

Нормальные колебания жидкости, вытекающей из вращающегося бака

© В.В. Орлов, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Выполнен анализ колебаний жидкости, полностью или частично заполняющей топливный бак и вращающейся вокруг продольной оси ракеты-носителя. Актуальность проблематики обусловлена необходимостью оценки влияния внутрибаковых устройств (измерительных, заборных, демпфирующих и других устройств) на колебания жидкого топлива. Приведены постановки задач о движении несжимаемой вращающейся жидкости, вытекающей из осесимметричного бака произвольной формы через заборное устройство, и выполнено подробное исследование для топливного отсека в виде цилиндра как наиболее распространенного на практике. Представлены решения задач о нормальных (собственных) колебаниях жидкости с граничными условиями на свободной поверхности и поверхности с сопротивлением — поверхности слива заборного устройства.

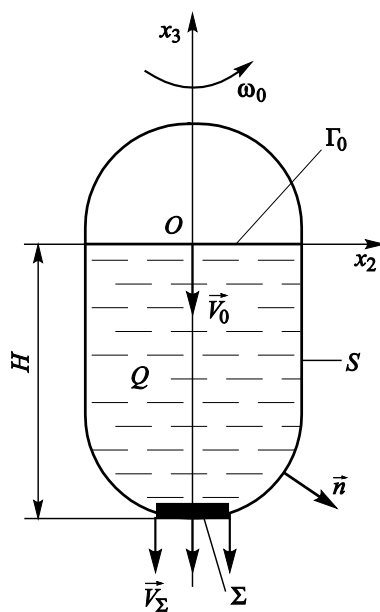
Ключевые слова: нормальные колебания, заборное устройство, топливный отсек, дискретный спектр, функция Бесселя

Введение. Впервые исследование колебаний жидкости с учетом ее вытекания было предложено В.В. Кирилловым [1] и продолжено в работах [2–4]. В упомянутых работах рассматривались задачи для жидкости, занимающей часть цилиндрического бака, с учетом кинематического условия вытекания через дно. В трудах других авторов [5–7] приведена постановка модельной задачи о малых движениях идеальной несжимаемой жидкости, вытекающей из топливного бака с заборными устройствами, а также решения задач для цилиндрических и конических баков. В этих работах заборное устройство представлялось в виде бесконечно тонкой пластинки с отверстиями, называемой поверхностью слива заборного устройства или для краткости — поверхностью слива.

Исследование этих задач показало, что спектр нормальных движений несжимаемой жидкости обладает двумя ветвями собственных значений: дискретным множеством действительных чисел, расположенных на положительной части вещественной оси, и дискретным множеством комплексно-сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси. Действительным собственным значениям отвечают апериодические режимы движения жидкости, происходящие преимущественно вблизи дна топливного отсека, а комплексно-сопряженным числам — режимы затухающих колебаний, происходящие в основном на свободной поверхности жидкости. Цель настоящей работы — исследовать нормальные

колебания идеальной несжимаемой вращающейся жидкости, вытекающей из топливного отсека через заборное устройство.

Постановка задачи. Пусть идеальная несжимаемая жидкость заполняет осесимметричный топливный бак с неплоским дном на глубину H и в установившемся движении вращается вместе с ним вокруг оси Ox_3 с постоянной угловой скоростью ω_0 (рисунок), вытекая через поверхность слива Σ заборного устройства со скоростью \vec{V}_Σ . Обозначим через Q область, занимаемую жидкостью, через S твердую боковую стенку, через Γ_0 невозмущенную свободную поверхность. Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой связаны с невозмущенной свободной поверхностью, т. е. вращаются с постоянной угловой скоростью ω_0 и перемещаются вместе с ней с постоянной скоростью \vec{V}_0 .



Вращающийся топливный отсек
с заборным устройством

Рассмотрим задачу о малых движениях жидкости, близких к установившемуся движению. Будем считать, что за характерное время исследуемых движений область, занимаемая жидкостью, не успевает существенно измениться. Тогда для определения поля скоростей $v = v(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ частиц жидкости относительно установившегося движения имеем следующую задачу, записанную в неинерциальной подвижной системе отсчета:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\omega_0(\vec{v} \times \vec{k}) = -\nabla p; & (1) \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ в } Q; & (2) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla p_0 \cdot \vec{v} = 0 \text{ на } \Gamma_0; & (3) \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } S; & (4) \\ p = \gamma \vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma \text{ на } \Sigma; & (5) \\ \vec{v}(x, 0) = \vec{v}^0(x), & (6) \end{cases}$$

где k — единичный вектор оси Ox_3 ; ∇ — оператор «набла»; $p = p'/\rho$ — модифицированное давление (p' — отклонение давления от равновесного значения $p_0 \left(p_0 = \frac{1}{2} \omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3 + C \right)$, ρ — плотность жидкости); \vec{n} , \vec{n}_Σ — нормали к поверхностям S, Σ соответственно; $\gamma = \xi V_\Sigma$ — обобщенный коэффициент сопротивления (ξ — коэффициент сопротивления поверхности слива).

Условие на поверхности слива, полученное на основе линеаризации уравнения Бернулли для перепада давления на поверхности слива, используется при расчете динамических характеристик топливных магистралей [8].

Исключая переменную \vec{v} , систему уравнений (1)–(6), записанную в подвижной системе отсчета, можно привести к эволюционной задаче, записанной в неинерциальной цилиндрической системе координат (r, η, x, t) относительно одной переменной — $p(r, \eta, x, t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\partial r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \text{ в } Q; & (7) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{|\nabla p_0|} \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\nabla p \cdot \nabla p_0}{|\nabla p_0|} \right) - \frac{1}{|\nabla p_0|} 4\omega_0^2 \left(-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) = \\ = -2\omega_0 \frac{1}{|\nabla p_0|} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial \eta} \text{ на } \Gamma_0; & (8) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p}{\partial n} + 4\omega_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} n_x - 2\omega_0 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial \eta} = 0 \text{ на } S; & (9) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p}{\partial n} + 4\omega_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} n_x - 2\omega_0 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial \eta} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + 4\omega_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) \text{ на } \Sigma; & (10) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} p(x, 0) = p^0; \quad \frac{\partial p(x, 0)}{\partial t} = p_1^0; \quad \frac{\partial^2 p(x, 0)}{\partial t^2} = p_2^0; \quad \frac{\partial^3 p(x, 0)}{\partial t^3} = p_3^0. & (11) \end{aligned} \right.$$

При значении коэффициента сопротивления $\gamma = \infty$ (отсутствие слива) задача (7)–(11) представляет собой задачу о движениях вращающейся жидкости, частично заполняющей осесимметричную емкость, изученную в работах [9–15].

Нормальные колебания при отсутствии свободной поверхности. Рассмотрим сначала задачу о собственных движениях жидкости при отсутствии свободной поверхности. Найдем функцию $p(r, \eta, x, t)$ в виде суммы бегущих волн, т. е. положим $p(r, \eta, x, t) = \sum P(r, x) e^{im\eta - \Omega t}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где Ω — комплексный коэффициент затухания волновых движений жидкости.

При отсутствии свободной поверхности (условие (8) заменяется на условие $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ на Γ_0) из системы уравнений (7)–(10) для каждого заданного числа m получим спектральную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \text{ в } Q; \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \text{ на } \Gamma_0; \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^2 \frac{\partial P}{\partial n} + 4\omega_0^2 \frac{\partial P}{\partial x} n_x - 2\omega_0 \Omega i \frac{m}{r} P = 0 \text{ на } S; \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^2 \frac{\partial P}{\partial n} + 4\omega_0^2 \frac{\partial P}{\partial x} n_x - 2\Omega \omega_0 \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{1}{r} \Omega (\Omega^2 + 4\omega_0^2) P \text{ на } \Sigma, \end{array} \right. \quad (15)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если поверхность слива плоская, граничное условие (15) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \Omega \frac{1}{\gamma} P = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (16)$$

Если положить $\text{Im } \Omega > 0$, то число $m < 0$ будет отвечать прямым волнам, бегущим в сторону вращения жидкости, а число $m > 0$ — обратным волнам. При $m = 0$ имеем случай стоячих волн.

Если функция $P(r, x)$ известна, то компоненты вектора скорости могут быть определены из выражения

$$\vec{v}(r, x) = \frac{1}{\Omega^2 + 4\omega_0^2} L \nabla P(r, x), \quad (17)$$

где линейное преобразование L задается формулой

$$L = \begin{pmatrix} \Omega & -2\omega_0 & 0 \\ 2\omega_0 & \Omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Omega^2 + 4\omega_0^2}{\Omega} \end{pmatrix},$$

а векторный оператор ∇ имеет вид

$$\nabla P(r, x) = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r + i \frac{mP}{r} \vec{e}_\eta + \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x.$$

Пусть R_0 — характерный размер. Введем безразмерные параметры $\zeta, \xi, \lambda, \bar{\gamma}$ с помощью соотношений:

$$\zeta = \mu R_0; \quad \xi = k R_0; \quad \lambda = \frac{\Omega}{2\omega_0}; \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{2\omega_0}, \quad (18)$$

где μ, k — размерные волновые числа, а безразмерные параметры ζ и ξ связаны с собственным числом λ спектральной задачи (12)–(15) формулой

$$\lambda^2 = \frac{\zeta^2}{\xi^2 - \zeta^2}.$$

Для цилиндрического бака радиусом R_0 с плоской поверхностью слива решением задачи (12)–(14), (16), удовлетворяющим ограниченности в нуле, будет, например, функция $P(r, x) = CJ_m\left(\xi \frac{r}{R_0}\right) \text{ch}\left(\zeta \frac{x}{R_0}\right)$ (где J_m — функция Бесселя первого рода m -го порядка), подставив которую в граничные условия (14), (16) на боковой поверхности S и на поверхности слива Σ , получим систему характеристических уравнений для определения безразмерных волновых чисел ζ и ξ :

$$\begin{cases} \bar{\gamma} \text{th}(\zeta \bar{H}) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}}; \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \frac{J_{m-1}(\xi)}{J_m(\xi)} = \frac{m}{\xi} \left(1 + \frac{i\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}}{\xi} \right), \end{cases} \quad (20)$$

где $\bar{H} = \frac{H}{R_0}$.

Систему трансцендентных уравнений (19), (20) при заданных величинах $\bar{\gamma}$ и \bar{H} будем исследовать для различных чисел $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, определяющих моды колебаний рассматриваемой гидромеханической системы.

Под модой колебаний m -го порядка будем понимать совокупность безразмерных волновых чисел ξ , ζ и собственного числа λ вместе с относящимися к ним собственными и присоединенными функциями.

Из приведенных трансцендентных уравнений (19), (20) следует, что в случае стоячих волн ($m = 0$) достаточно рассмотреть трансцендентное уравнение (19):

$$\operatorname{th}(\zeta \bar{H}) = \frac{\sigma}{\sqrt{\xi_{0n}^2 - \zeta^2}}, \quad \xi_{0n} \in \mathbb{R}, \quad \sigma = 1/\bar{\gamma}, \quad (21)$$

где \mathbb{R} — дискретное положительное множество чисел $\{\xi_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ с единственной предельной точкой на бесконечности и асимптотическим поведением чисел ξ_{0n} [16]:

$$\xi_{0n} \sim \frac{\pi}{4} + \pi n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь и далее O и o — символы Ландау. Используя графические решения, можно показать, что уравнение (21) при задании \bar{H} , σ , ξ_{0n} имеет два вещественных корня $\zeta_{0,n,-1}$ и $\zeta_{0,n,-2}$, если кривые пересекаются, и бесконечное множество комплексно-сопряженных корней ($l = 1, 2, 3, \dots$), если пересечение отсутствует [17].

Пусть n фиксировано ($\xi_{0n} = \text{const}$). При больших значениях l решение уравнения (21) имеет вид

$$\zeta_{0nl} = i \frac{\pi l}{\bar{H}} \left(1 - \frac{\bar{H}}{\bar{\gamma} \pi^2 l^2} \right) + o(l^{-5}) + \frac{1}{\bar{\gamma} l \pi} + io(l^{-5}), \quad l \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Пусть теперь l фиксировано ($l = -1, l = -2$). Из графического решения уравнения (19) тогда следует, что при $n \rightarrow \infty$ ($\xi_{0n} \rightarrow \infty$) корень $\zeta_{0,n,-1}$ стремится к ξ_{0n} , а корень $\zeta_{0,n,-2}$ — к нулю. Поэтому значения $\zeta_{0,n,-1}$, $\zeta_{0,n,-2}$ при $n \rightarrow \infty$ получим в виде

$$\zeta_{0,n,-1} = \xi_{0n} - \frac{\sigma^2}{2\xi_{0n}} + o\left(\xi_{0n}^{-2}\right), \quad n \rightarrow \infty; \quad (23)$$

$$\zeta_{0,n,-2} = \frac{\sigma}{H\xi_{0n}} + o\left(\xi_{0n}^{-3}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

При известных значениях ζ_{0nl} и ξ_{0n} собственные числа λ_{0nl} , а следовательно, и комплексный коэффициент затухания Ω исходной спектральной задачи (12)–(14), (16) могут быть определены по формулам:

$$\lambda_{0nl} = \sqrt{\frac{\zeta_{0nl}^2}{\zeta_{0nl}^2 - \xi_{0n}^2}}; \quad \Omega_{0nl} = 2\lambda_{0nl}\omega_0, \quad l = -2, -1, 1, 2, 3, \dots; \quad (25)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

которым отвечают волны с максимальной амплитудой на поверхности слива:

$$W_{0,n,-1}(r, x) = C_{0nl} J_0 \left(\xi_{0n} \frac{r}{R_0} \right) \text{sh} \left[\left(\xi_{0n} - \frac{\sigma^2}{2\xi_{0n}} + o(\xi_{0n}^{-2}) \right) \frac{x}{R_0} \right], \quad l = -1;$$

$$W_{0,n,-2}(r, x) = C_{0nl} J_0 \left(\xi_{0n} \frac{r}{R_0} \right) \text{sh} \left[\left(\frac{\sigma}{H\xi_{0n}} + o(\xi_{0n}^{-3}) \right) \frac{x}{R_0} \right], \quad l = -2,$$

где W_{0nl} — вертикальная компонента скорости; C_{0nl} — константа, выбираемая из условий нормирования.

Собственным числам λ_{0nl} ($l = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$), найденным по формуле (25), отвечают волновые движения во вращающейся жидкости с максимальной интенсивностью в глубине жидкости, т. е. внутренние волны. Для подтверждения этого воспользуемся асимптотическим выражением (22) для волновых чисел ζ_{0nl} , которые можно представить в виде $\zeta_{0nl} = \zeta^{(r)} + i\zeta^{(i)}$ ($l \rightarrow \infty, n$ — фиксировано $\zeta^{(r)} \ll \zeta^{(i)}$), где $\zeta^{(r)}, \zeta^{(i)}$ — действительная и мнимая части комплексного числа. Подставив значение ζ_{0nl} в выражение для вертикальной компоненты скорости, получим

$$W_{0,n,l}(r, x) = C_{0nl} J_0 \left(\xi_{0n} \frac{r}{R_0} \right) \text{sh} \left[\left(\zeta^{(r)} + i\zeta^{(i)} \right) \frac{x}{R_0} \right], \quad -H \leq x \leq 0.$$

В случае неосесимметричных колебаний ($m = 1$) систему трансцендентных уравнений (17), (18) можно свести к одному трансцендентному:

$$F(\zeta) = \frac{J_2 \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\text{th}^2(\zeta\bar{H})} + \zeta^2} \right)}{J_1 \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\text{th}^2(\zeta\bar{H})} + \zeta^2} \right)} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\text{th}^2(\zeta\bar{H})} + \zeta^2}} \left(\frac{i\sigma}{\zeta \text{th}(\zeta\bar{H})} - 1 \right) = 0. \quad (26)$$

В отличие от случая $m=0$, в котором n было фиксировано, числа ξ находились независимо и комплексные корни ζ_{0nl} , определяемые из формулы (21), формировались вблизи мнимой оси, при $m=1$ параметры ξ вычисляются после нахождения чисел ζ по формуле

$$\xi = \sqrt{\frac{\sigma^2}{th^2(\zeta\bar{H})} + \zeta^2}.$$

Можно показать, что в данном случае имеется бесконечное множество комплексных корней $\{\xi_{1nl}\}_{l=1, n=1}^{\infty}$, $\{\zeta_{1nl}\}_{l=1, n=1}^{\infty}$. Последние формируются как вдоль мнимой, так и вдоль действительной осей комплексной плоскости ζ . Численные исследования решений при $m=1$ показывают, что и в этом случае возможно существование как внутренних волн, так и волн слива.

Проведенное исследование при отсутствии свободной поверхности показало, что совокупность нормальных колебаний состоит из внутренних волн и волн слива. Внутренние волны характерны для вращающейся жидкости и образуются во всем ее объеме. Волны слива образуются на поверхности слива, они экспоненциально затухают в глубь жидкости.

Медленное вращение жидкости со свободной поверхностью.

Пусть скорость вращения такова, что свободная поверхность Γ_0

остается почти плоской $\left(\varepsilon = 2\omega_0 \sqrt{\frac{R_0}{g}} \ll 1 \right)$. Тогда для невозму-

щенного давления p_0 вместо выражения $p_0 = \frac{g}{R_0} \left(\frac{1}{8} \varepsilon^2 r^2 - x_3 \right) + C$

можно использовать выражение $p_0 = -gx_3 + C$ и, соответственно, $|\nabla p_0| = g$. С учетом этого допущения соотношение (8) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) + 4\omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (27)$$

Сформулируем задачу о собственных движениях жидкости. Решение задачи (7), (9), (10) с граничным условием (27) на свободной поверхности будем искать также в виде бегущих волн $p(r, \eta, x, t) = P(r, x) e^{im\eta - \Omega t}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда вместо системы (12)–(14) для каждого заданного числа m получим спектральную задачу:

$$\Omega^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \text{ в } Q; \quad (28)$$

$$\left(\Omega^2 P + g \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (29)$$

$$\Omega^2 \frac{\partial P}{\partial n} + 4\omega_0^2 \frac{\partial P}{\partial x} n_x - 2\omega_0 \Omega i \frac{m}{r} P = 0 \text{ на } S, \quad (30)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \Omega \frac{1}{\gamma} P = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (31)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть R_0 — характерный размер. Введем безразмерные параметры $\zeta, \xi, \lambda, \bar{\gamma}, \varepsilon$ с помощью соотношений:

$$\zeta = \mu R_0; \quad \xi = k R_0; \quad \lambda = \Omega \sqrt{\frac{R_0}{g}}; \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{g R_0}}; \quad \varepsilon = 2\omega_0 \sqrt{\frac{R_0}{g}}, \quad (32)$$

где безразмерные параметры ζ и ξ характеризуют движения жидкости соответственно в осевом и радиальном направлениях и связаны с собственным числом λ спектральной задачи (28)–(31) формулой

$$\lambda = \frac{\varepsilon \zeta}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}}. \quad (33)$$

Отметим, что, используя (33), задачу (28)–(31) можно переписать в другом виде для определения любых двух параметров из трех неизвестных ζ, ξ, λ .

Решением уравнения (28) в случае цилиндрического бака будет функция

$$P(x, r) = \left(\xi \frac{r}{R_0} \right) \left(C_1 \operatorname{ch} \zeta \frac{x}{R_0} + C_2 \operatorname{sh} \zeta \frac{x}{R_0} \right) J_m.$$

Подставив указанную функцию в граничные условия (29)–(31) на свободной поверхности Γ_0 , боковой поверхности S и на поверхности слива Σ , получим систему трансцендентных уравнений для определения безразмерных волновых чисел λ, ζ и ξ :

$$\bar{\gamma} - \frac{1}{\lambda} + \left(-\frac{\lambda}{\zeta} + \frac{\zeta}{\lambda^2} \bar{\gamma} \right) \operatorname{th} \left(\zeta \frac{H}{R_0} \right) = 0; \quad (34)$$

$$\frac{J_{m-1}(\xi)}{J_m(\xi)} = \frac{m}{\xi} \left(1 + i \frac{\varepsilon}{\lambda} \right); \quad (35)$$

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon^2 \zeta^2}{\xi^2 - \zeta^2}. \quad (36)$$

Численное исследование трансцендентных уравнений (34)–(36) показало, что при наличии свободной поверхности и медленном вращении жидкости к совокупности нормальных колебаний жидкости относятся три типа волновых движений: волны слива, внутренние и поверхностные волны.

Быстрое вращение жидкости со свободной поверхностью. Рассмотрим теперь случай быстрого вращения, который реализуется либо когда величина центробежного ускорения значительно больше ускорения свободного падения ($\omega_0^2 R_0 \gg g; \epsilon \gg 1$), либо при вращении с любой угловой скоростью в условиях невесомости [18]. Сделаем допущение, что при этом свободная поверхность жидкости принимает форму цилиндра радиусом r'_0 ($r'_0 = r_0 R_0$), симметрично расположенного по отношению к боковой поверхности осесимметричного сосуда между плоскостями $x = 0$ и $x = -H$, которые являются поверхностью крышки и поверхностью слива соответственно.

В случае быстрого вращения граничное условие (8) на свободной поверхности преобразуется к виду

$$\frac{1}{|\nabla p_0|} \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{1}{|\nabla p_0|} 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -2\omega_0 \frac{1}{|\nabla p_0|} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial \eta}. \quad (37)$$

Рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости. Будем искать решение задачи (7), (9), (10) с граничным условием (37) на свободной поверхности в виде бегущих волн $p(r, \eta, x, t) = P(r, x)e^{im\eta - \Omega t}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда для определения собственного параметра Ω и собственных функций P_{mnl} для каждого заданного числа m получим краевую задачу

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 & \quad \text{в } Q; \end{aligned} \right. \quad (38)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r_0} \frac{\Omega^2 + 4\omega_0^2}{\omega_0^2} P + \frac{2\omega_0}{\Omega} \frac{im}{r_0} P & \quad \text{на } \Gamma_0; \end{aligned} \right. \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega^2 \frac{\partial P}{\partial n} + 4\omega_0^2 \frac{\partial P}{\partial x} n_x - 2\omega_0 \Omega i \frac{m}{r} P = 0 & \quad \text{на } S; \end{aligned} \right. \quad (40)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \Omega \frac{1}{\gamma} P = 0 & \quad \text{на } \Sigma; \end{aligned} \right. \quad (41)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 & \quad \text{на } \Sigma_0, \end{aligned} \right. \quad (42)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Решение уравнения (38), удовлетворяющее граничным условиям, может быть записано в виде

$$P(r, x) = [AJ_m(\xi\bar{r}) + BY_m(\xi\bar{r})]C\text{ch}\left(\zeta\frac{x}{R_0}\right), \quad (43)$$

где A, B, C — некоторые константы; $Y_m(\xi\bar{r})$ — функция Бесселя второго рода m -го порядка.

Подставим функцию $P(r, x)$ в граничные условия на свободной поверхности и на боковой поверхности и введем безразмерные параметры $\zeta, \xi, \lambda, \bar{\gamma}$:

$$\zeta = \mu R_0, \quad \xi = kR_0, \quad \lambda = \frac{\Omega}{2\omega_0}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{2\omega_0}.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, получим трансцендентные уравнения для определения волновых чисел ξ, ζ и собственного числа λ в виде системы уравнений относительно коэффициентов A, B :

$$a_{11}A + a_{12}B = 0; \quad a_{21}A + a_{22}B = 0. \quad (44)$$

Определитель этой системы должен быть равен нулю:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (45)$$

Здесь

$$a_{11} = \xi J'_m(\xi) - \frac{im}{\lambda} J_m(\xi); \quad (46)$$

$$a_{12} = \xi Y'_m(\xi) - \frac{im}{\lambda} Y_m(\xi); \quad (47)$$

$$a_{21} = \xi R_0 J'_m(\xi r_0) + \psi_2(m, \lambda) J_m(\xi r_0); \quad (48)$$

$$a_{22} = \xi R_0 Y'_m(\xi r_0) + \psi_2(m, \lambda) Y_m(\xi r_0); \quad (49)$$

$$\psi_2(m, \lambda) = -4(1 + \lambda^2) - \frac{im}{\lambda}. \quad (50)$$

Раскрыв выражения для производных от функций Бесселя и приняв во внимание граничное условие на дне, получим систему трансцендентных уравнений для определения волновых чисел ξ, ζ и собственного числа λ :

$$\left\{ \begin{aligned} D_m(\xi) - \frac{4(\lambda^2 + 1)}{r_0} E_m(\xi) &= 0; \end{aligned} \right. \quad (51)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= \bar{\gamma} \zeta \text{th}(\zeta \bar{H}); \end{aligned} \right. \quad (52)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{\zeta^2}{\xi^2 - \zeta^2}, \end{aligned} \right. \quad (53)$$

где

$$D_m(\xi) = D_m(J_m, 1)D_m(Y_m, r_0) - D_m(Y_m, 1)D_m(J_m, r_0); \quad (54)$$

$$E_m(\xi) = D_m(J_m, 1)Y_m(\xi r_0) - D_m(Y_m, 1)J_m(\xi r_0). \quad (55)$$

В выражении (54)

$$D_m(Y_m, r_0) = -m \left(1 + \frac{i}{\lambda} \right) \frac{1}{r_0} Y_m(\xi r_0) + \xi Y_{m-1}(\xi r_0); \quad (56)$$

$$D_m(J_m, r_0) = -m \left(1 + \frac{i}{\lambda} \right) \frac{1}{r_0} J_m(\xi r_0) + \xi J_{m-1}(\xi r_0). \quad (57)$$

Случай стоячих волн ($m = 0$). Исключая λ из уравнений (51) и (52), получим систему трансцендентных уравнений относительно неизвестных ξ и ζ :

$$\begin{cases} \xi [J_1(\xi)Y_1(\xi r_0) - Y_1(\xi)J_1(\xi r_0)] - \\ - \frac{4\xi^2}{r_0(\xi^2 - \zeta^2)} [Y_1(\xi)J_0(\xi r_0) - J_1(\xi)Y_0(\xi r_0)] = 0; \end{cases} \quad (58)$$

$$\begin{cases} \operatorname{th}(\zeta \bar{H}) = \frac{\beta}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}}, \quad \beta = \frac{1}{\gamma}. \end{cases} \quad (59)$$

Эту систему можно представить в виде одного уравнения относительно комплексной переменной ζ , выразив ξ через ζ из

второго уравнения $\left(\xi = \sqrt{\zeta^2 + \frac{\beta^2}{\operatorname{th}^2(\zeta \bar{H})}} \right)$. Графическое решение этой

системы уравнений [19] позволяет выделить несколько групп корней в зависимости от их расположения на комплексной плоскости. Следует отметить, что качественно это решение сходно с решением для вращающегося коаксиального цилиндра с вытекающей из него жидкостью, за исключением дополнительной группы корней, отвечающей поверхностным волнам.

Численное исследование трансцендентных уравнений (58), (59) показало, что при быстром вращении множество нормальных колебаний жидкости, как и при медленном вращении, состоит из трех типов волновых движений: волн слива, внутренних и поверхностных волн.

Случай бегущих волн ($m \neq 0$). В этом случае для дальнейшего нахождения решений удобно привести систему (51)–(53) к одному уравнению относительно комплексной переменной ζ :

$$D_m \left(\sqrt{\zeta \left(\frac{1}{[\bar{\gamma}\zeta\text{th}(\zeta\bar{H})]^2 + 1} \right)} \right) - \frac{4 \left\{ [\bar{\gamma}\zeta\text{th}(\zeta\bar{H})]^2 + 1 \right\}}{r_0} E_m \left(\sqrt{\zeta \left(\frac{1}{[\bar{\gamma}\zeta\text{th}(\zeta\bar{H})]^2 + 1} \right)} \right) = 0. \quad (60)$$

Здесь, как и в случае сосуда с закрытой крышкой, можно отметить существование двух групп бегущих волн — совпадающих с направлением вращения жидкости и противоположных ему, т. е. прямых и обратных волн. В случае бегущих волн действительные решения, отвечающие волнам на поверхности слива, становятся комплексными. В случае $m = 1$ множество нормальных колебаний жидкости, как и при $m = 0$, состоит из трех типов волновых движений: волн слива, поверхностных и внутренних волн.

Поверхностные волны. Получим здесь асимптотические формулы для определения волновых чисел и частот поверхностных волн при $l \rightarrow \infty, n = \text{const}$ и волн слива при $n \rightarrow \infty, l = \text{const}$. Подставим в уравнения (58), (59) асимптотические разложения [16]:

$$K_m(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{4m^2 - 1^2}{1! \cdot 8z} + \dots \right\}; \quad (61)$$

$$I_m(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \left\{ 1 - \frac{4m^2 - 1^2}{1! \cdot 8z} + \dots \right\}. \quad (62)$$

Рассмотрим сначала асимптотику поверхностных волн при $m = 0$.

Используя метод неопределенных коэффициентов, получим асимптотику волнового числа α_{ml} ($\alpha = i\zeta$) и асимптотическую формулу для частоты поверхностных волн:

$$\alpha_{ml} = \mu_l \left(1 - \frac{2}{\mu_l} + \frac{3}{\mu_l^2} - \frac{D}{8} \frac{1}{\mu_l^3} \right) + o(\mu_l^{-3}), \quad l \rightarrow \infty; \quad (63)$$

$$\lambda_{ml} = \frac{1}{2} i \mu_l^{1/2} \left(1 + \frac{5}{4} \mu_l^{-1} - \frac{3}{2} \mu_l^{-2} + \frac{9}{8} \mu_l^{-3} \right) + o(\mu_l^{-3}), \quad l \rightarrow \infty, \quad (64)$$

где $\mu_l = l\pi/\bar{H}$; $D = 3(l-1)/l$.

При выводе асимптотических формул в случае $m \neq 0$ ограничимся главным членом в асимптотических выражениях (61), (62). Тогда вместо асимптотических уравнений (63), (64) получим

$$\alpha = \mu_l \left(1 - \frac{2}{\mu_l} + 2 \frac{1+m}{\mu_l^2} - \frac{2m^2}{\mu_l^3} \right) + o(\mu_l^{-3}); \quad (65)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} i \mu_l^{1/2} \left(1 + \frac{2+m}{2\mu_l} - \frac{1+m}{\mu_l^2} - \frac{(1+m)^2}{2\mu_l^3} \right) + o(\mu_l^{-3}). \quad (66)$$

Асимптотические формулы (65), (66) показывают, что частоты поверхностных прямых волн ($m < 0$) меньше, чем частоты поверхностных обратных волн ($m > 0$).

Обсуждение исследования. При анализе полученных результатов следует отметить появление решений, не встречающихся в задачах без слива, а также изменение известных решений под влиянием вытекания жидкости. Прежде всего, наличие поверхности слива заборного устройства определяет возможность появления на ней волновых движений — волн слива. Причины их возникновения впервые рассматривались в работе [5]. Волны слива характеризуются волновыми и собственными числами — решениями соответствующих систем уравнений. В общем это апериодические затухающие волновые движения. Появление в системе поверхности слива также отражается и на существующих в системе колебательных движениях. Внутренние волны и волны на свободной поверхности превращаются в затухающие волновые движения.

При медленном вращении для случая стоячих волн ($m = 0$) получаем две группы действительных решений для волн слива — с действительными волновыми числами ζ , стремящимися к нулю или к бесконечности. Это означает наличие на поверхности слива апериодических волновых движений, быстро затухающих во времени и в глубь жидкости. При этом увеличение скорости приводит к увеличению степени затухания. Соотношение между скоростью вращения и степенью сопротивления сливу также может приводить к появлению кратных корней для низших тонов колебаний, а затем и комплексно-сопряженных решений для соответствующего тона. Таким же образом уменьшение сопротивления сливу (коэффициент $\bar{\gamma}$) заборного устройства увеличивает затухание внутренних волн и волн на свободной поверхности.

В случае бегущих волн ($m \neq 0$) для каждой группы волн (поверхностных, внутренних и волн слива) получаем две группы решений — прямые и обратные волны, различающиеся направлением распространения и основными волновыми параметрами. Наличие слива через заборное устройство приводит к возникновению волн слива, которые не являются апериодическими, как в случае осесимметричных колебаний. Волны слива становятся быстрозатухающими колебатель-

ными движениями, степень затухания которых в наибольшей степени зависит от скорости слива. Поверхностные и внутренние волны, как и в случае стоячих волн, являются затухающими колебательными движениями, степень затухания которых также в наибольшей степени зависит от скорости слива. При этом для всех групп волн при определенной скорости вращения прямые волны могут не возникать.

В случае быстрого вращения, в отличие от медленного вращения, свободная поверхность располагается параллельно оси вращения. Здесь, как и в случае медленного вращения, вытекание жидкости приводит к появлению волновых движений на поверхности слива заборного устройства. В случае стоячих волн обе группы поверхностных волн (с волновым числом ζ , стремящимся к нулю или к бесконечности) являются аperiодическими движениями с действительным коэффициентом затухания λ . Бегущие волны — затухающие волновые движения с колебательной составляющей, более выраженной для поверхностных и внутренних волн, и с затухающей составляющей, более выраженной для волн слива. Определенные соотношения между коэффициентом сопротивления сливу $\bar{\gamma}$ и глубиной заполнения сосуда H могут привести к отсутствию низших тонов колебаний для волн на свободной поверхности.

Заключение. Проведенное исследование колебаний вращающейся жидкости, частично заполняющей топливный бак, при наличии истечения через заборное устройство показало, что рассматриваемая гидродинамическая система обладает как дискретным вещественным спектром собственных чисел, так и дискретным спектром комплексно-сопряженных собственных чисел. Вещественному спектру отвечают аperiодические режимы движений жидкости, которые более значительно выражены волнами слива, комплексно-сопряженным собственным числам отвечают затухающие колебания преимущественно поверхностных и внутренних волн.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кириллов В.В. Исследование колебаний жидкости в неподвижном сосуде с учетом ее вытекания. *Тр. МФТИ*, 1960, вып. 5, с. 19–25.
- [2] Моисеев Н.Н., Петров А.А. *Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости*. Москва, ВЦ АН СССР, 1966, 270 с.
- [3] Кононов Ю.Н. О колебаниях физического маятника, содержащего идеальную жидкость переменной массы. *Математическая физика и нелинейная механика*, 1985, вып. 3 (37), с. 17–20.
- [4] Лимарченко О.С. Динамика резервуара с жидкостью со свободной поверхностью в режиме равномерного истечения. *Прикладная механика*, 1993, т. 30, № 5, с. 63–68.

- [5] Орлов В.В., Темнов А.Н. Малые движения жидкости, вытекающей из бака. *Современные методы теории функций и смежные проблемы. Сб. тез. докл.* Воронеж, Воронежский гос. ун-т, 1997, с. 124.
- [6] Дьяченко М.И., Орлов В.В., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических емкостях. *Наука и образование*, 2013, № 11, с. 175–192. DOI: 10.7463/1113.0623923
- [7] Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Задачи динамики космических конструкций с жидким топливом, вытекающим из сферических емкостей. *XI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства «Королёвские чтения — 2016». Сб. докл.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, с. 30, 31.
- [8] Колесников К.С. *Динамика ракет*. 2-е изд. Москва, Машиностроение, 2003, 520 с.
- [9] Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, 1960, № 3, с. 20–55.
- [10] Копачевский Н.Д. Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости. *Физико-технический институт низких температур АН УССР, Препринт, № 38–77*. Харьков, 1978, 54 с.
- [11] Рвалов Р.В. Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости. *Известия АН СССР, МЖГ*, 1973, № 4, с. 81–88.
- [12] Гонткевич В.С. Собственные колебания вращающейся жидкости в сосудах. *Гидромеханика. Республ. межвуз. сб.*, 1972, вып. 20, с. 52–58.
- [13] Клишев О.П., Мордыга Ю.О. Математические модели динамики вращающихся разгонных блоков с учетом подвижности жидкого топлива в баках. *Актуальные вопросы проектирования космических систем и комплексов. Сб. науч. тр., вып. 5*. Российская академия космонавтики им. К.Э. Циолковского, НПО им. С.А. Лавочкина. Москва, 2004, с. 349–354.
- [14] Григорьев Ю.Н. О спектре пучка операторов задачи С.Л. Соболева. *Динамика сплошной среды*, 1974, № 17, с. 12–18.
- [15] Зеленьяк Т.И. *Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными*. Новосибирск, НГУ, 1970, 164 с.
- [16] Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций. Ч. 1*. Москва, Изд-во иностр. лит-ры, 1949, 797 с.
- [17] Орлов В.В., Темнов А.Н. Колебания вращающейся жидкости, вытекающей из закрытого сосуда. *Инженерно-физический журнал*, 2000, с. 165–173.
- [18] Копачевский Н.Д., Радякин Н.К. О малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде. *Вопросы вычислительной математики и техники*. Киев, Наукова думка, 1976, с. 3–25.
- [19] Орлов В.В. Колебания вращающейся жидкости, вытекающей из открытого сосуда. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2004. № 1, с. 3–20.

Статья поступила в редакцию 05.07.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Орлов В.В., Темнов А.Н. Нормальные колебания жидкости, вытекающей из вращающегося бака. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 8. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-8-1907>

Орлов Владимир Владимирович — соискатель-исследователь, кафедра «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: v_orlov@list.ru

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: antt45@mail.ru

Normal oscillations of liquid flowing from the rotating tank

© V.V. Orlov, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The purpose of the study was to analyze oscillations of liquid which partially or completely fills the fuel tank rotating around the longitudinal axis of the launch vehicle. The relevance of the problem is substantiated by the importance of assessing the effect of the intake, measuring, damping devices and other inner tank devices on the liquid fuel oscillations. The study introduces the formulation of problems on the motion of an incompressible rotating liquid flowing from an axisymmetric tank of arbitrary shape through the intake device, and gives a detailed study conducted for the fuel compartment in the form of a cylinder as the most common one. Finally, we give the solutions of the problems on normal, i.e. natural, oscillations of the liquid with boundary conditions on a free surface and a surface with resistance — the intake drain surface.

Keywords: normal oscillations, intake, fuel compartment, discrete spectrum, Bessel function

REFERENCES

- [1] Kirillov V.V. *Trudy MFTI — Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*, 1960, iss. 5, pp. 19–25.
- [2] Moiseev N.N., Petrov A.A. *Chislennyye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo obema zhidkosti* [Numerical methods for calculating the natural frequencies of oscillations of a limited volume of liquid]. Moscow, Computing Center Academy of Sciences of USSR Publ., 1966, 270 p.
- [3] Kononov Yu.N. *Matematicheskaya fizika i nelineinaya mekhanika (Mathematical physics and nonlinear mechanics)*, 1985, iss. 3 (37), pp. 17–20.
- [4] Limarchenko O.S. *Prikladnaya mekhanika — International Applied Mechanics*, 1993, vol. 30, no. 5, pp. 63–68.
- [5] Orlov V.V., Temnov A.N. *Malye dvizheniya zhidkosti, vytekayushchey iz baka* [Small movements of liquid flowing out of the tank]. *Sovremennyye metody teorii funktsii i smezhnye problem. Sbornik tezisov dokl.* [Modern methods of the theory of functions and related problems. Collection of abstracts]. Voronezh, Voronezh State University Publ., 1997, p. 124.
- [6] Dyachenko M.I., Orlov V.V., Temnov A.N. *Nauka i obrazovanie — Science and Education*, 2013, no. 11, pp. 175–192. DOI: 10.7463/1113.0623923
- [7] Nguyen V.H., Temnov A.N. *Zadachi dinamiki kosmicheskikh konstruksiy s zhidkim toplivom, vytekayushchim iz sfericheskikh emkostey* [Problems of the dynamics of space structures with liquid fuel flowing from spherical containers]. *XL Akademicheskie chteniia po kosmonavtike, posviashchennye pamiati akademika S.P. Koroleva i drugikh vydaiushchikhsia otechestvennykh uchenykh – pionerov osvoeniia kosmicheskogo prostranstva «Korolevskie chteniya–2016». Sb. dokladov* [XL Academic readings in astronautics dedicated to the memory of academician S.P. Korolev and other prominent Russian scientists — pioneers of space exploration “Korolev readings–2016”. Coll. reports]. Moscow, BMSTU Publ., 2016, pp. 30, 31.
- [8] Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Missile dynamics]. 2nd ed. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003, 520 p.

- [9] Sobolev S.L. *Zhurnal prikladnoy mekhaniki i tekhnicheskoy fiziki (Journal of Applied Mechanics and Technical Physics)*, 1960, no. 3, pp. 20–55.
- [10] Kopachevskiy N.D. Malye dvizheniya i sobstvennye kolebaniya idealnoy vrashchayushcheyasya zhidkosti [Small movements and natural oscillations of an ideal rotating liquid]. *Fiziko-tekhnicheskyy institut nizkikh temperatur. Preprint (ILTPE Preprint)*, no. 38–77. Kharkov, 1978, 54 p.
- [11] Rvalov R.V. *Izvestiya AN SSSR, MZhG — Fluid Dynamics*, 1973, no. 4, pp. 81–88.
- [12] Gontkevich V.S. *Gidromekhanika. Resp. mezhved. sb. (Hydromechanics. Republ. interdepart. coll.)*, 1972, no. 20, pp. 52–58.
- [13] Klishev O.P., Mordyga Yu.O. Matematicheskie modeli dinamiki vrashchayushchikh-sya razgonnykh blokov s uchetom podvizhnosti zhidkogo topliva v bakakh [Mathematical models of the dynamics of rotating booster blocks taking into account the mobility of liquid fuel in tanks]. *Aktualnye voprosy proektirovaniya kosmicheskikh sistem i kompleksov. Vyp. 5. Sbornik nauchnykh trudov* [Current problems in design of space systems and complexes. No. 5. Coll. Sc. papers]. Moscow, 2004, pp. 349–354.
- [14] Grigorev Yu.N. *Dinamika sploshnoy sredy (Continuum dynamics)*, 1974, no. 17, pp. 12–18.
- [15] Zelenyak T.I. *Izbrannye voprosy kachestvennoy teorii uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Selected problems of the qualitative theory of partial differential equations]. Novosibirsk, NSU Publ., 1970, 164 p.
- [16] Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, 1922, 811 p. [In Russ.: G.N. Watson. *Teoriya Besselevykh funktsiy*. Ch. 1. Moscow, Izd. inostr. lit. Publ., 1949, 797 p.].
- [17] Orlov V.V., Temnov A.N. *Inzhenerno-fizicheskyy zhurnal — Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2000, pp. 165–173.
- [18] Kopachevskiy N.D., Radyakin N.K. O malykh kolebaniyakh idealnoy kapillyarnoy zhidkosti, vrashchayushcheyasya v osesimmetrichnom sosude [On small oscillations of an ideal capillary liquid rotating in an axisymmetric vessel]. *Voprosy vychislitelnoy matematiki i tekhniki* [Problems of computational mathematics and technology]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1976, pp. 3–25.
- [19] Orlov V.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2004, no. 1, pp. 3–20.

Orlov V.V., degree seeking applicant, researcher, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: v_orlov@list.ru

Temnov A.N., Cand. (Phys.-Math.) Sc., Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: antt45@mail.ru