительная дата отлета, без гравитационных маневров):  
 а — Земля—Марс; б — Марс—Земля

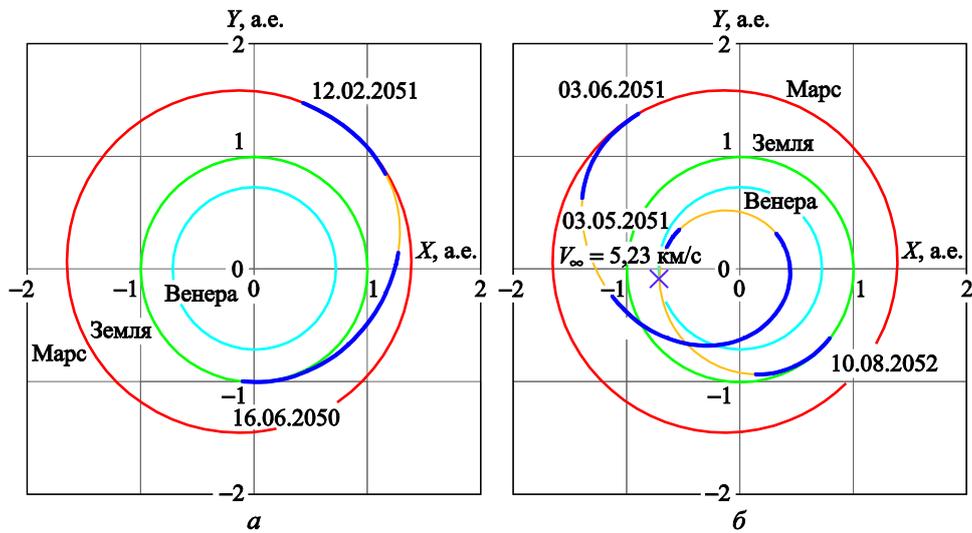
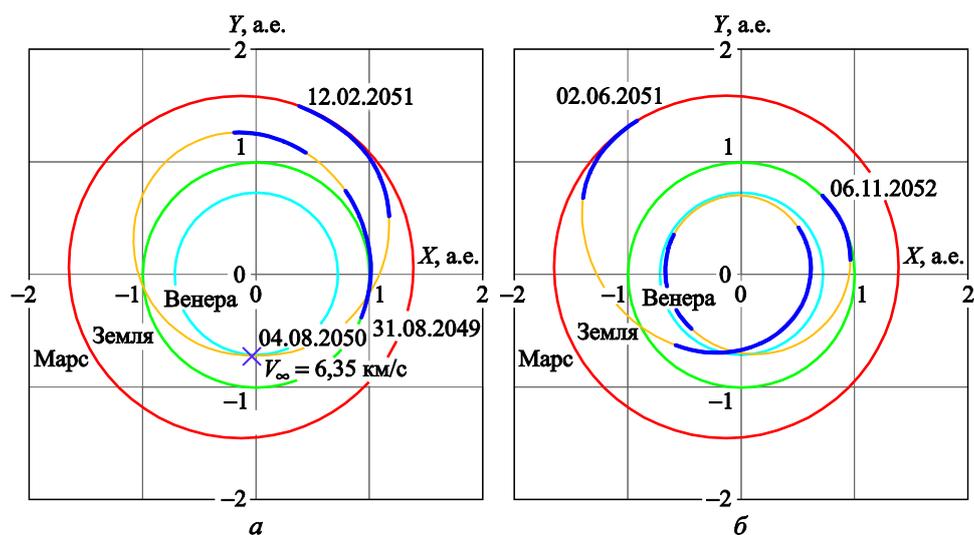
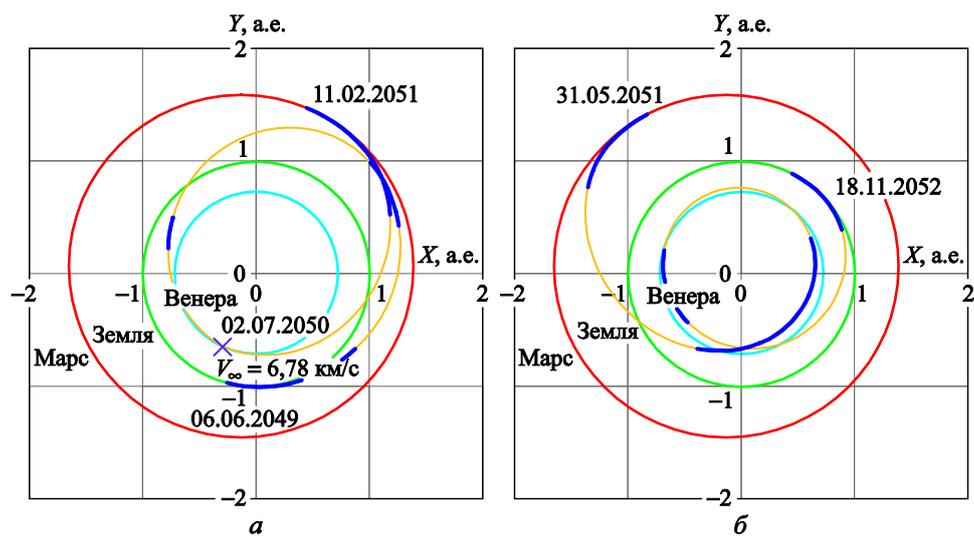


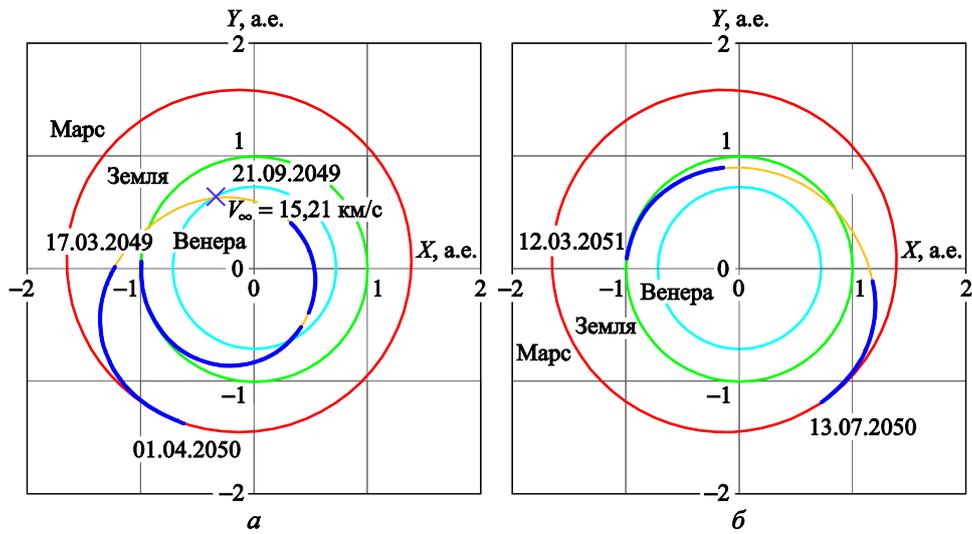
Рис. 7. Траектория № 3 (гравитационный маневр у Венеры,  $\gamma_{гр} = 17^\circ$ ):  
 а — Земля—Марс; б — Марс—Венера—Земля



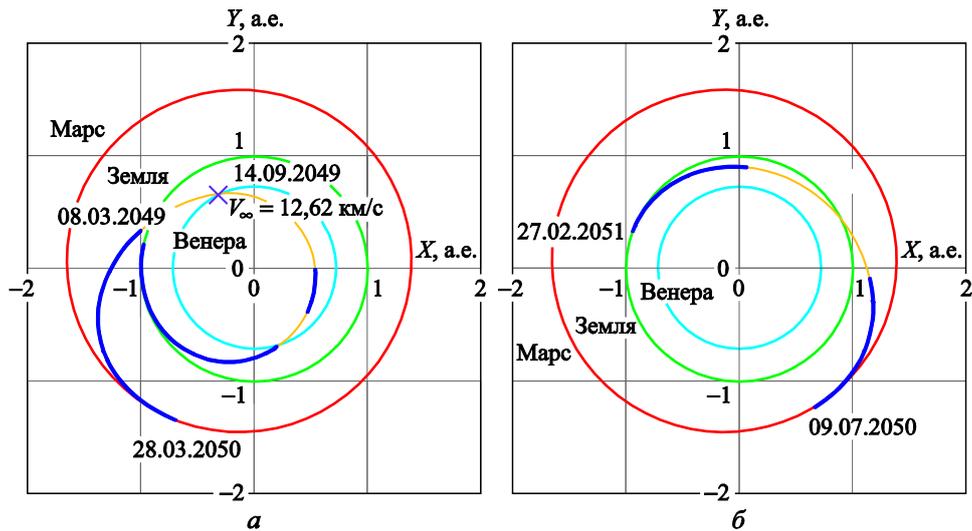
**Рис. 8.** Траектория № 4 (гравитационный маневр у Венеры,  $\gamma_{гр} = 173^\circ$ ):  
 а — Земля—Венера—Марс; б — Марс—Земля



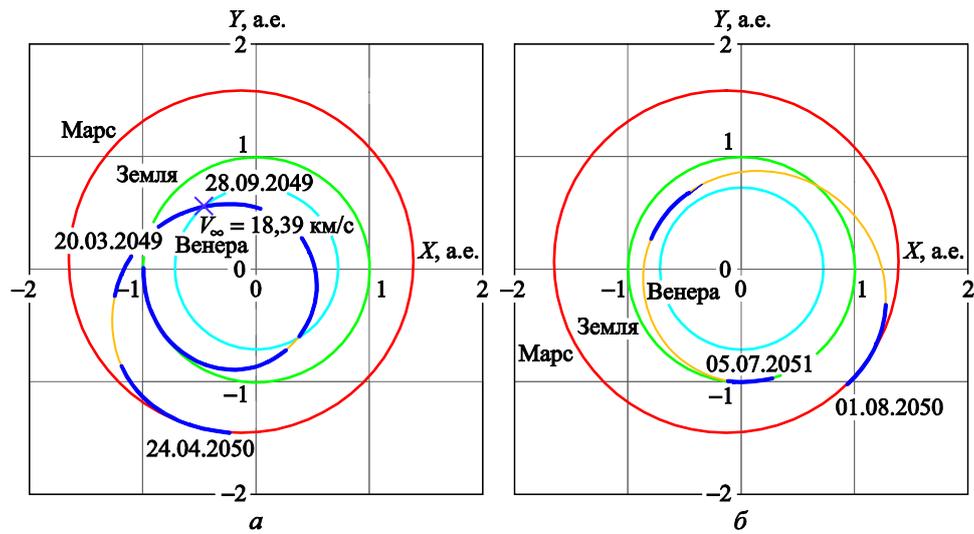
**Рис. 9.** Траектория № 5 (гравитационный маневр у Венеры,  $\gamma_{гр} = 33^\circ$ ):  
 а — Земля—Венера—Марс; б — Марс—Земля



**Рис. 10.** Траектория № 6 (гравитационный маневр у Венеры,  $\gamma_{гр} = 363^\circ$ , радиус перигея пролетной гиперболы 14 тыс. км):  
 а — Земля—Венера—Марс; б — Марс—Земля



**Рис. 11.** Траектория № 7 (гравитационный маневр у Венеры,  $\gamma_{гр} = 4^\circ$ ):  
 а — Земля—Венера—Марс; б — Марс—Земля



**Рис. 12.** Траектория № 8 (гравитационный маневр у Венеры,  $\gamma_{гр} = 182^\circ$ ):  
 а — Земля—Венера—Марс; б — Марс—Земля

Близость траекторий № 6 (перигеум пролетной гиперболы у Венеры выше ограничения по радиусу) и № 7 (перигеум на ограничении  $r_{\pi}^{\min} = 7052$  км) иллюстрируют приведенные в таблице данные.

Существенной трудностью, усложняющей оценку целесообразности использования гравитационных маневров у Венеры, является несовпадение синодических периодов систем Земля—Марс и Земля—Венера—Марс. Поэтому полученные результаты расчетов не могут быть перенесены на другой синодический период системы Земля—Марс (для каждого синодического периода системы Земля—Марс требуется проведение расчетов и анализ результатов).

**Неизвестные краевых задач и основные характеристики гелиоцентрических участков траекторий перелетов**

Экстремаль №	6	7
<i>Участок Земля—Венера—Марс</i>		
Дата отлета	17.03.2049 12:00	08.03.2049 6:39
$\Psi_r$	-0,595673	-0,888131
$\Psi_\varphi$	0,024512	0,018145
$\Psi_\theta$	0,035428	0,042146
$\Psi_{V_r}$	-0,153998	-0,231089
$\Psi_{V_\varphi}$	-0,695739	-1,081818

Окончание табл.

Экстремаль №	6	7
$\Psi_{V_\theta}$	-0,064119	-0,103620
$\Psi_m$	1	1
$\Psi_x^+$	-0,095283	-0,079476
$\Psi_y^+$	0,053596	-0,102757
$\Psi_z^+$	-0,001195	0,000071
$\Psi_{V_x^+}$	-0,013905	0,149349
$\Psi_{V_y^+}$	0,016568	0,047215
$\Psi_{V_z^+}$	-0,000774	-0,010013
$\xi_\beta$	0,742577	0
$\gamma_{гр}$ , град	2,6	3,7
$t_1$ , сут	188,0	190,5
$\beta$ , град	10,4	25,9
$r_\pi^{\min}$ , км	14 124	7052
Дата гравитационного маневра	21.09.2049	14.09.2049
$V_\infty$ , км/с	15,21	12,62
Начальная масса, кг	724 930	724 930
Конечная масса, кг	553 952	557 249
Продолжительность, сут	380	385
<i>Участок Марс—Земля</i>		
Дата отлета	13.07.2050 13:25	09.07.2050 19:13
$\Psi_r$	-9,823458	-10,471018
$\Psi_\phi$	2,345821	2,713423
$\Psi_\theta$	3,015234	1,935676
$\Psi_{V_r}$	-9,533684	-10,343899
$\Psi_{V_\phi}$	-9,375166	-9,534277
$\Psi_{V_\theta}$	1,592736	0,929030
$\Psi_m$	6,804740	5,495245
Начальная масса, кг	469 444	472 457
Конечная масса, кг	381 735	381 735
Продолжительность, сут	242	232

**Заключение.** Использование гравитационных маневров у Венеры в марсианской пилотируемой экспедиции с ЭРДУ в синодический период 2049–2050 гг. позволяет лишь незначительно улучшить проектно-баллистические показатели эффективности (максимальные возможности по улучшению — на 5 % по продолжительности экспедиции либо на 10 % по начальной массе МЭК). Однако эта мера для одного и того же состава МЭК позволяет расширить диапазоны допустимых дат отлета от Земли.

Проведенные исследования не выявили возможностей улучшения проектно-баллистических показателей эффективности за счет гравитационных маневров у Земли на этапе возвращения МЭК от Марса.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абдулхаликов Р.М., Адов А.А., Акимов В.Н. и др. *Пилотируемая экспедиция на Марс*. Коротеев А.С., ред. Москва, Российская академия космонавтики им. К.Э. Циолковского, 2006, 320 с.
- [2] Безяев И.В., Стойко С.Ф. Обзор проектов пилотируемых полетов к Марсу. *Космическая техника и технологии*, 2018, № 3 (22), с. 17–31.
- [3] Севастьянов Н.Н., Синявский В.В., Юдицкий В.Д. Концепция экспедиции на Марс в составе эскадры. *Известия РАН. Энергетика*, 2007, № 3, с. 46–56.
- [4] Константинов М.С., Лёб Х.В., Петухов В.Г., Попов Г.А. Проектно-баллистический анализ пилотируемой марсианской миссии с ядерной электроракетной двигательной установкой. *Электронный журнал «Труды МАИ»*, 2011, № 42. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24274> (дата обращения 13.05.2019).
- [5] Лебедев В.Н. *Расчет движения космического аппарата с малой тягой. Математические методы в динамике космических аппаратов. Выпуск № 5*. Москва, Вычислительный центр АН СССР, 1968, 108 с.
- [6] Федотов Г.Г. Об использовании возможностей комбинации большой и малой тяги при полетах к Марсу. *Космические исследования*, 2001, том 39, № 6, с. 613–621.
- [7] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Наука, 1983, 392 с.
- [8] Брайсон А., Юши Хо. *Прикладная теория оптимального управления*. Москва, Мир, 1972, 544 с.
- [9] Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи*. Москва, Мир, 1990, 512 с.
- [10] Питьева Е.В. и др. *Эфемериды EPM2008*. URL: <ftp://quasar.ipa.nw.ru/incoming/EPM/EPM2008> (дата обращения 13.05.2019).
- [11] Colasurdo G., Casalino L., Pastrone D. Optimization of  $\Delta V$  Earth-Gravity-Assist Trajectories. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, November–December 1998, vol. 21, no. 6, pp. 991–995.
- [12] Casalino L., Colasurdo G., Pastrone D. Optimal Low-Thrust Escape Trajectories Using Gravity Assist. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, September–October 1999, vol. 22, no. 5, pp. 637–642.
- [13] Федотов Г.Г. Оптимизация траекторий полета КА с ЭРД при использовании гравитационного маневра. *Космические исследования*, 2004, том 42, № 4, с. 404–413.

- [14] Konstantinov M.S., Thein M. Method of Interplanetary Trajectory Optimization for the Spacecraft with Low Thrust and Swing-bys. *Acta Astronautica*, 136 (2017), pp. 297–311.
- [15] Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М. *Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелетов*. Москва, МАИ, 2015, 260 с.
- [16] Орлов А.А. *Оптимизация сложных схем перелета КА с электроракетными двигателями при граничных условиях смешанного типа*. Дис. ... канд. техн. наук. Москва, МАИ, 2018, 155 с.
- [17] Marec J.P. *Optimal Space Trajectories*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1979.
- [18] Синицын А.А. Баллистические варианты пилотируемой экспедиции на Марс с ядерной электроракетной двигательной установкой. *Космическая техника и технологии*, 2016, № 4 (15), с. 80–90.

Статья поступила в редакцию 15.05.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Синицын А.А. Гравитационные маневры при осуществлении марсианской пилотируемой экспедиции с электроракетной двигательной установкой. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 8.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-8-1912>

**Синицын Алексей Андреевич** — канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша». e-mail: [Sinitsin@KeRC.msk.ru](mailto:Sinitsin@KeRC.msk.ru)

## Gravity-assist maneuvers in implementation of Martian manned expedition with an electric rocket propulsion

© A.A. Sinitsin

Keldysh Research Center, Moscow, 125438, Russia

*The paper focuses on the analysis of energy-ballistic efficiency of gravity-assist maneuvers in the implementation of the Martian manned expedition in the period 2049–2050. The purpose of this analysis was to identify the opportunities for improving the energy-ballistic performance indicators of the Martian manned expedition through gravity-assist maneuvers around the Earth and Venus. The methodical approach to calculating the main energy-ballistic indicators of the Martian manned expedition is based on dividing the flight trajectory into sections. To determine the main characteristics of these sections, the statement corresponding to the restricted two-body problem was used. The heliocentric trajectory sections were optimized using the Pontryagin maximum principle. The families of solutions with a gravity-assist maneuver near Venus were obtained, differing in the direction of the flyby of Venus and the height of the flight orbit pericenter. The research shows the existence of extremals close in characteristics, which are with the fly-by orbit pericenter altitude restriction and without it. A comparison was made in terms of the duration of the expedition and the initial mass with solutions without a gravity-assist maneuver.*

**Keywords:** *Martian manned expedition, electric propulsion system, gravity-assist maneuvers, optimization of interplanetary trajectories, multi-extremality, expedition duration, initial mass of Martian expedition complex*

### REFERENCES

- [1] Abdulkhalikov R.M., Adov A.A., Akimov V.N., et al. *Pilotiruemaya ekspeditsiya na Mars* [Martian manned expedition]. Koroteev A.S. ed. Moscow, Tsolkovsky Russian Academy of Cosmonautics Publ., 2006, 320 p.
- [2] Bezyaev I.V., Stoyko S.F. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii — Space Engineering and Technology*, 2018, no. 3 (22), pp. 17–31.
- [3] Sevastyanov N.N., Sinyavskiy V.V., Yuditskiy V.D. *Izvestiya RAN. Energetika — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2007, no. 3, pp. 46–56.
- [4] Konstantinov M.S., Leb Kh.V., Petukhov V.G., Popov G.A. *Trudy MAI (Proceedings of MAI)*, 2011, no. 42. Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24274> (accessed May 13, 2019).
- [5] Lebedev V.N. *Raschet dvizheniya kosmicheskogo apparata s maloy tyagoy. Matematicheskie metody v dinamike kosmicheskikh apparatov. Vypusk no. 5* [Calculation of low trust spacecraft motion. Mathematical methods in the spacecraft dynamics. No. 5.], Moscow, Computing Center of the Academy of Sciences of the USSR, 1968, 108 p.
- [6] Fedotov G.G. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2001, vol. 39, no. 6, pp. 613–621.
- [7] Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 392 p.

- [8] Bryson Jr A.E., Yu-Chi Ho. *Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control*. Waltham, Massachusetts, Toronto, London, 1969. [In Russ.: Bryson Jr A.E., Yu-Chi Ho. *Prikladnaya teoriya optimalnogo upravleniya*. Moscow, Mir Publ., 1972, 544 p.]
- [9] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations, Nonstiff Problems*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1987, 528 p. [In Russ.: Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Reshenie obyknovennykh differentsialnykh uravneniy. Nezhestkie zadachi*. Moscow, Mir Publ., 1990, 512 p.]
- [10] Piteva E.V., et al. *Efemeridy EPM2008* [Ephemeris EPM2008]. Available at: <ftp://quasar.ipa.nw.ru/incoming/EPM/EPM2008> (accessed May 13, 2019).
- [11] Colasurdo G., Casalino L., Pastrone D. Optimization of  $\Delta V$  Earth-Gravity-Assist Trajectories. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, November–December 1998, vol. 21, no. 6, pp. 991–995.
- [12] Casalino L., Colasurdo G., Pastrone D. Optimal Low-Thrust Escape Trajectories Using Gravity Assist. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, September–October 1999, vol. 22, no. 5, pp. 637–642.
- [13] Fedotov G.G. *Kosmicheskie issledovaniya* — *Cosmic Research*, 2004, vol. 42, no. 4, pp. 404–413.
- [14] Konstantinov M.S., Thein M. Method of interplanetary trajectory optimization for the spacecraft with low thrust and swing-bys. *Acta Astronautica*, 136 (2017), pp. 297–311.
- [15] Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Thein M. *Optimizatsiya traektorii geliotsentricheskikh pereletov* [Optimization of trajectories of heliocentric flights]. Moscow, MAI Publ., 2015, 260 p.
- [16] Orlov A.A. *Optimizatsiya slozhnykh skhem pereleta KA s elektroraketnymi dvigatelyami pri granichnykh usloviyakh smeshannogo tipa*. Diss. ... kand. tekhn. nauk [Optimization of complex flight patterns of spacecraft with electric propulsion under mixed boundary conditions. Cand. eng. sc. diss.]. Moscow, MAI Publ., 2018, 155 p.
- [17] Marec J.P. *Optimal Space Trajectories*. Elsevier Scientific Publ., 1979.
- [18] Sinitsyn A.A. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii* — *Space Engineering and Technology*, 2016, no. 4 (15), pp. 80–90.

**Sinitsin A.A.**, Cand. Sc. (Eng.), Leading Researcher, Keldysh Research Center.  
e-mail: [Sinitsin@KeRC.msk.ru](mailto:Sinitsin@KeRC.msk.ru)