

Колебания вязкой трехслойной жидкости в неподвижном баке

© Вин Ко Ко, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследованы колебания трехслойной вязкой жидкости, приведена постановка задачи о свободных колебаниях вязкой жидкости, определены собственные частоты и коэффициенты затухания колебаний вязкой трехслойной жидкости в сосуде цилиндрической формы с использованием метода пограничного слоя и механического аналога. Колебания трехслойной вязкой жидкости рассмотрены как совместные колебания двух парциальных гидродинамических систем, одна из которых соответствует колебаниям верхней и средней жидкостей, а другая — колебаниям средней и нижней жидкостей. Определены коэффициенты вязкого сопротивления в парциальных гидродинамических системах двухслойной вязкой жидкости. С использованием механического аналога колебаний трехслойной жидкости выведено характеристическое уравнение для определения собственных частот исследуемой гидродинамической системы. Приведены расчетные зависимости собственных частот и коэффициентов затухания колебаний поверхностей раздела жидкостей от высоты среднего слоя и плотности верхней жидкости. Выполнен сравнительный анализ теоретических расчетов с результатами, полученными другими авторами, и с данными экспериментальных исследований. Приведены результаты экспериментальных исследований колебаний трехслойной жидкости в неподвижном цилиндрическом баке.

Ключевые слова: трехслойная вязкая жидкость, собственные частоты, механический аналог, коэффициент затухания, твердое тело

Введение. В машиностроении широко используют конструкции, в которых имеются объемы слоистой жидкости, например топливные баки объектов авиационной и ракетно-космической техники, резервуары для транспортировки жидкостей, а также для хранения нефтепродуктов и сжиженных газов, водонапорные башни и т. п. Неоднородная жидкость, заполняющая полости, значительно влияет на движение всей системы, особенно если масса жидкости гораздо больше массы сухой конструкции. В этих случаях движение жидкости может существенно изменить движение всей конструкции [1–6].

К настоящему времени отсутствуют теоретические и экспериментальные результаты о динамике слоистой жидкости, на поверхностях разделов которой имеются волны стационарной амплитуды. Дефицит исследований в данном направлении объясняется как сложностью возникающих математических проблем, так и трудностями постановки эксперимента, поскольку необходимо обеспечить возбуждение стоячих волн стационарной амплитуды в слоистой жидкости. Целью настоящей работы являются теоретическое и экспериментальное определение ос-

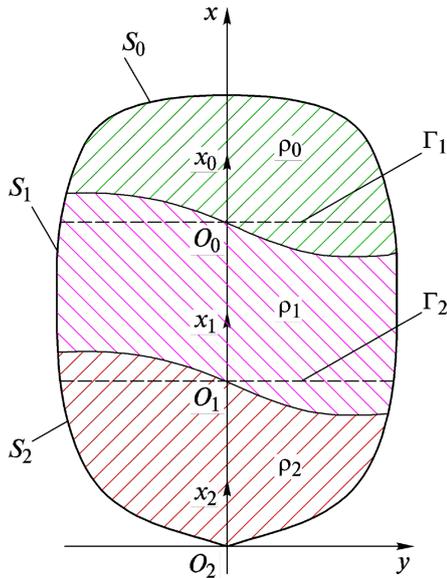


Рис. 1. Общий вид осесимметричного сосуда произвольной формы с вязкой трехслойной жидкостью

произвольной формы. Введем неподвижные системы координат $O_i x_i y_i z_i$, $i = 0, 1, 2$ (рис. 1), и обозначим через Γ_1 , Γ_2 невозмущенные поверхности раздела жидкостей, а через S_i , $i = 0, 1, 2$, смачиваемые поверхности жидкостей.

Постановка рассматриваемой задачи может быть описана следующими уравнениями:

- уравнениями движения жидкостей [12, 13]

$$\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t} = -\frac{\nabla p^{(i)}}{\rho_i} - g\vec{k} + \nu_i \Delta \vec{u}^{(i)}; \quad \text{div} \vec{u}^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, 2; \quad (1)$$

- равенствами нормальных и касательных напряжений на поверхностях раздела жидкостей

$$\frac{\partial}{\partial t} (p^{(0)} - p^{(1)}) + u_x g (\rho_0 - \rho_1) = 2 \left(\nu_1 \rho_1 \frac{\partial^2 u_{x_1}^{(1)}}{\partial x_1 \partial t} - \nu_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_{x_0}^{(0)}}{\partial x_0 \partial t} \right) \text{ на } \Gamma_1; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (p^{(1)} - p^{(2)}) + u_x g (\rho_1 - \rho_2) = 2 \left(\nu_2 \rho_2 \frac{\partial^2 u_{x_2}^{(2)}}{\partial x_2 \partial t} - \nu_1 \rho_1 \frac{\partial^2 u_{x_1}^{(1)}}{\partial x_1 \partial t} \right) \text{ на } \Gamma_2; \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \nu_1 \rho_1 \left(\frac{\partial u_{x_1}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \nu_0 \rho_0 \left(\frac{\partial u_{x_0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial x_0} \right) \text{ на } \Gamma_1; \quad (4)$$

новых динамических характеристик свободных колебаний трехслойной вязкой жидкости, заполняющей круглый неподвижный цилиндрический бак, и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными и результатами, полученными другими исследователями [7–11].

Постановка задачи для трехслойной вязкой жидкости. Рассмотрим малые волновые движения вязкой несжимаемой жидкости, которая состоит из трех слоев несмешивающихся жидкостей, имеющих соответственно плотность ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 , кинематическую вязкость ν_0 , ν_1 , ν_2 и полностью заполняющих неподвижный осесимметричный сосуд

$$\frac{1}{2}v_1\rho_1\left(\frac{\partial u_{x_1}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}v_0\rho_0\left(\frac{\partial u_{x_0}^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(0)}}{\partial x_0}\right) \text{ на } \Gamma_1; \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}v_1\rho_1\left(\frac{\partial u_{x_1}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}v_2\rho_2\left(\frac{\partial u_{x_2}^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial x_2}\right) \text{ на } \Gamma_2; \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}v_1\rho_1\left(\frac{\partial u_{x_1}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}v_2\rho_2\left(\frac{\partial u_{x_2}^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial x_2}\right) \text{ на } \Gamma_2; \quad (7)$$

- кинематическими соотношениями

$$\vec{u}^{(0)} = \vec{u}^{(1)} \text{ на } \Gamma_1; \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(2)} \text{ на } \Gamma_2; \quad (8)$$

- условиями прилипания на смачиваемых поверхностях

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{0} \text{ на } S_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (9)$$

где $\vec{u}^{(i)}$, $p^{(i)}$ — вектор скорости и давление i -й жидкости соответственно.

Решение задачи о свободных колебаниях трех вязких жидкостей будем искать в виде

$$\vec{u}^{(i)} = e^{\lambda t} \vec{U}^{(i)}(x_i, y, z); \quad p^{(i)} = e^{\lambda t} P^{(i)}(x_i, y, z), \quad i = 0, 1, 2, \quad (10)$$

где λ — собственное число задачи; $\vec{U}^{(i)}$ и $P^{(i)}$ — функции координат (x_i, y, z) .

Метод решения поставленной задачи. Для решения поставленной задачи воспользуемся следующим приемом. Будем рассматривать колебания трехслойной вязкой жидкости как совместные колебания двух парциальных механических систем, одна из которых соответствует колебаниям верхней и средней жидкостей, а другая колебаниям средней и нижней жидкостей. Для каждой парциальной гидродинамической системы определим коэффициенты затухания колебаний γ_{1n}, γ_{2n} (n — номер тона), воспользовавшись методом пограничного слоя.

Используя механический аналог колебаний двух жидкостей для парциальных гидродинамических подсистем [14], составим дифференциальные уравнения для обобщенных координат s_I, s_{II} парциальных механических систем с учетом действия диссипативных сил \vec{R}_k , описываемых законом вязкого сопротивления

$$\vec{R}_k = -\mu_k \vec{V}_k, \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

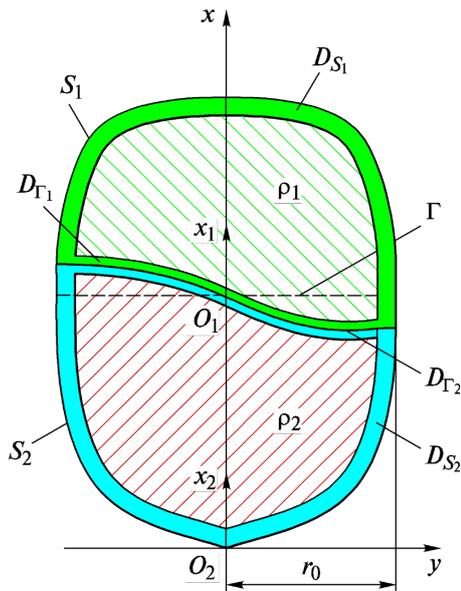


Рис. 2. Схема сосуда с вязкой двух-
слойной жидкостью

где μ_k — коэффициенты вязкого сопротивления; \vec{V}_k — векторы скоростей точек, в которых приложены силы \vec{R}_k .

Затем, сравнивая уравнения колебаний парциальных гидродинамических и механических систем, определим коэффициенты μ_k и воспользуемся механическим аналогом колебаний трехслойной жидкости. Составив характеристическое уравнение, определим собственные частоты колебаний трехслойной вязкой жидкости.

Определение коэффициентов вязкого сопротивления в парциальных гидродинамических системах.

Следуя приведенному методу решения задачи, определим сначала коэффициенты вязкого сопротивления в парциальных механических системах, эквивалентных парциальным гидродинамическим системам. С этой целью рассмотрим движение двух вязких несжимаемых жидкостей плотностью ρ_1 , ρ_2 и кинематической вязкостью ν_1 , ν_2 в неподвижном произвольном сосуде (рис. 2).

Решение задачи о колебаниях двух вязких жидкостей найдем методом пограничного слоя, ограничившись при этом нулевым и первым приближениями и положив

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(i)} &= \nabla' \bar{\varphi}^{(i)} + \varepsilon \nabla' \bar{\kappa}^{(i)} + \bar{w}^{(i)}; \\ \bar{P}^{(i)} &= -\bar{\rho}_i \bar{\lambda}_0 \bar{\varphi}^{(i)} - \varepsilon \bar{\rho}_i (\bar{\lambda}_0 \bar{\kappa}^{(i)} + \bar{\lambda}_i \bar{\varphi}^{(i)}) + s^{(i)}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 + \varepsilon \bar{\lambda}_1, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

где $\bar{\varphi}^{(i)}$, $\bar{\kappa}^{(i)}$ — потенциалы смещений i -й жидкости соответственно при нулевом и первом приближении; $\bar{w}^{(1)}$, $\bar{w}^{(2)}$, $s^{(1)}$, $s^{(2)}$ — функции типа пограничного слоя; ε — малый параметр задачи.

Подставив выражения (12), (13) в задачу о колебаниях двух вязких жидкостей и воспользовавшись методом пограничного слоя [1], в результате получим:

$$\bar{\lambda}_1 = -\frac{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)(1 \pm i)}{2\sqrt{2}(\bar{\beta}_{2j})^{3/2}}(\bar{\rho}_2 A_{2j} + \bar{\rho}_1 A_{12j}); \quad (14)$$

$$A_{2j} = \frac{\int (\nabla' \bar{\varphi}^{(2)})^2 dS_2}{\int_{\Gamma_2} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})^2 d\Gamma_2}; \quad A_{12j} = \frac{\int (\nabla' \bar{\varphi}^{(1)})^2 dS_1}{\int_{\Gamma_2} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})^2 d\Gamma_2}, \quad (15)$$

где $\bar{\beta}_{2j}$ — парциальная частота колебаний поверхности раздела Γ_2 .

Затем, подставив $\bar{\lambda}_1$ в формулу (13), получим окончательное выражение для собственного значения $\bar{\lambda}_j$:

$$\bar{\lambda}_j = \bar{\lambda}_0 + \varepsilon \bar{\lambda}_1 = \pm i \bar{\beta}_{2j} - \frac{(1 \pm i)(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)\varepsilon}{2\sqrt{2}(\bar{\beta}_{2j})^{3/2}}(\bar{\rho}_2 A_{2j} + \bar{\rho}_1 A_{12j}), \quad (16)$$

или

$$\bar{\lambda}_j^{(2)} = -\bar{\gamma}_{2j} + i\bar{\beta}_{2j}^*, \quad (17)$$

где

$$\bar{\gamma}_{2j} = \frac{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)\varepsilon_{II}}{2\sqrt{2}(\bar{\beta}_{2j})^{3/2}}(\bar{\rho}_2 A_{2j} + \bar{\rho}_1 A_{12j}), \quad \varepsilon_{II}^2 = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{r_0 \sqrt{gr_0}}; \quad (18)$$

$$\bar{\beta}_{2j}^* = \sqrt{\bar{\beta}_{2j}^2 - \bar{\gamma}_{2j}^2}. \quad (19)$$

(В формуле (18) индекс II относится к поверхности Γ_2 раздела средней и нижней жидкостей.)

Решив подобную задачу для средней и верхней жидкостей, аналогично получим

$$\bar{\lambda}_j^{(1)} = -\bar{\gamma}_{1j} + i\bar{\beta}_{1j}^*; \quad (20)$$

$$\bar{\gamma}_{1j} = \frac{(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0)\varepsilon_I}{2\sqrt{2}(\bar{\beta}_{1j})^{3/2}}(\bar{\rho}_0 A_{0j} + \bar{\rho}_1 A_{11j}), \quad \varepsilon_I^2 = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0}{r_0 \sqrt{gr_0}}; \quad (21)$$

$$\bar{\beta}_{1j}^* = \sqrt{\bar{\beta}_{1j}^2 - \bar{\gamma}_{1j}^2}, \quad (22)$$

$$A_{0j} = \frac{\int (\nabla' \bar{\varphi}^{(0)})^2 dS_0}{\int_{\Gamma_1} (\bar{\rho}_0 \bar{\varphi}^{(0)} - \bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)})^2 d\Gamma_1}; \quad A_{11j} = \frac{\int (\nabla' \bar{\varphi}^{(1)})^2 dS_1}{\int_{\Gamma_1} (\bar{\rho}_0 \bar{\varphi}^{(0)} - \bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)})^2 d\Gamma_1}, \quad (23)$$

где $\bar{\beta}_{1j}$ — парциальная частота колебаний поверхностей раздела Γ_1 .

Определив коэффициенты затухания для каждой пары жидкостей, запишем систему приближенных дифференциальных уравнений парциальных гидродинамических систем в виде

$$\begin{cases} \ddot{\sigma}_{1j} + 2\gamma_{1j}\dot{\sigma}_{1j} + \beta_{1j}^2\sigma_{1j} = 0; \\ \ddot{\sigma}_{2j} + 2\gamma_{2j}\dot{\sigma}_{2j} + \beta_{2j}^2\sigma_{2j} = 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (24)$$

где σ_{1j} , σ_{2j} — обобщенные координаты волновых движений поверхностей раздела Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Механический аналог колебаний трех вязких жидкостей, целиком заполняющих полость неподвижного твердого тела. Воспользуемся теперь упрощенным вариантом механического аналога колебаний двух идеальных средней и нижней жидкостей, целиком заполняющих неподвижную полость [14]. Уравнение движения в этом случае

$$\ddot{s}_{\Pi n} + (\beta_{\Pi n}^{\text{mex}})^2 s_{\Pi n} = 0,$$

где $\beta_{\Pi n}^{\text{mex}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_n} \frac{M_{\Pi n}^{\text{mex}} - M_{\text{In}}^{\text{mex}}(l_n + b_n)/\delta_n}{M_{\Pi n}^{\text{mex}} + M_{\text{In}}^{\text{mex}}(l_n + b_n)^2/\delta_n^2}}$ ($M_{\text{In}}^{\text{mex}}$, $M_{\Pi n}^{\text{mex}}$ — масса

соответственно верхнего и нижнего маятника; l_n — длина невесомого стержня; b_n — расстояние от центра механического аналога до верхнего маятника в невозмущенном состоянии, соответствующее n -му тону колебаний слоев жидкости; δ_n — длина нити математического маятника, отвечающая n -му тону свободных колебаний поверхности раздела).

При действии сил \vec{R}_k вязкого сопротивления (см. формулу (11)) на математический маятник уравнение колебаний маятника, имитирующего колебания нижней поверхности раздела двух жидкостей, имеет вид

$$\ddot{s}_{\Pi n} + 2\eta_{\Pi n}\dot{s}_{\Pi n} + (\beta_{\Pi n}^{\text{mex}})^2 s_{\Pi n} = 0. \quad (25)$$

В формуле (25)

$$\eta_{\Pi n} = \frac{\mu_{\Pi n}}{2[M_{\Pi n}^{\text{mex}} + M_{\text{In}}^{\text{mex}}(l_n + b_n)^2/\delta_n^2]}.$$

Здесь

$$M_{\Pi n}^{\text{mex}} = V_n \left[(\rho_2 f_{1n} + \rho_1) - (\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \right],$$

где $f_{0n} = \text{th}(k_n h_1) \text{cth}(k_n h_0)$; $f_{1n} = \text{th}(k_n h_1) \text{cth}(k_n h_2)$.

Аналогично может быть составлено уравнение колебаний маятника, имитирующего колебания поверхности раздела верхней и средней жидкостей:

$$\ddot{s}_{In} + 2\eta_{In}\dot{s}_{In} + (\beta_{In}^{\text{mex}})^2 s_{In} = 0. \quad (26)$$

Здесь

$$\eta_{In} = \frac{\mu_{In}}{2M_{In}^{\text{mex}}},$$

где $M_{In}^{\text{mex}} = V_n (\rho_0 f_{0n} + \rho_1)$.

Определим из уравнений механического аналога двух вязких жидкостей коэффициенты вязкого сопротивления (демпфирования) $\mu_{In}, \mu_{II n}$. Сравним уравнения парциальных гидродинамических систем (24) и уравнения парциальных систем механического аналога (25), (26), получим

$$\gamma_{1j} = \eta_{In}; \quad \gamma_{2j} = \eta_{II n}, \quad n = j,$$

$$s_{In} = \sigma_{1j}; \quad s_{II n} = \sigma_{2j};$$

$$\mu_{In} = 2\gamma_{1n} M_{In}^{\text{mex}}; \quad \mu_{II n} = 2\gamma_{2n} \left(M_{II n}^{\text{mex}} + M_{In}^{\text{mex}} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \right).$$

Далее воспользуемся механическим аналогом колебания трех идеальных несжимаемых жидкостей, целиком заполняющих полость неподвижного твердого тела [14]. Чтобы получить механический аналог колебаний трех вязких жидкостей, составим выражение диссипативной функции Рэлея:

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{1}{2} \mu_{II n} \dot{s}_{II n}^2 + \frac{1}{2} \mu_{In} \left[\frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \dot{s}_{II n}^2 + \dot{s}_{In}^2 - 2 \frac{l_n + b_n}{\delta_n} \dot{s}_{In} \dot{s}_{II n} \right].$$

Используя уравнения Лагранжа второго рода, получим уравнения колебаний механического аналога трех вязких жидкостей, записанные в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{s}_{In} \\ \ddot{s}_{II n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s}_{In} \\ \dot{s}_{II n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{11} \\ c_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{In} \\ s_{II n} \end{pmatrix} = 0. \quad (27)$$

Положим в уравнении (27) $s_{In} = A_1 e^{\lambda t}$, $s_{II n} = A_2 e^{\lambda t}$ и запишем характеристическое уравнение механической системы:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \quad a_1 = a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}; \\ a_2 &= a_{11}c_{22} + b_{11}b_{22} + a_{22}c_{11} - b_{12}b_{21}; \quad a_3 = b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11}; \quad a_4 = c_{11}c_{22}; \\ a_{11} &= M_{In}^{\text{mex}}; \quad a_{22} = M_{In}^{\text{mex}} + M_{In}^{\text{mex}} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2}; \quad a_{12} = a_{21} = M_{In}^{\text{mex}} \frac{l_n + b_n}{\delta_n}; \\ b_{11} &= \mu_{In}; \quad b_{22} = \mu_{In} + \mu_{In} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2}; \quad b_{12} = b_{21} = \mu_{In} \frac{l_n + b_n}{\delta_n}; \\ c_{11} &= M_{In}^{\text{mex}} \frac{g}{l_n}; \quad c_{22} = \frac{g}{\delta_n} \left(M_{In}^{\text{mex}} - M_{In}^{\text{mex}} \frac{l_n + b_n}{\delta_n} \right). \end{aligned}$$

Можно доказать, что вещественные части корней характеристического уравнения (28) отрицательны либо равны нулю. Таким образом, корни этого уравнения могут быть трех видов:

- 1) $\lambda_{1,2j} = -\alpha_{1j} \pm \omega_{1j}i$, $\lambda_{3,4j} = -\alpha_{2j} \pm \omega_{2j}i$;
- 2) $\lambda_{mj} = -\alpha_{mj}$, $m = 1, 2, 3, 4$;
- 3) $\lambda_{1,2j} = -\alpha_{1j} \pm \omega_{1j}i$, $\lambda_{3,4j} = -\alpha_{3,4j}$,

где α_{mj} , ω_{mj} — вещественные положительные числа.

Будем считать, что в рассматриваемом случае силы сопротивления достаточно малы, функция Рэлея определенно положительна. Поэтому корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными с отрицательными вещественными частями:

$$\lambda_{1,2j} = -\alpha_{1mj} \pm \omega_{1mj}i, \quad \lambda_{3,4j} = -\alpha_{2mj} \pm \omega_{2mj}i.$$

Комплексно-сопряженным корням отвечают затухающие главные колебания:

$$s_{mj} = Ae^{-\alpha_{mj}t} \sin(\omega_{mj}t + \varepsilon_{mj}),$$

где ε_{mj} — начальная фаза.

Свободные колебания вязкой трехслойной жидкости в сосуде конкретной формы. Рассмотрим сосуд, имеющий форму прямого круглого цилиндра радиусом r_0 и заполненный вязкой трехслойной жидкостью с высотой каждого слоя соответственно h_0, h_1, h_2 (рис. 3).

Потенциалы смещений каждой жидкости могут быть представлены в виде [14]:

$$\chi_0 = \sum_j \varphi_j^{(0)}(x_0, r, \eta) \sigma_{1j}(t);$$

$$\chi_1 = \sum_j \left[\varphi_j^{(11)}(x_1, r, \eta) \sigma_{1j}(t) + \varphi_j^{(12)}(x_1, r, \eta) \sigma_{2j}(t) \right];$$

$$\chi_2 = \sum_j \varphi_j^{(2)}(x_2, r, \eta) \sigma_{2j}(t),$$

причем

$$\varphi_j^{(0)} = -\frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \operatorname{th}(k_j h_1) \frac{\operatorname{ch}(k_j(x_0 - h_0))}{\operatorname{sh}(k_j h_0)} \sin \eta;$$

$$\varphi_j^{(11)} = \frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \operatorname{th}(k_j h_1) \frac{\operatorname{ch}(k_j x_1)}{\operatorname{sh}(k_j h_1)} \sin \eta;$$

$$\varphi_j^{(12)} = -\frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \frac{\operatorname{ch}(k_j(x_1 - h_1))}{\operatorname{ch}(k_j h_1)} \sin \eta;$$

$$\varphi_j^{(2)} = \frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \operatorname{th}(k_j h_1) \frac{\operatorname{ch}(k_j x_2)}{\operatorname{sh}(k_j h_2)} \sin \eta,$$

где r, η — полярные координаты в плоскости Oyz с центром на оси цилиндра; $k_j = \xi_j/r_0$; ξ_j — положительные корни произвольных функций Бесселя первого рода и первого

порядка $\left(\frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \right)' = 0, j = 1, 2, \dots$

Для определения собственных частот колебаний вязкой трехслойной жидкости находим интегралы, входящие в выражения (15), (23) для коэффициентов $A_{0j}, A_{11j}, A_{12j}, A_{2j}$:

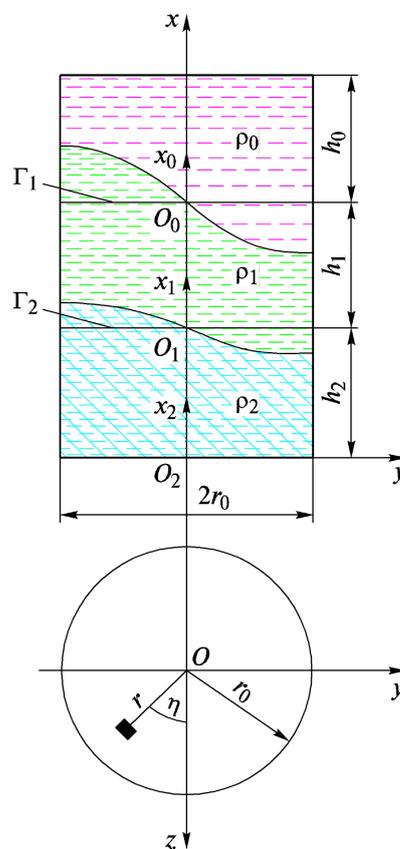


Рис. 3. Схема круглого цилиндра с вязкой трехслойной жидкостью

$$\int_{S_0} (\nabla \varphi_j^{(0)})^2 dS_0 = \int_{S_{\text{бок}}} (\nabla \varphi_j^{(0)})^2 dS_{\text{бок}} + \int_{S_{\text{кр}}} (\nabla \varphi_j^{(0)})^2 dS_{\text{кр}};$$

$$\int_{S_1} (\nabla \varphi_j^{(1)})^2 dS_1 = \int_{S_{\text{бок}}} (\nabla \varphi_j^{(1)})^2 dS_{\text{бок}};$$

$$\int_{S_2} (\nabla \varphi_j^{(2)})^2 dS_2 = \int_{S_{\text{бок}}} (\nabla \varphi_j^{(2)})^2 dS_{\text{бок}} + \int_{S_{\text{дно}}} (\nabla \varphi_j^{(2)})^2 dS_{\text{дно}},$$

где $S_{\text{бок}}$, $S_{\text{кр}}$, $S_{\text{дно}}$ — площади боковой стенки, крышки и донной части соответственно.

Подставив потенциалы $\varphi_j^{(0)}$, $\varphi_j^{(1)}$, $\varphi_j^{(12)}$, $\varphi_j^{(2)}$ в формулы (15) и (23), окончательно получим коэффициенты A_{0j} , A_{11j} , A_{12j} , A_{2j} :

$$A_{0j} = \frac{\xi_j^2 f_{0j}^2}{r_0^2 (\rho_1 + f_{0j} \rho_0)^2} \left[\frac{\xi_j^2 + 1}{\xi_j (\xi_j^2 - 1)} \text{th}(k_j h_0) + \frac{1 - h_0/r_0}{[\text{ch}(k_j h_0)]^2} \right];$$

$$A_{11j} = \frac{\xi_j^2}{r_0^2 (\rho_1 + f_{0j} \rho_0)^2} \left[\frac{\xi_j^2 + 1}{\xi_j (\xi_j^2 - 1)} \text{th}(k_j h_1) + \frac{1 - h_1/r_0}{[\text{ch}(k_j h_1)]^2} \right];$$

$$A_{12j} = \frac{\xi_j^2}{r_0^2 (\rho_1 + f_{1j} \rho_2)^2} \left[\frac{\xi_j^2 + 1}{\xi_j (\xi_j^2 - 1)} \text{th}(k_j h_1) + \frac{1 - h_1/r_0}{[\text{ch}(k_j h_1)]^2} \right];$$

$$A_{2j} = \frac{\xi_j^2 f_{1j}^2}{r_0^2 (\rho_1 + f_{1j} \rho_2)^2} \left[\frac{\xi_j^2 + 1}{\xi_j (\xi_j^2 - 1)} \text{th}(k_j h_2) + \frac{1 - h_2/r_0}{[\text{ch}(k_j h_2)]^2} \right].$$

Определив коэффициенты затухания γ_{1j} , γ_{2j} для каждой пары жидкости:

$$\gamma_{1j} = \frac{(\rho_1 - \rho_0)g}{2\sqrt{2}(\beta_{1j})^{3/2}} (\sqrt{v_0} \rho_0 A_{0j} + \sqrt{v_1} \rho_1 A_{11j}); \quad (29)$$

$$\gamma_{2j} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{2\sqrt{2}(\beta_{2j})^{3/2}} (\sqrt{v_2} \rho_2 A_{2j} + \sqrt{v_1} \rho_1 A_{11j}), \quad (30)$$

выразим параметры механической системы через параметры гидродинамической системы. Получим

$$M_{In}^{Mex} = V_n (\rho_0 f_{0n} + \rho_1);$$

$$M_{II n}^{Mex} = \frac{V_n \left[(\rho_2 f_{1n} + \rho_1)(\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \operatorname{ch}(k_n h_1)^2 - \rho_1^2 \right]}{(\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \operatorname{ch}(k_n h_1)^2};$$

$$\mu_{In} = 2\gamma_{In} V_n (\rho_0 f_{0n} + \rho_1); \quad \mu_{II n} = 2\gamma_{II n} V_n (\rho_2 f_{1n} + \rho_1);$$

$$\delta_n = \frac{r_0 \left\{ (\rho_2 f_{1n} + \rho_1) - \rho_1^2 / \left[(\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \operatorname{ch}(k_n h_1)^2 \right] - \rho_1 / \operatorname{ch}(k_n h_1) \right\}}{(\rho_2 - \rho_1) \xi_n \operatorname{th}(k_n h_1)};$$

$$l_n = \frac{r_0 (\rho_0 f_{0n} + \rho_1)}{(\rho_1 - \rho_0) \xi_n \operatorname{th}(k_n h_1)}; \quad b_n = \frac{\delta_n \rho_1 - l_n (\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \operatorname{ch}(k_n h_1)}{(\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \operatorname{ch}(k_n h_1)};$$

$$V_n = \frac{2\pi r_0^3 \operatorname{th}(k_n h_1)}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)}.$$

Результаты численных расчетов по формуле (28) при различных параметрах задачи приведены на рис. 4 и 5.

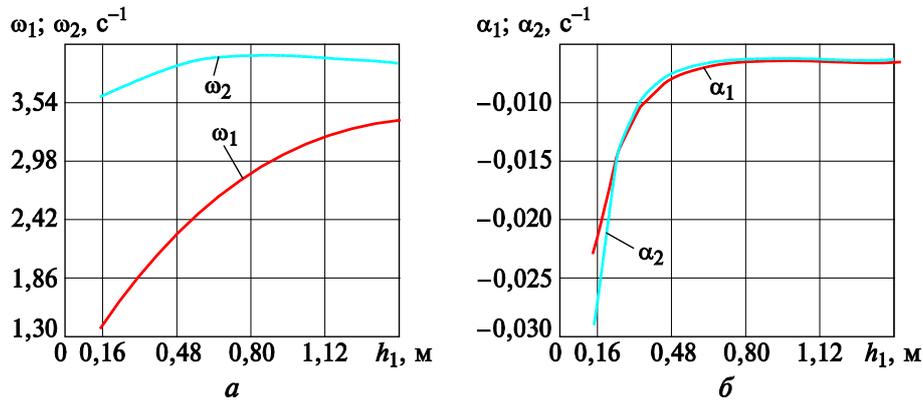


Рис. 4. Зависимость собственных частот (а) и коэффициентов затухания (б) трех-
 слойной вязкой жидкости от высоты h_1 слоя средней жидкости при $h_0 = h_2 = 1,5$ м
 и $\rho_0 = 0,1 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_1 = 0,5 \cdot 10^3$ кг/м³ для противофазных (—) и синфазных
 (—) колебаний

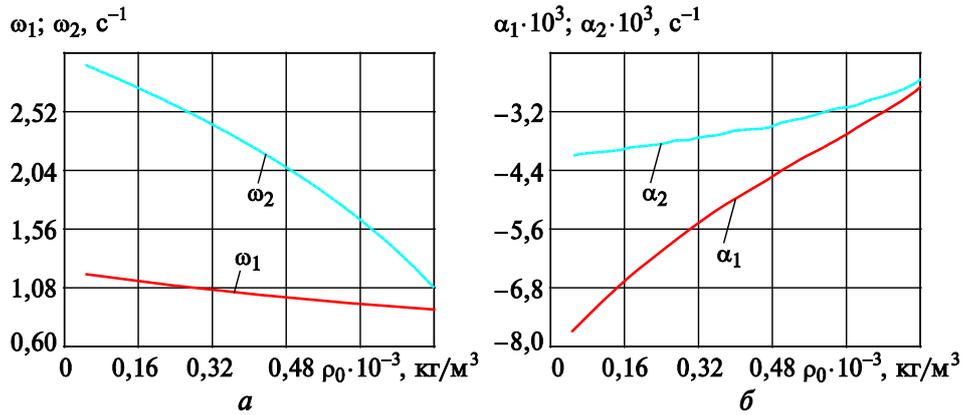


Рис. 5. Зависимость собственных частот (а) и коэффициентов затухания (б) трехслойной вязкой жидкости от плотности ρ_0 верхней жидкости при $h_0 = h_1 = h_2 = 1,5$ м и $\rho_1 = 0,92 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

Сравнительный анализ полученных результатов. Для проверки достоверности результатов исследования приведем несколько значений коэффициентов затухания, полученных другими авторами.

В работе [1] Ф.Л. Черноусько формула для коэффициента затухания колебаний свободной поверхности жидкости, частично заполняющей цилиндрический сосуд, имеет вид

$$\text{Re } \lambda_{11} = -\frac{\sqrt{v_2} g A_{11j}}{2\sqrt{2}(\omega_{11})^{3/2}}. \quad (31)$$

В работе [7] С.Я. Секерж-Зеньковича была получена следующая формула для коэффициента затухания поверхности раздела двух жидкостей, полностью заполняющих цилиндрический сосуд:

$$\alpha_{11} = -\frac{\sqrt{2^{-3} v_2 \omega_{11}^5} I}{g(1-\rho)}. \quad (32)$$

В настоящей работе коэффициент затухания для двух жидкостей в цилиндрическом сосуде определяется по формуле (29).

Харрисон в работе [10] для бесконечного канала, заполненного двумя жидкостями, нижняя из которых имела бесконечную высоту слоя, а другая конечную высоту h_1 , получил следующую формулу для коэффициента затухания:

$$H_{11} = -2k_1^2 \frac{v_1 \rho_1 \text{ch}(k_1 h_1) + 2(v_2 \rho_2 - v_1 \rho_1) \text{sh}(k_1 h_1)}{\rho_1 \text{ch}(k_1 h_1) + (2\rho_2 - \rho_1) \text{sh}(k_1 h_1)}. \quad (33)$$

Для двух вязких жидкостей, имеющих значения плотности и кинематической вязкости $\rho_1 = 1,185 \text{ кг/м}^3$, $\nu_1 = 1,51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ (воздух), $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\nu_2 = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ (вода), на рис. 6, а представлены результаты расчетов коэффициентов затухания, определенных по формулам (31)–(33), а также по формуле (29), полученной в данной работе для цилиндрического сосуда радиусом $r_0 = 1 \text{ м}$. Для этого же сосуда на рис. 6, б приведены результаты расчетов коэффициентов затухания, определенных по формулам в зависимости от плотности верхней жидкости.

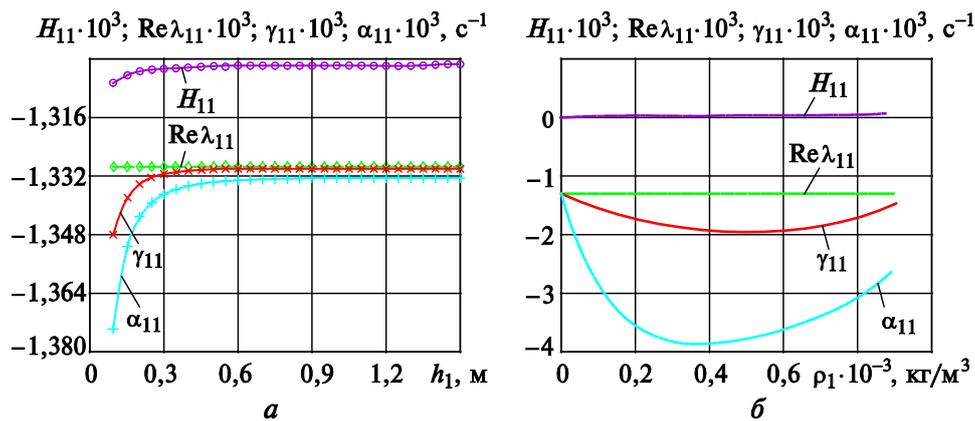


Рис. 6. Зависимости коэффициентов затухания от высоты h_1 слоя верхней жидкости при $h_2 = 1,2 \text{ м}$, $\rho_1 = 1,185 \text{ кг/м}^3$ (а) и от плотности ρ_1 верхней жидкости при $n = m = 1$, $h_1 = h_2 = 1,2 \text{ м}$ (б)

Экспериментальное исследование слоистой жидкости. Для подтверждения приведенных теоретических формул и полученных численных результатов было проведено экспериментальное исследование

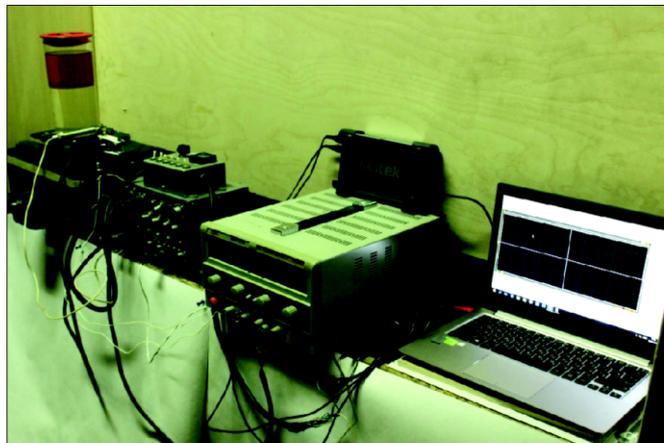


Рис. 7. Общий вид экспериментальной установки

колебаний трехслойной вязкой жидкости. Подробное описание экспериментальной установки содержится в статье [15], общий вид представлен на рис. 7.

Значения частот, определенных по формуле (28) и полученных в результате эксперимента, приведены на рис. 8.

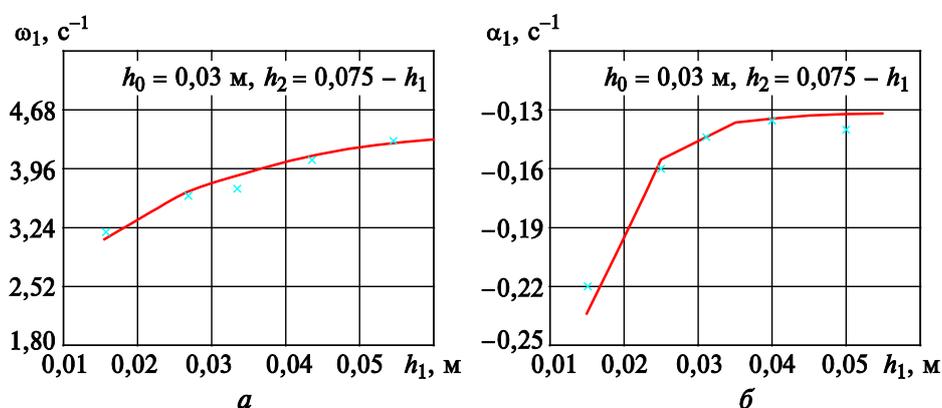


Рис. 8. Зависимости первой главной частоты (а) и коэффициента затухания (б) от высоты слоя средней жидкости, определенные по формуле (28) (—) и полученные в результате эксперимента (***)

Заключение. Были численно определены собственные частоты и коэффициенты затухания (динамические характеристики) колебаний трехслойной жидкости. Их сравнение с данными, полученными в проведенном эксперименте, показало удовлетворительное совпадение с теоретическими результатами, вытекающими из решений характеристического уравнения (28).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Черноусько Ф.Л. *Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость*. Москва, ВЦ АН СССР, 1968, 232 с.
- [2] Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. *Инженерный журнал: наука и инновация*, 2013, вып. 12. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1147
- [3] Цветков Д.О. Малые движения вязкой стратифицированной жидкости. *Межведомственный научный сборник «Динамические системы»*, 2007, вып. 22, с. 73–82.
- [4] Моисеев Г.А. Движение твердого тела, имеющего полость, целиком заполненную двумя несмешивающимися жидкостями. В кн.: *Математическая физика. Сб. ст.* Киев, Наукова думка, 1972, вып. 12, с. 66–73.
- [5] Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Свободные колебания вязкой стратифицированной жидкости в сосуде*. Деп. в ВИНТИ. Москва, 1983, № 4531-83 ДЕП, 45 с.

- [6] Ганичев А.И., Качура В.П., Темнов А.Н. Малые колебания двух несмешивающихся жидкостей в подвижном цилиндрическом сосуде. В кн.: *Колебания упругих конструкций с жидкостью. Сб. науч. докл.* Суверенев В.Г., ред. Новосибирск, НЭТИ, 1974, с. 82–88.
- [7] Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. The free oscillations of a viscous two-layer fluid in a closed vessel. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, vol. 54, no. 1, pp. 39–45.
- [8] Чашечкин Ю.Д. Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 6 (57), с. 67–95.
- [9] Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Тимофеев А.С. Экспериментальное исследование поля скоростей параметрически возбуждаемых волн в двухслойной жидкости. *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1991, № 5, с. 161–166.
- [10] Harrison W.J. The influence of viscosity on the oscillations of superposed fluids. *Proc. London math. Soc.*, 1908, vol. 6-2, no. 1, pp. 396–405.
- [11] Thorpe S.A. On standing internal gravity waves of finite amplitude. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, no. 3, pp. 489–528.
- [12] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва, Наука, 1977, 815 с.
- [13] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика*. Москва, Наука, 1986. 735 с.
- [14] Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2016, № 3, с. 57–69.
- [15] Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Экспериментальное и теоретическое исследование колебаний твердого тела со слоистой жидкостью. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1752

Статья поступила в редакцию 20.06.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Колебания вязкой трехслойной жидкости в неподвижном баке. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 7.
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-7-1895>

Вин Ко Ко — стажер-исследователь кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: win.c.latt@gmail.com

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: antt45@mail.ru

Oscillations of a three-layer viscous fluid in a stationary tank

Win Ko Ko, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Due to the continued research into chemistry, biology, pharmaceuticals and rocket space technology, interest in the study of the dynamics of layered fluids has increased significantly. The paper focuses on oscillations of a three-layer viscous fluid, gives the formulation of the viscous fluid free oscillations problem. Within the research, we determined natural frequencies and damping coefficients of oscillations of the three-layer viscous fluid in a cylindrical vessel by means of the boundary layer method and a mechanical analog. Oscillations of the three-layer viscous fluid were considered as joint oscillations of two partial hydrodynamic systems, one of which corresponds to oscillations of the upper and middle viscous fluids, and the other one - to oscillations of the middle and lower fluids. Then, we determined the coefficients of viscous resistance in partial hydrodynamic systems of a two-layer viscous fluid. Using the mechanical analog of oscillations of the three-layer liquid, we derived the characteristic equation for determining natural frequencies of the hydrodynamic system under consideration. Next, we calculated the dependency of natural frequencies and liquid-liquid interface damping coefficients on the height of the middle layer and the density of the upper fluid. Finally, we analyzed and compared theoretical calculations with the results obtained by other researchers and experimental investigation. The paper gives the results of experimental studies of oscillations of the three-layer fluid in a stationary cylindrical tank.

Keywords: *three-layer viscous fluid, natural frequencies, mechanical analog, damping coefficients, solid body*

REFERENCES

- [1] Chernousko F.L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, soderzhashchimi vyazkuyu zhidkost* [Movement of a solid body with cavities containing a viscous fluid]. Moscow, CC USSR Academy of Sciences Publ., 1969, 230 p.
- [2] Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsiya — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 12. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1147
- [3] Tsvetkov D.O. *Mezhvedomstvenny nauchny sbornik «Dinamicheskie sistemy» (Dynamic systems)*, 2007, no. 22, pp. 73–82.
- [4] Moiseev G.A. *Dvizhenie tverdogo tela, imeyushchego polost, tselikom zapolnyayushchuyu dvumya nesmeshivayushchimisya zhidkostyami* [Motion of a solid body having a cavity completely filled with two immiscible liquids]. In: *Matematicheskaya fizika. Sb. statey* [Mathematical physics. Coll. papers]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1972, no. 12, pp. 66–73.
- [5] Kopachevskiy N.D., Temnov A.N. *Dep. v VINITI (Depositing of scientific papers in All-Russian Institute for Scientific and Technical Information)*, Moscow, 1983, no. 4531-83 DEP, 45 p.
- [6] Ganichev A.I., Kachura V.P., Temnov A.N. *Malye kolebaniya dvukh nesmeshivayushchikhsia zhidkostey v podvizhnom tsilindricheskom sosude* [Small oscillations of two immiscible liquids in a movable cylindrical vessel]. In: *Kolebaniya uprugikh konstruktsey s zhidkostyu. Sb. nauch. dokl.* [Oscillations of elastic structures with fluid. Coll. of sci. rep.]. Suverenev V.G., ed. Novosibirsk, NETI Publ., 1974, pp. 82–88.

- [7] Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. The free oscillations of a viscous two-layer fluid in a closed vessel. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, vol. 54, no. 1, pp. 39–45.
- [8] Chashechkin Yu.D. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2014, no. 6 (57), pp. 67–95.
- [9] Kalinichenko V.A., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya., Timofeev A.S. *Izv. AN SSSR. MZhG (Fluid Dynamics. A journal of USSR Academy of Sciences)*, 1991, no. 5, pp. 161–166.
- [10] Harrison W.J. The influence of viscosity on the oscillations of superposed fluids. *Proc. London math. Soc.*, 1908, vol. 6-2, no. 1, pp. 396–405.
- [11] Thorpe S.A. On standing internal gravity waves of finite amplitude. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, no. 3, pp. 489–528.
- [12] Sretenskiy L.N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motion of a fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 815 p.
- [13] Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. Tom VI. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 735 p.
- [14] Win Ko Ko, Temnov A.N. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2016, no. 3, pp. 57–69.
- [15] Win Ko Ko, Temnov A. N. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsiya — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1752

Win Ko Ko, Research Assistant, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: win.c.latt@gmail.com

Temnov A.N., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: antt45@mail.ru