

Моделирование соударений двух одинаковых осколков метеорного тела, расположенных друг за другом

© В.Т. Лукашенко¹, Ф.А. Максимов^{1,2}

¹Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, 123056, Россия

²МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119992, Россия

Разработан метод моделирования динамики системы, состоящей из осколков метеорного тела, с алгоритмом расчета соударений между телами. Реализация абсолютно упругого, неупругого и абсолютно неупругого ударов между отдельными телами осуществлена с использованием коэффициента восстановления удара. Значения коэффициента восстановления удара можно задавать отдельно для каждого соударения исходя из имеющихся характеристик сталкивающихся тел. Проведено численное исследование задачи о соударениях двух одинаковых осколков метеорного тела, изначально расположенных друг за другом вдоль направления движения. Показано, что при абсолютно упругом ударе тела будут периодически соударяться и существует равновесное максимальное расстояние между телами, к которому будет стремиться система. Установлено, что при неупругом ударе расстояние между телами со временем уменьшается и конфигурация системы осколков сводится к совместному полету тел непосредственно друг за другом. На задаче об абсолютно неупругом соударении одинаковых тел при небольшом начальном расстоянии и малом отклонении отстающего тела показано, что расположение тел непосредственно друг за другом является неустойчивым к малым колебаниям и не реализуется численно на больших временных интервалах.

Ключевые слова: метеорное тело, разрушение, осколки, моделирование соударений, сверхзвуковой полет, абсолютно упругий удар, неупругий удар, абсолютно неупругий удар, коэффициент восстановления удара

Введение. При полете в атмосфере метеорное тело постепенно разрушается под действием набегающего потока [1]. Если тело довольно массивное, оно будет проходить через несколько стадий дробления [2]. Каждая такая стадия характеризуется тем, что изначально единое тело распадается на группу близко расположенных осколков. Образовавшиеся осколки продолжают свое движение совместно как группа тел, однако конфигурация осколков изменяется со временем [3–5]: из-за разности аэродинамических сил, действующих на каждое отдельное тело, происходит перестроение и разлетов осколков [6]. Динамика подобных систем представляет существенный интерес как с точки зрения аэродинамики [7, 8], так и с точки зрения баллистики метеорных тел [9].

В работе [10] авторами был предложен метод моделирования динамики подобных систем, основанный на решении сопряженной задачи. При использовании этого метода аэродинамическая и баллистическая задачи решаются параллельно. Тестовые расчеты [10]

показали хорошее согласование результатов моделирования с теоретической оценкой скорости разлета двух одинаковых тел. Однако расчеты динамики систем тел [8, 11] показывают, что зачастую тела подходят близко друг к другу и между ними должно происходить соударение.

В данной работе приводится алгоритм для расчета соударений отдельных осколков метеорного тела, который дополняет метод, предложенный в работе [10]. Рассмотрены две различные модели соударений между телами [12]: модель абсолютно упругого удара и модель абсолютно неупругого удара. Показано, что можно провести обобщение этих двух моделей, и рассмотрена задача о последовательных соударениях двух одинаковых осколков метеорного тела, изначально расположенных на линии вдоль направления движения.

Моделирование динамики системы тел. Задается начальная конфигурация тел: набор координат тел в пространстве (X_i^0, Y_i^0) , $i = 1, \dots, n$. Предполагается, что есть направление, вдоль которого все тела имеют преобладающее движение, т. е. тела движутся со скоростью V_{cp}^0 вдоль направления Ox . После этого методом, рассмотренным в работе [13], решается задача об обтекании системы тел. При использовании этого метода предполагается, что система тел обтекается равномерным потоком с постоянной скоростью.

На следующем шаге решается баллистическая задача для системы тел в заданный момент времени t . В соответствии с уравнениями движения проводится перерасчет состояния системы через некоторый малый интервал времени Δt :

$$\begin{aligned} X_i^{t+\Delta t} &= X_i^t + (V_{xi}^t - V_{\text{cp}}^t)\Delta t; & V_{xi}^{t+\Delta t} &= V_{xi}^t + \frac{F_{xi}^t}{m_i} \Delta t; \\ Y_i^{t+\Delta t} &= Y_i^t + V_{yi}^t \Delta t; & V_{yi}^{t+\Delta t} &= V_{yi}^t + \frac{F_{yi}^t}{m_i} \Delta t. \end{aligned}$$

Здесь аэродинамические силы $\vec{F}_i^t = (F_{xi}^t, F_{yi}^t)$ рассчитываются по найденному распределению давления из решения задачи обтекания в момент времени t ; средняя скорость полета тел вдоль направления

движения рассчитывается как $V_{\text{cp}}^t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{xi}^t$; значение массы m_i зада-

ется в соответствии с предполагаемой внутренней структурой образовавшегося осколка и полагается постоянной. Вращение тел в данной постановке задачи не учитывается. Шаг интегрирования по времени Δt выбирается из условия ограничения на максимально возможное перемещение тел в системе [10].

Таким образом, каждое тело перемещается на расстояние, соответствующее относительному смещению данного тела в системе; итерационным методом можно проследить динамику системы тел. Отметим, что аналогичным образом исследуются аэродинамические свойства тел при испытаниях в аэродинамических трубах. Учитывается относительное положение тел, но не учитываются различия в скорости отдельных тел. Фиксируется полетное число Маха всей системы и рассматривается только влияние относительного положения тел в системе в каждый заданный момент времени t , но не их относительное движение в системе.

Алгоритм моделирования соударений между телами. Рассмотрим теперь непосредственно соударение тел. Для простоты ограничимся плоским случаем, когда тела являются однородными круговыми цилиндрами. В этом случае положение i -го тела в каждый момент времени t будет полностью определяться координатами центра масс (X_i^t, Y_i^t) и радиусом R_i тела. Будем говорить, что между i -м и j -м телом происходит соударение в момент перехода от t к $t + \Delta t$, если

$$\sqrt{(X_i^t - X_j^t)^2 + (Y_i^t - Y_j^t)^2} < R_i + R_j + C, \quad (1)$$

где константа C подбирается в зависимости от размера сеток тел [13] и от заданного максимального смещения тел за шаг времени Δt .

Пусть для определенности соударение происходит между телом 1 и телом 2 в некоторый фиксированный момент времени. Выберем направление соударения \vec{l} , задаваемое следующим образом:

$$\vec{l} = \left(\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}}, \frac{Y_2 - Y_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}} \right).$$

Тогда скорости тел можно разложить как

$$\vec{V}_1 = (V_{x1}, V_{y1}) = V_{l1}\vec{l} + V_{q1}\vec{q}; \quad \vec{V}_2 = (V_{x2}, V_{y2}) = V_{l2}\vec{l} + V_{q2}\vec{q},$$

где \vec{q} — направление, перпендикулярное \vec{l} .

Существуют две диаметрально различные модели столкновения твердых тел: абсолютно упругий удар и абсолютно неупругий удар [12].

При абсолютно упругом ударе кинетическая энергия тел сохраняется. Соответственно, для проекций скоростей вдоль направления соударения \vec{l} после столкновения верны соотношения

$$V_{l1}^{\Delta t} = \frac{(m_1 - m_2)V_{l1} + 2m_2V_{l2}}{m_1 + m_2}; \quad V_{l2}^{\Delta t} = \frac{(m_2 - m_1)V_{l2} + 2m_1V_{l1}}{m_1 + m_2}.$$

Отсюда изменение скоростей

$$\Delta V_1 = V_{11}^{\Delta t} - V_{11} = \frac{2m_2(V_{12} - V_{11})}{m_1 + m_2}; \quad \Delta V_2 = V_{12}^{\Delta t} - V_{12} = \frac{2m_1(V_{11} - V_{12})}{m_1 + m_2}.$$

При абсолютно неупругом ударе тела слипаются и движутся как единое целое. На этой основе можно воспользоваться упрощенной концепцией, предполагая, что потеря кинетической энергии при ударе идет на разрушение «перемычки» между телами. В этом случае абсолютно неупругий удар тел можно рассматривать как столкновение, при котором происходит осреднение компонент скоростей вдоль направления соударения, но тела не слипаются.

Согласно закону сохранения импульса,

$$V_{11}^{\Delta t} = V_{12}^{\Delta t} = \frac{m_1 V_{11} + m_2 V_{12}}{m_1 + m_2},$$

откуда следует, что

$$\Delta V_1 = V_{11}^{\Delta t} - V_{11} = \frac{m_2(V_{12} - V_{11})}{m_1 + m_2}; \quad \Delta V_2 = V_{12}^{\Delta t} - V_{12} = \frac{m_1(V_{11} - V_{12})}{m_1 + m_2}.$$

В общем виде формулы для изменения скоростей i -го и j -го тел можно записать как

$$\Delta V_i = \frac{(1+k)m_j(V_{1j} - V_{1i})}{m_i + m_j}; \quad \Delta V_j = \frac{(1+k)m_i(V_{1i} - V_{1j})}{m_i + m_j}, \quad (2)$$

где k — коэффициент восстановления удара [12]; V_{1i} , V_{1j} — соответствующие проекции скоростей на направление соударения \vec{l} .

При $k = 1$ происходит абсолютно упругий удар, а при $k = 0$ — абсолютно неупругий удар. В промежуточных случаях ($0 < k < 1$) говорят, что произошло неупругое столкновение между телами. Значение коэффициента k восстановления удара зависит от свойств веществ соударяющихся тел [14, 15].

Численное исследование задачи о полете двух одинаковых тел друг за другом. Представленный метод моделирования динамики, дополненный алгоритмом расчета соударений по формулам (1), (2), применен для решения задачи о сверхзвуковом полете системы из двух одинаковых тел, расположенных на линии вдоль направления полета. Рассматривались тела массой 1 кг и радиусом 0,027 м, летящие в начальный момент с одинаковой скоростью в 2000 м/с, при параметрах атмосферы, соответствующих высоте полета в 10 км по таблице стандартной атмосферы (ГОСТ 4401–81). Варьировались два

параметра: расстояние ΔX между центрами тел, отнесенное к их радиусу R , и коэффициент k восстановления удара.

В результате расчета получены картины течения около двух тел при безразмерном расстоянии между центрами тел $\Delta X/R = 4, 6$ и 14 в начальный момент времени (рис. 1). Расчеты методом установления выполнялись при использовании в качестве начального поля условий в набегающем потоке. При $\Delta X/R = 4$ между телами образуется циркуляционная зона течения, которая связывает тела. При увеличении расстояния между телами ($\Delta X/R = 6, 14$) циркуляционная зона разрушается, перед сзади летящим телом формируется отдельная ударная волна.

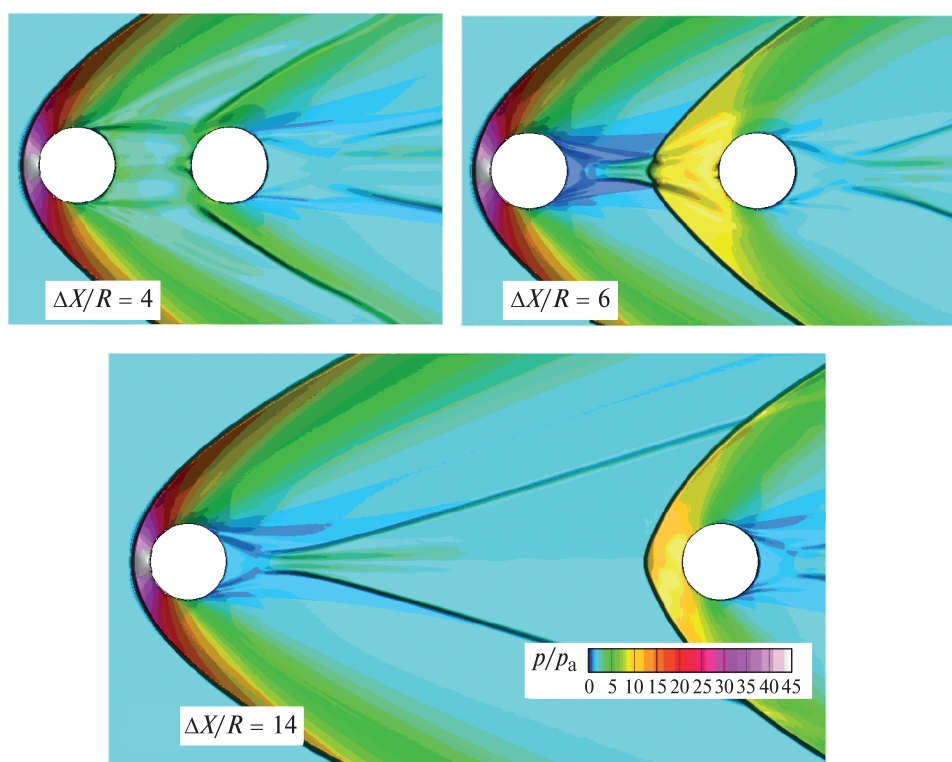


Рис. 1. Распределение давления по отношению к давлению p_a в атмосфере в начальный момент времени при различных расстояниях $\Delta X/R$ между центрами тел

Впереди летящее тело (см. рис. 1) имеет значительно большее сопротивление, поэтому сзади летящее тело будет его догонять. После соударения часть импульса сзади летящего тела будет передаваться впереди летящему телу и вследствие уменьшения скорости сзади летящее тело начнет отставать. Затем ввиду меньшего аэродинамического сопротивления сзади летящее тело не только компенсирует разность скоростей тел, но и наберет скорость, достаточную для того,

чтобы догнать впереди летящее тело. Далее процесс повторяется. Таким образом, образуется своеобразный «маятник», амплитуда которого изменяется в зависимости от коэффициента восстановления удара. Руководствуясь указанными соображениями, при $k = 1$ можно ожидать сохранения амплитуды колебаний.

Результаты расчетов для $k = 1$, представленные на рис. 2, в целом подтверждают данные предположения. Отметим, что характер изменения расстояния между телами (уменьшение его при большом начальном расстоянии и увеличение при малом начальном расстоянии) позволяет предположить, что для системы в заданных условиях существует некоторое равновесное расстояние.

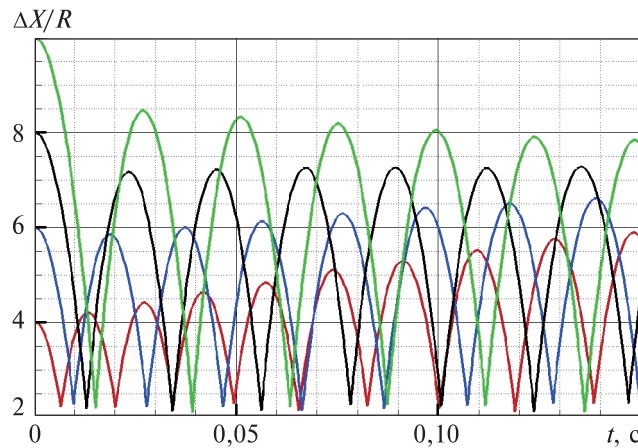


Рис. 2. Изменение расстояния между центрами тел с течением времени при абсолютно упругом ударе

Изменение скорости тел описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} m \frac{dV_1}{dt} = -\frac{1}{2} c_{x1} \rho_a V_1^2 S; \\ m \frac{dV_2}{dt} = -\frac{1}{2} c_{x2} \rho_a V_2^2 S, \end{cases} \quad (3)$$

где m — масса тела; c_{x1} , c_{x2} — аэродинамические коэффициенты сопротивления первого и второго тела соответственно; ρ_a — плотность воздуха в атмосфере; S — характерная площадь тела.

Если ввести среднюю скорость $V = (V_1 + V_2)/2$ и предположить, что $V_1^2 \approx V^2$ и $V_2^2 \approx V^2$, то, вычитая из первого уравнения системы (3) второе уравнение и складывая исходные уравнения системы, получим:

$$\frac{d}{dt}(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}(-c_{x1} + c_{x2}) \frac{\rho_a}{m} V^2 S;$$

$$\frac{d}{dt}(2V) = \frac{1}{2}(-c_{x1} - c_{x2}) \frac{\rho_a}{m} V^2 S. \quad (4)$$

Исключив из уравнений (4) квадрат скорости, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}(V_1 - V_2) = 2b \frac{dV}{dt}, \quad (5)$$

где $b = \frac{c_{x1} - c_{x2}}{c_{x1} + c_{x2}}$.

Уравнение (5) связывает изменение относительной скорости между телами и изменение средней скорости системы тел.

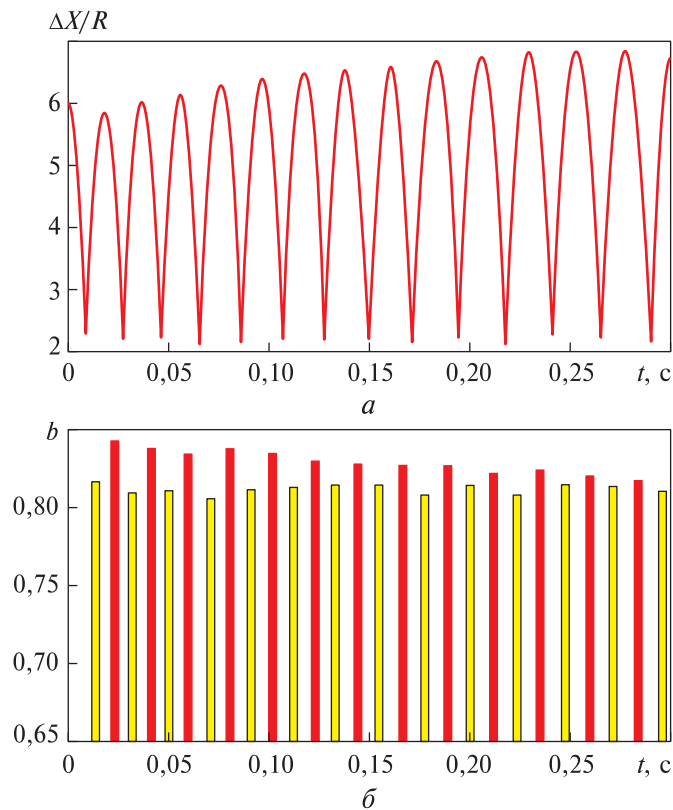


Рис. 3. Изменение расстояния между центрами тел (*a*) и коэффициента *b* (*б*) с течением времени при абсолютно упругом ударе для начального расстояния между центрами тел $\Delta X/R = 6$ (желтый цвет — за время сближения тел; красный — за время разлета)

Изменение расстояния между центрами тел при начальном расстоянии между ними $\Delta X/R = 6$ приведено на рис. 3, а. При длительном расчете максимальное расстояние между центрами тел стремится к некоторому постоянному значению.

Среднее значение изменения коэффициента b показано на рис. 3, б: желтым цветом выделено среднее значение b за время сближения тел, красным — за время разлета. Видно, что во время разлета среднее значение коэффициента b выше, чем во время сближения. Это означает, что имеется дисбаланс, который приводит к увеличению максимальной скорости разлета и максимального расстояния между центрами тел. Со временем разность значений коэффициента b уменьшается, устанавливается равновесное максимальное расстояние между центрами тел.

В рассмотренной системе равновесное значение максимального расстояния между центрами тел $\Delta X/R \approx 6,5 \dots 7,0$. При этом стремление системы к равновесному расстоянию между центрами тел осуществляется только при коэффициенте восстановления удара k , близком к единице.

Результаты расчетов для неупругого удара ($k < 1$) представлены на рис. 4. Уже при $k = 0,90$ потери кинетической энергии при соударении тел приводят к тому, что колебания постепенно затухают. Причем чем ниже значение коэффициента восстановления удара, тем быстрее колебания затухают.

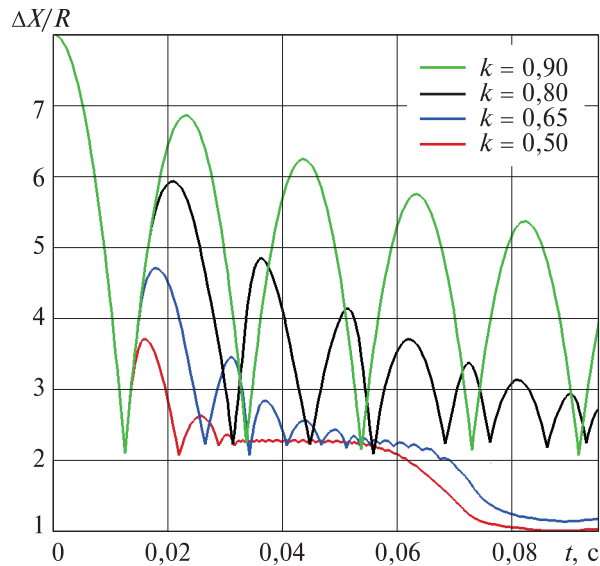


Рис. 4. Изменение расстояния между центрами тел с течением времени при неупругом ударе

Отдельно отметим переход системы к полету тел непосредственно друг за другом при небольших значениях коэффициента восстановления удара ($k = 0,65; 0,50$). На рис. 4 видно, что затухание колебаний приводит к непродолжительному полету тел на минимально допустимом расстоянии, задаваемом алгоритмом (1) и равном приблизительно 2,3 радиуса тел. В нашей постановке задачи положение тел на одной прямой должно сохраняться в силу симметрии, однако со временем происходит проскальзывание тел относительно друг друга с их последующим разлетом по вертикали, что характеризуется резким уменьшением значения $\Delta X/R$ (см. рис. 4).

Устойчивость полета двух одинаковых тел друг за другом. Рассмотрим вспомогательную задачу на устойчивость полета двух тел, расположенных одно за другим. Выберем относительно небольшое начальное расстояние между телами и зададим малое отклонение для сзади летящего тела вдоль оси, перпендикулярной направлению движения тел: $\Delta X/R = 3; \Delta Y/R = 0,1$. Коэффициент восстановления удара k зададим равным нулю (абсолютно неупругий удар).

На рис. 5 представлены результаты численных расчетов изменения компоненты скорости V_y по направлению, перпендикулярному направлению начального движения, а также значений аэродинамических коэффициентов сопротивления c_x и подъемной силы c_y в зависимости от времени. На рис. 6 приведены последовательные картины течения.

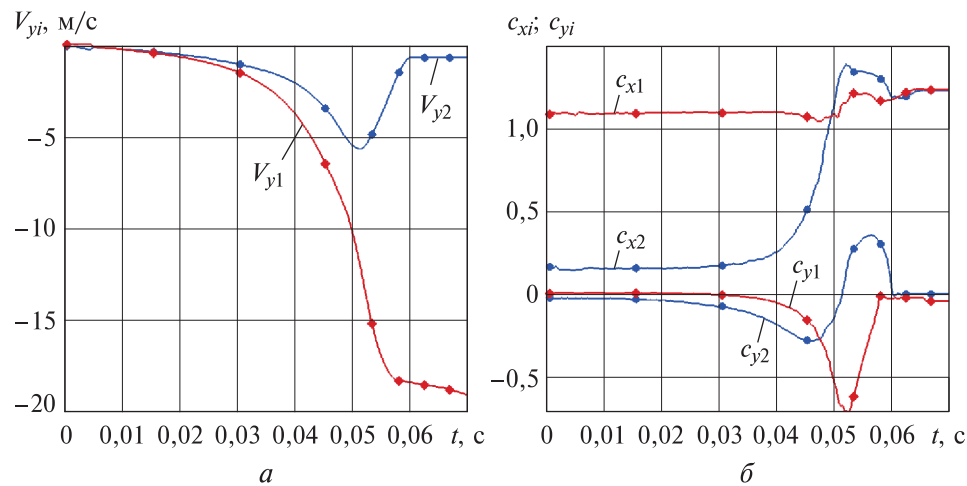


Рис. 5. Изменение компоненты скорости V_{yi} (а) и аэродинамических коэффициентов c_{xi} , c_{yi} (б) с течением времени (красный цвет — для впереди летящего тела; синий — для сзади летящего тела)

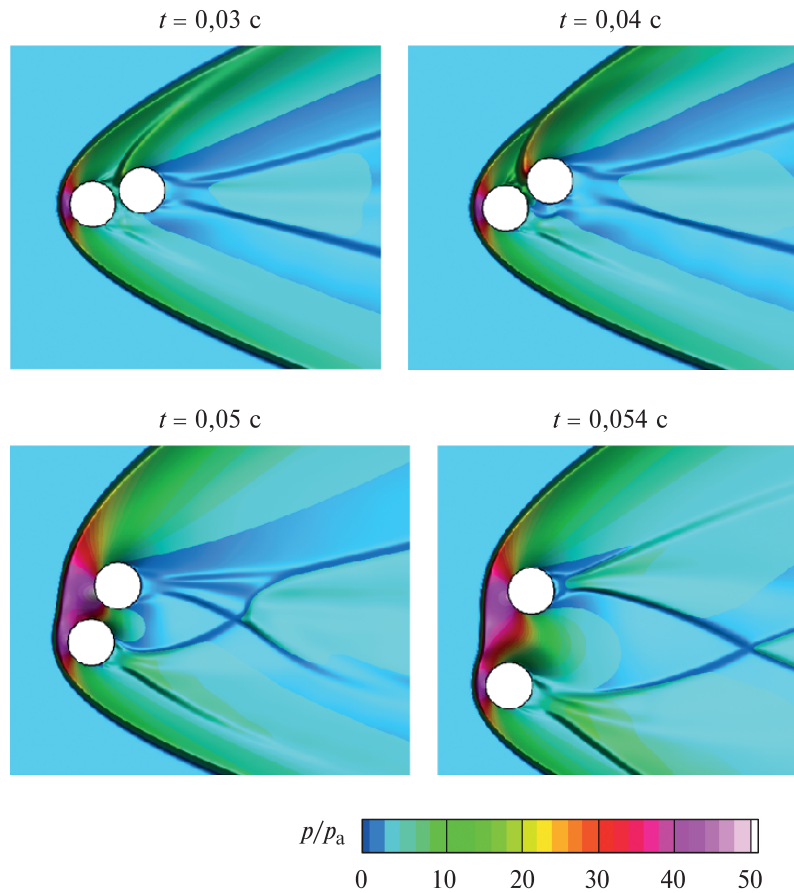


Рис. 6. Распределение давления по отношению к давлению p_a в атмосфере в различные моменты времени

Можно выделить четыре этапа взаимодействия тел:

1) сближение тел, характеризующееся относительным постоянством аэродинамических коэффициентов и небольшим нарастанием значения V_y в силу асимметрии ($t < 0,03 \text{ c}$);

2) полет тел рядом друг с другом, который сопровождается постепенным образованием дозвуковой области повышенного давления, расположенной над лидирующим телом и перед отстающим телом ($0,03 \text{ c} < t < 0,045 \text{ c}$);

3) проскальзывание тел относительно друг друга с образованием общего фронта головной ударной волны и последующим выталкиванием впереди летящего тела в боковое направление ($0,045 \text{ c} < t < 0,06 \text{ c}$);

4) выход тел на изолированное обтекание при достаточно большом удалении друг от друга ($t > 0,06 \text{ c}$).

Таким образом, при коэффициенте восстановления удара $k = 0$ даже небольшое начальное отклонение от линии направления движения со временем приводит к постепенному проскальзыванию тел

относительно друг друга и к их дальнейшему разлету. Однако отметим, что при высоких относительных скоростях подлета тел друг к другу и при $k > 0$ картина взаимодействия тел может быть значительно более сложной, и этот случай требует дальнейшего изучения.

Заключение. Разработанный метод моделирования динамики системы дополнен алгоритмом для моделирования отдельных соударений между телами. Представленный алгоритм оказалось возможным реализовать в обобщении на модели абсолютно упругого, неупругого и абсолютно неупругого ударов без слипания тел с использованием коэффициента восстановления удара k . Алгоритм позволяет задавать коэффициент k для каждого отдельного соударения в зависимости от характеристик сталкивающихся тел. Метод моделирования применен для решения задачи о последовательных соударениях двух одинаковых тел, расположенных изначально на линии вдоль направления движения. Выявлено, что при абсолютно упругом ударе существует равновесное максимальное расстояние между телами, к которому стремится система при различных начальных состояниях. При неупругом ударе расстояние между телами будет со временем уменьшаться, что постепенно приведет к полету тел рядом друг с другом. Установлено, что совместный полет тел друг за другом в непосредственной близости оказывается неустойчивым к малым колебаниям и численно не реализуется на больших временных интервалах.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Стулов В.П., Мирский В.Н., Вислый А.И. *Аэродинамика болидов*. Москва, Наука, 1995, 240 с.
- [2] Кринов Е.Л. *Железный дождь*. Москва, Наука, 1981, 192 с.
- [3] Ждан И.А., Стулов В.П., Стулов П.В. Аэродинамическое взаимодействие двух тел в сверхзвуковом потоке. *Докл. Академии наук*, 2004, т. 396, № 2, с. 191–193.
- [4] Ждан И.А., Стулов В.П., Стулов П.В. Трехмерные конфигурации фрагментов разрушенного тела в сверхзвуковом потоке. *Докл. Академии наук*, 2005, т. 404, № 4, с. 486–490.
- [5] Voiko V.M., Klinkov K.V., Poplavskii S.V. Collective bow shock ahead of a transverse system of spheres in a supersonic flow behind a moving shock wave. *Fluid Dynamics*, 2004, vol. 39, no. 2, pp. 330–338.
- [6] Барри Н.Г. Модель разлета фрагментов разрушенного метеороида. *Вестник Московского университета. Сер. I. Математика. Механика*, 2005, № 4, с. 56–59.
- [7] Андреев А.А., Холодов А.С. О сверхзвуковом обтекании затупленных тел с учетом интерференции. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1989, т. 29, № 1, с. 142–147.
- [8] Барри Н.Г. Аэродинамика фрагментов метеорного тела. Эффект коллимации. *Астрономический вестник*, 2010, т. 44, № 1, с. 59–64.
- [9] Андрущенко В.А., Сызранова Н.Г., Шевелев Ю.Д. Моделирование падения Челябинского метеорита. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2013, т. 5, № 6, с. 927–940.

- [10] Лукашенко В.Т., Максимов Ф.А. Математическая модель разлета осколков метеорного тела после разрушения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 9 (69). DOI: 10.18698/2308-6033-2017-9-1669
- [11] Барри Н.Г. Динамика двух сферических объектов в сверхзвуковом потоке. *Докл. Академии наук*, 2010, т. 434, № 5, с. 620, 621.
- [12] Пановко Я.Г. *Введение в теорию механического удара*. Москва, Наука, 1977, 224 с.
- [13] Максимов Ф.А. Сверхзвуковое обтекание системы тел. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2013, т. 5, № 6, с. 969–980.
- [14] Кочетков А.В., Федотов П.В. Некоторые вопросы теории удара. *Интернет-журнал «Наукovedение»*, 2013, № 5.
URL: <https://naukovedenie.ru/PDF/110tvn513.pdf>
- [15] Тригуба А.М., Штагер Е.В. Приближенные способы оценки коэффициента восстановления при соударении упругих тел. *Современные наукоемкие технологии*, 2014, № 5-1, с. 91–93.

Статья поступила в редакцию 30.03.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Лукашенко В.Т., Максимов Ф.А. Моделирование соударений двух одинаковых осколков метеорного тела, расположенных друг за другом. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 6. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-6-1884>

Лукашенко Владислав Тарасович — младший научный сотрудник Института автоматизации проектирования РАН. Область научных интересов: газовая динамика, вычислительная математика, математическое моделирование природных явлений, движение тел в космическом пространстве, жидких и газовых средах.
e-mail: lukashenko-vt@yandex.ru

Максимов Федор Александрович — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник Института автоматизации проектирования РАН, профессор кафедры аэромеханики и газовой динамики МГУ им. М.В. Ломоносова. Область научных интересов: аэродинамика, численное моделирование, математическое моделирование природных явлений. e-mail: f_a_maximov@mail.ru

Simulation of collisions between two identical meteoroid fragments arranged one behind the other

© V.T. Lukashenko¹, F.A. Maksimov^{1,2}

¹Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences,
Moscow, 123056, Russia

²Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119992, Russia

To calculate the dynamics of a system of meteoroid fragments, a simulation method has been developed with an algorithm for calculating collisions between individual bodies. The algorithm for calculating collisions allows one to simulate absolutely elastic, inelastic and absolutely inelastic impacts between individual bodies with the help of a given coefficient of the impact recovery. The impact recovery coefficient can be set separately for each collision based on the known characteristics of the colliding bodies. We carried out a numerical study of the problem of collisions between identical meteoroid fragments initially located one behind the other along the direction of motion. The study shows that bodies will periodically collide in the case of absolutely elastic impact; there is an equilibrium maximum distance between the bodies to which the system will evolve. In the case of an inelastic impact, the distance between the bodies decreases over time; the configuration evolves to the joint flight of the bodies located one right after another. The problem of an absolutely inelastic collision between the identical bodies located within a small initial distance and with a small deviation in position of the backward body shows that the location of the bodies directly behind each other is unstable to small oscillations and is not implemented numerically at large times.

Keywords: simulation, dynamics, meteoroid, destruction, fragments, collisions, supersonic, fly

REFERENCES

- [1] Stulov V.P., Mirsky V.N., Visly A.I. *Aerodinamika bolidov* [Aerodynamics of bolides]. Moscow, Nauka Publ., 1995, 240 p.
- [2] Krinov E.L. *Zheleznyi dozhd* [Iron rain]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 192 p.
- [3] Zhdan I.A., Stulov V.P., Stulov P.V. *Doklady Akademii nauk — Doklady Physics*, 2004, vol. 49 (5), pp. 315–317.
- [4] Zhdan I.A., Stulov V.P., Stulov P.V. *Doklady Akademii nauk — Doklady Physics*, 2005, vol. 50, no. 10, pp. 514–518.
- [5] Boiko V.M., Klinkov K.V., Poplavskii S.V. Collective bow shock ahead of a transverse system of spheres in a supersonic flow behind a moving shock wave. *Fluid Dynamics*, 2004, vol. 39, no. 2, pp. 330–338.
- [6] Barri N.G. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mehanika — Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2005, vol. 60 (4), pp. 20–22.
- [7] Andreyev A.A., Kholodov A.S. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki — USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, vol. 29 (1), pp. 142–147.
- [8] Barri N.G. *Astronomicheskiy vestnik — Solar System Research*, 2010, vol. 44 (1), pp. 55–59.
- [9] Andruschenko V.A., Syzranova N.G., Shevelev Yu.D. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie — Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 6, pp. 927–940.

- [10] Lukashenko V.T., Maksimov F.A. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2017, no. 9 (69).
DOI: 10.18698/2308-6033-2017-9-1669
- [11] Barri N.G. *Doklady Akademii nauk — Doklady Physics*, 2010, vol. 434, no. 5, pp. 620–621.
- [12] Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskogo udara* [Introduction to the theory of mechanical impact]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 224 p.
- [13] Maksimov F.A. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie — Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5 (6), pp. 969–980.
- [14] Kochetkov A.V., Fedotov P.V. *Internet-zhurnal «Naukovedenie» (Internet journal Science studies)*, 2013, no. 5. Available at:
<https://naukovedenie.ru/PDF/110tvn513.pdf>
- [15] Triguba A.M., Shtager E.V. *Sovremennyye naukoemkie tehnologii — Modern high technologies*, 2014, no. 5-1, pp. 91–93.

Lukashenko V.T. (b. 1991), junior researcher, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences. Research interests: gas dynamics, computational mathematics, mathematical modeling of natural phenomena, the movement of bodies in space, liquid and gaseous media. e-mail: lukashenko-vt@yandex.ru

Maksimov F.A. (b. 1960), Dr. Sc. (Eng.), leading researcher, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences; Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University. Research interests: aerodynamics, numerical modeling, mathematical modeling of natural phenomena.
e-mail: f_a_maximov@mail.ru