УДК 531.38 DOI: 10.18698/2308-6033-2019-5-1883

Теоретическое и экспериментальное исследования колебаний твердого полуцилиндра с полостью, заполненной слоистой жидкостью

© А.Н. Темнов, Вин Ко Ко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Приведены постановка задачи и результаты исследований динамических характеристик и устойчивости малых колебаний твердого тела, имитирующего космический заправщик, топливный бак которого содержит криогенную жидкость. Отличительной особенностью криогенной жидкости являются низкая температура и различная плотность ее частиц, что значительно усложняет исследование гидродинамических задач. Криогенная жидкость моделировалась с помощью слоев несмешивающихся жидкостей. Получены уравнения плоского движения твердого тела с полостью, содержащей три несмешивающиеся несжимаемые идеальные жидкости. Исследованы области устойчивости движения твердого полуцилиндра с цилиндрической полостью, наполненной тремя несмешивающимися жидкостями. Приведены результаты экспериментального исследования колебаний полуцилиндра с двумя несмешивающимися жидкостями.

Ключевые слова: *несмешивающиеся несжимаемые идеальные жидкости, механическая система, область устойчивости, собственная частота колебаний, твердое тело*

Введение. Задача динамики твердых тел, которые имеют полости, наполненные жидкостью, — одна из классических задач механики [1, 2]. Развитие авиации и космонавтики в 1950–80-е гг. дало новый импульс исследованиям, посвященным динамики тел с полостями, частично заполненными жидкостью. Отметим здесь работы К.С. Колесникова, А.А. Пожалостина, Н.Н. Моисеева, А.А. Петрова, В.В. Румянцева, Г.Н. Микишева, Б.И. Рабиновича, Г.С. Нариманова, Л.В. Докучаева, И.А. Луковского и Ф.Л. Черноусько [3–14]. Работы этих и многих других ученых, их участие в различных конференциях и симпозиумах сформировали советскую и российскую школу динамики тел с полостями, заполненными жидкостью.

Дальнейшее развитие современной техники привело к формированию нового направления в изучении динамики тел с полостями, наполненными слоисто-неоднородной жидкостью. Появились работы о колебаниях слоисто-неоднородной и непрерывно стратифицированной жидкостей, заполняющих частично или полностью неподвижный сосуд замкнутой формы [15–20].

Исследование колебаний неоднородных сложных гидродинамических систем — актуальная задача изучения динамики твердых тел, полости которых наполнены слоистой жидкостью. Изучение процессов, связанных с расслоением жидкости, важно как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения. Интерес к этому исследованию обусловлен большим спектром научных задач и практических приложений, связанных с использованием криогенных жидкостей в ракетно-космической технике. Цель предлагаемой работы состояла в получении уравнений движения несвободного твердого тела со слоистой жидкостью и выявлении их качественного отличия от уравнений движения твердого тела с однородной жидкостью.

Вывод уравнения движения твердого тела с полостью, содержащей три жидкости. Введем системы координат $O_i x_i y_i z_i$ $(i = 0, 1, 2)$ с началами координат, расположенными на поверхностях Γ_1, Γ_2 разделов жидкостей и на дне полости, и систему координат $Oxyz$ с началом в полюсе O.

Для составления уравнений движения твердого тела с тремя жидкостями воспользуемся теоремами об изменении количества движения и об изменении момента количества относительного движения материальной системы твердое тело — жидкость, записанными в виде

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(e)} + M\vec{g}; \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(e)} + \vec{r}_{\text{т}C} \times m_{\text{т}}\delta\vec{g} + \vec{M}_O(-M\ddot{\vec{u}}) + \delta(\vec{r}_{0C} \times m_0\vec{g}) + \\ + \delta(\vec{r}_{1C} \times m_1\vec{g}) + \delta(\vec{r}_{2C} \times m_2\vec{g}), \tag{2}$$

где

$$\vec{Q} = M\dot{\vec{u}} + M\dot{\vec{r}}_C + m_0\delta\dot{\vec{r}}_{0C} + m_1\delta\dot{\vec{r}}_{1C} + m_2\delta\dot{\vec{r}}_{2C}; \tag{3}$$

$$\vec{K}_O = J_{\text{т}} \cdot \dot{\vec{\theta}} + \sum_{i=0}^{2} \rho_i \int_{\tau_i} \vec{r}_i \times \nabla \frac{\partial \chi_i}{\partial t} d\tau_i. \tag{4}$$

В формулах (1)–(4) используются следующие обозначения: $\vec{Q}$ — вектор количества движения рассматриваемой механической системы; $\vec{F}^{(e)}$ — главный вектор всех внешних сил, приложенных к телу; $M = m_{\text{т}} + m_0 + m_1 + m_2$ — суммарная масса всей гидромеханической системы ($m_{\text{т}}$, m_0, m_1, m_2 — масса твердого тела и каждой из трех жидкостей соответственно); $\vec{K}_O$ — вектор момента количества относительного движения тела с жидкостью в связанной системе отсчета $Oxyz$; $\vec{M}_O^{(e)}$ — главный момент всех внешних сил относительно полюса O; $\vec{r}_{\text{т}C}$ — радиус-вектор центра масс твердого тела; $\vec{M}_O(-M\ddot{\vec{u}})$ — момент сил инерции относительно полюса O; $\vec{u}$ — вектор малого смещения полюса O; $\vec{r}_{iC}$ $(i = 0, 1, 2)$ — радиусы-векторы центра масс i-й жидкости; $\vec{r}_C = (x_C, y_C, z_C)$ — радиус-вектор центра масс твердого тела и затвердевших жидкостей; $J_{\text{т}}$ — тензор моментов инерции твердого тела относительно полюса O; $\vec{\theta}$ — вектор малого угла поворота относительно системы $Oxyz$; ρ_i — плотность слоя i-й идеальной жидкости; $\vec{r}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ — радиусы-векторы, определяющие положения частиц i-й жидкости, начало которых совпадает с началом систем координат O_0x_0yz, O_1x_1yz, O_2x_2yz соответственно; χ_i — потенциал абсолютных смещений частиц i-й жидкости.

В уравнении (3) $\delta\vec{r}_{iC}$ $(i = 0, 1, 2)$ — изменения положения центра масс каждой жидкости в возмущенном движении — определяются формулами:

$$\delta\vec{r}_{iC} = \frac{\rho_i}{m_i}\int\limits_{\tau_i}\delta\vec{r}_i d\tau_i = \frac{\rho_i}{m_i}\int\limits_{\tau_i}\vec{w}_i^{(r)} d\tau_i = \frac{\rho_i}{m_i}\int\limits_{\tau_i}\vec{w}_i^{(r)}\cdot\nabla\vec{r}_i d\tau_i =$$

$$= \frac{\rho_i}{m_i}\int\limits_{\tau_i}\nabla\cdot(\vec{r}_i\vec{w}_i^{(r)})d\tau_i = \frac{\rho_i}{m_i}\oint\limits_{S_i\cup\Gamma_{1,2}}\vec{r}_i\vec{w}_i^{(r)}dS_i = \frac{\rho_i}{m_i}\int\limits_{\Gamma_{1,2}}\vec{r}_i\vec{w}_i^{(r)}d\Gamma_{1,2}. \qquad (5)$$

Вектор относительного смещения частиц i-й жидкости

$$\vec{w}_i^{(r)} = \nabla\chi_i - \vec{\theta}\times\vec{r}_i = \nabla(\vec{\theta}\cdot\vec{\psi}_i) + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{1n}\nabla\varphi_{0n}(x_0, y, z) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{1n}\nabla\varphi_{11n}(x_1, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2n}\nabla\varphi_{12n}(x_1, y, z) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2n}\nabla\varphi_{2n}(x_2, y, z) - \vec{\theta}\times\vec{r}_i, \qquad (6)$$

где $\vec{\psi}_i$ — потенциал скоростей i-й жидкости при вращательном движении тела; σ_{1n}, σ_{2n} — обобщенные координаты волновых движений поверхностей Γ_1, Γ_2 разделов жидкостей соответственно; φ — потенциал собственных колебаний жидкостей.

Преобразуем формулу (3), используя выражения (5), (6) и принимая во внимание граничные условия «жесткой» крышки и малость колебаний. Тогда получим следующее выражение для вектора количества движения рассматриваемой гидромеханической системы:

$$\vec{Q} = M\dot{\vec{u}} + M\dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_C + \rho_0 \int_{\Gamma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{r}_0 \dot{\sigma}_{1n}(t) \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial \nu_0} d\Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{r}_1 \dot{\sigma}_{1n}(t) \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial \nu_1} d\Gamma_1 +$$

$$+ \rho_1 \int_{\Gamma_2} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{r}_1 \dot{\sigma}_{2n}(t) \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial \nu_1} d\Gamma_2 + \rho_2 \int_{\Gamma_2} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{r}_2 \dot{\sigma}_{2n}(t) \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial \nu_2} d\Gamma_2,$$

где ν_i — внешняя нормаль к смачиваемой поверхности S_i.

Воспользовавшись теоремой об изменении количества движения, запишем уравнение (1) в окончательном виде:

$$M\ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{\theta}} \times \vec{S} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} = \vec{F}^{(e)} + M\vec{g}, \qquad (7)$$

где

$$\vec{S} = M\vec{r}_C;$$

$$\vec{\lambda}_{1n} = \rho_0 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial \nu_0} d\Gamma_1 - \rho_1 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial \nu_1} d\Gamma_1;$$

$$\vec{\lambda}_{2n} = \rho_1 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial \nu_1} d\Gamma_2 - \rho_2 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial \nu_2} d\Gamma_2,$$

так как на поверхностях разделов Γ_1, Γ_2 векторы $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ принимают значения $\vec{r}_{\Gamma_1}$ и $\vec{r}_{\Gamma_2}$ соответственно ($\vec{S}$ — вектор статического момента всей гидравлической системы).

В уравнении (7) принято, что в условиях малых колебаний

$$\dot{\vec{r}}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}_C}{dt} + \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_C = \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_C,$$

так как $\tilde{d}\vec{r}_C / dt = 0$.

Преобразуем выражение (4) для кинетического момента. Используя представление для потенциалов $\chi_i(x_i, y, z, t)$, формулы Грина и принимая во внимание граничные условия, получим

$$\rho_0 \int\limits_{\tau_0} \vec{r}_0 \times \nabla \frac{\partial \chi_0}{\partial t} d\tau_0 = \rho_0 \oint\limits_{S_0} \vec{r}_0 \times \vec{\mathrm{v}}_0 \frac{\partial \chi_0}{\partial t} dS_0 = \rho_0 \oint\limits_{S_0} \frac{\partial \vec{\psi}_0}{\partial \nu_0} \frac{\partial \chi_0}{\partial t} dS_0 =$$

$$= \rho_0 \int\limits_{S_0} \frac{\partial \vec{\psi}_0}{\partial \nu_0} (\vec{\psi}_0 \cdot \dot{\vec{\theta}}) dS_0 + \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_0} \dot{\sigma}_{1n} \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial \nu_0} d\Gamma_1 =$$

$$= J_0 \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_0 \dot{\sigma}_{1n} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_0} \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial \nu_0} d\Gamma_1; \tag{8}$$

$$\rho_1 \int\limits_{\tau_1} \vec{r}_1 \times \nabla \frac{\partial \chi_1}{\partial t} d\tau_1 = \rho_1 \oint\limits_{S_1} \vec{r}_1 \times \vec{\mathrm{v}}_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial t} dS_1 = \rho_1 \oint\limits_{S_1} \frac{\partial \vec{\psi}_1}{\partial \nu_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial t} dS_1 =$$

$$= \rho_1 \int\limits_{S_1} \frac{\partial \vec{\psi}_1}{\partial \nu_1} (\vec{\psi}_1 \cdot \dot{\vec{\theta}}) dS_1 + \rho_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_1} \dot{\sigma}_{1n} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial \nu_1} d\Gamma_1 +$$

$$+ \rho_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_2} \dot{\sigma}_{2n} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial \nu_2} d\Gamma_2 = J_1 \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_1 \dot{\sigma}_{1n} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_1} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial \nu_1} d\Gamma_1 +$$

$$+ \rho_1 \dot{\sigma}_{2n} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_2} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial \nu_2} d\Gamma_2; \tag{9}$$

$$\rho_2 \int\limits_{\tau_2} \vec{r}_2 \times \nabla \frac{\partial \chi_2}{\partial t} d\tau_2 = \rho_2 \oint\limits_{S_2} \vec{r}_2 \times \vec{\mathrm{v}}_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial t} dS_2 = \rho_2 \oint\limits_{S_2} \frac{\partial \vec{\psi}_2}{\partial \nu_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial t} dS_2 =$$

$$= \rho_2 \int\limits_{S_0} \frac{\partial \vec{\psi}_2}{\partial \nu_2} (\vec{\psi}_2 \cdot \dot{\vec{\theta}}) dS_2 + \rho_2 \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_2} \dot{\sigma}_{2n} \vec{\psi}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial \nu_2} d\Gamma_2 =$$

$$= J_2 \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_2 \dot{\sigma}_{2n} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_2} \vec{\psi}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial \nu_2} d\Gamma_2, \tag{10}$$

где J_i $(i = 0, 1, 2)$ — тензоры присоединенных моментов инерции i-й жидкости относительно полюса O, которые с учетом граничных условий «жесткой» крышки совпадают с тензорами моментов инерции эквивалентного тела.

Используя выражения (4), (6) и (8)–(10), преобразуем уравнение (2), описывающее изменение момента количества относительного движения. В результате уравнение вращательного движения твердого полуцилиндра с полостью, наполненной тремя жидкостями, примет следующий вид:

$$\left[J_k + \sum_{i=0}^{2}\left(J_i + \sum_{n=1}^{\infty} J_{in}\right)\right]\cdot\ddot{\vec{\theta}} + g(\vec{S}\times\vec{\theta}) + \sum_{n=1}^{\infty}\vec{\gamma}_{1n}\ddot{\sigma}_{1n} +$$

$$+g\sum_{n=1}^{\infty}\vec{\gamma}^*_{1n}\sigma_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty}\vec{\gamma}_{2n}\ddot{\sigma}_{2n} + g\sum_{n=1}^{\infty}\vec{\gamma}^*_{2n}\sigma_{2n} + \vec{S}\times\ddot{\vec{u}} = \vec{M}_O^{(e)}, \qquad (11)$$

где

$$\vec{\gamma}_{1n} = \rho_0 \int_{\Gamma_0} \vec{\psi}_0 \frac{\partial\varphi_{0n}}{\partial\nu_0} d\Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_1} \vec{\psi}_1 \frac{\partial\varphi_{11n}}{\partial\nu_1} d\Gamma_1;$$

$$\vec{\gamma}^*_{1n} = \rho_0 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_0 \frac{\partial\varphi_{0n}}{\partial\nu_0} d\Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_1 \frac{\partial\varphi_{11n}}{\partial\nu_1} d\Gamma_1;$$

$$\vec{\gamma}_{2n} = \rho_1 \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_1 \frac{\partial\varphi_{12n}}{\partial\nu_2} d\Gamma_2 + \rho_2 \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_2 \frac{\partial\varphi_{2n}}{\partial\nu_2} d\Gamma_2;$$

$$\vec{\gamma}^*_{2n} = \rho_1 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_1 \frac{\partial\varphi_{12n}}{\partial\nu_2} d\Gamma_2 + \rho_2 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_2 \frac{\partial\varphi_{2n}}{\partial\nu_2} d\Gamma_2.$$

Исследование устойчивости движения твердого полуцилиндра с полостью, наполненной тремя несмешивающимися жидкостями. Рассмотрим постановку задачи. Пусть однородное тело массой $m_т$, имеющее форму полуцилиндра радиусом R, с закрепленным на нем прозрачным круглым цилиндром, полностью наполненным тремя несмешивающимися жидкостями, расположено на горизонтальной плоскости и выведено из состояния покоя (рис. 1). Рассмотрим малые колебания такой механической системы в предположении, что проскальзывание по плоскости и трение качения отсутствуют. Для этого случая $\vec{\theta} = \vartheta\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — единичный вектор в направлении оси, перпендикулярной плоскости Oxy.

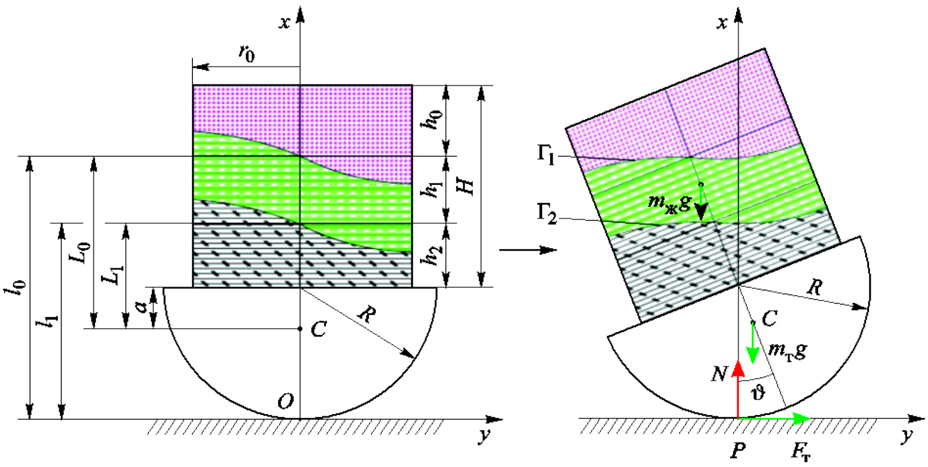


Рис. 1. Схема полуцилиндра с закрепленным на нем круглым цилиндром, наполненным трехслойной жидкостью

Предположив, что полуцилиндр движется без скольжения, имеем уравнения связи:

$$y_C = R - a\sin\vartheta; \quad x_C = R - a\cos\vartheta.$$

Для случая малых колебаний $(\sin\vartheta \approx \vartheta,\ \cos\vartheta \approx 1)$ находим $\ddot{y}_C,\ \ddot{x}_C$ и, используя полученные выражения, преобразуем уравнения (7), (11). В результате получим следующее дифференциальное уравнение вращательного движения полуцилиндра с жидкостями:

$$J_p\ddot{\vartheta} + S^* g\vartheta - g\sum_{n=1}^{\infty}(m'_{1n} - m'_{0n})\sigma_{1n} - g\sum_{n=1}^{\infty}(m'_{2n} - m'_{1n})\sigma_{2n} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[m'_{2n}(l_1 - A_{2n}) - m'_{1n}(l_1 + A_{1n})\right]\ddot{\sigma}_{2n} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[m'_{1n}(l_0 - A_{1n}) - m'_{0n}(l_0 + A_{0n})\right]\ddot{\sigma}_{1n} = 0. \qquad (12)$$

В выражении (12)

$$J_P = J_{\text{т}P} + J_P^{\text{экв}};$$

$$S^* = m_{\text{т}}a - m_{\text{ж}}\frac{H}{2}, \quad a = \frac{4R}{3\pi};$$

$$m'_{0n} = \rho_0 V,\ \ m'_{1n} = \rho_1 V,\ \ m'_{2n} = \rho_2 V,\ \ V = \frac{2\pi r_0^3}{\xi_n(\xi_n^2 - 1)}\,\mathrm{th}\,\xi_n\frac{h_1}{r_0};$$

$$l_0 = L_0 + (R - a), \quad l_1 = L_1 + (R - a);$$

$$A_{0n} = \frac{2r_0}{\xi_n}\,\mathrm{th}\,\xi_n\frac{h_0}{2},\ \ A_{1n} = \frac{2r_0}{\xi_n}\,\mathrm{th}\,\xi_n\frac{h_1}{2},\ \ A_{2n} = \frac{2r_0}{\xi_n}\,\mathrm{th}\,\xi_n\frac{h_2}{2}.$$

Здесь J_p — момент инерции приведенного твердого тела; $J_{\text{т}P}$, $J_P^{\text{экв}}$ — моменты инерции соответственно твердого и эквивалентного тела относительно оси, проходящей через точку P [1]; S^* — статический момент твердого тела и затвердевших жидкостей относительно оси, проходящей через точку O; $m_{\text{ж}} = m_0 + m_1 + m_2$ — общая масса жидкостей ($m_0 = \pi r_0^2\rho_0 h_0$, $m_1 = \pi r_0^2\rho_1 h_1$, $m_2 = \pi r_0^2\rho_2 h_2$, где $h_i\,(i = 0, 1, 2)$ — высота слоя i-й жидкости); $m'_{in}\,(i = 0, 1, 2)$ — приведенные массы колеблющихся жидкостей; ξ_n — n-й корень уравнения $\frac{dJ_1(\xi)}{d\xi} = 0$ (где $J_1(\xi)$ — функция Бесселя первого рода и первого порядка).

Моменты $J_{тP}$ и $J_P^{экв}$ определяются по следующим формулам:

$$J_{тP} = m_т R\left(\frac{3R}{2} - 2a\right);$$

$$J_P^{экв} = I_0 + m_ж (R-a)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n.$$

В последнем выражении

$$I_0 = m_0\left[\frac{h_0^2}{12} + \left(l_0 + \frac{h_0}{2}\right)^2 + \frac{r_0^2}{4}\right] + m_1\left[\frac{h_1^2}{12} + \left(l_1 + \frac{h_1}{2}\right)^2 + \frac{r_0^2}{4}\right] +$$

$$+ m_2\left[\frac{h_2^2}{12} + \left(R + \frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{r_0^2}{4}\right];$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = m_0 r_0^2\left(-1 + \frac{r_0}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\xi_n^3(\xi_n^2-1)}\operatorname{th}\xi_n\frac{h_0}{2r_0}\right) +$$

$$+ m_1 r_0^2\left(-1 + \frac{r_0}{h_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\xi_n^3(\xi_n^2-1)}\operatorname{th}\xi_n\frac{h_1}{2r_0}\right) +$$

$$+ m_2 r_0^2\left(-1 + \frac{r_0}{h_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\xi_n^3(\xi_n^2-1)}\operatorname{th}\xi_n\frac{h_2}{2r_0}\right),$$

где I_0 — момент инерции затвердевших жидкостей относительно оси, проходящей через точку O.

Учитывая волновые движения жидкостей, отвечающих n-му тону колебаний поверхностей раздела, запишем полную систему уравнений движения твердого полуцилиндра с жидкостями:

$$\begin{cases} J_p\ddot{\vartheta} + S^* g\vartheta + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_{1n}\ddot{\sigma}_{1n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_{2n}\ddot{\sigma}_{2n} - \\ \quad - g\sum\limits_{n=1}^{\infty}(m'_{1n} - m'_{0n})\sigma_{1n} - g\sum\limits_{n=1}^{\infty}(m'_{2n} - m'_{1n})\sigma_{2n} = 0; \\ (m'_{1n} + m'_{0n}\overline{f}_{0n})\ddot{\sigma}_{1n} + (m'_{1n} - m'_{0n})\omega_n^2\sigma_{1n} + B_{1n}\ddot{\vartheta} - \dfrac{m'_{1n}}{\operatorname{ch}\xi_n\dfrac{h_1}{r_0}}\ddot{\sigma}_{2n} - \\ \quad - (m'_{1n} - m'_{0n})g\vartheta = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots; \\ (m'_{2n}\overline{f}_{1n} + m'_{1n})\ddot{\sigma}_{2n} + (m'_{2n} - m'_{1n})\omega_n^2\sigma_{2n} + B_{2n}\ddot{\vartheta} - \dfrac{m'_{1n}}{\operatorname{ch}\xi_n\dfrac{h_1}{r_0}}\ddot{\sigma}_{1n} - \\ \quad - (m'_{2n} - m'_{1n})g\vartheta = 0,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{13}$$

где $B_{1n} = \left[m'_{1n}(l_0 - A_{1n}) - m'_{0n}(l_0 + A_{0n})\right]$; $B_{2n} = \left[m'_{2n}(l_1 - A_{2n}) - m'_{1n}(l_1 + A_{1n})\right]$;

$$\omega_n^2 = g\frac{\xi_n}{r_0}\,\mathrm{th}\,\xi_n\frac{h_1}{r_0}.$$

Исследование устойчивости колебания твердого полуцилиндра. Для дальнейшего исследования колебаний твердого полуцилиндра с жидкостями введем следующие обозначения:

$$a_1 = (m'_{1n} - m'_{0n})\omega_n^2;\quad a_2 = (m'_{2n} - m'_{1n})\omega_n^2;$$

$$b_1 = m'_{1n} + m'_{0n}\overline{f}_{0n};\ b_2 = m'_{2n}\overline{f}_{1n} + m'_{1n};$$

$$c_1 = (m'_{1n} - m'_{0n})g;\ c_2 = (m'_{2n} - m'_{1n})g;$$

$$\overline{f}_{0n} = \mathrm{th}\,\xi_n\frac{h_1}{r_0}\mathrm{cth}\,\xi_n\frac{h_0}{r_0};\quad \overline{f}_{1n} = \mathrm{th}\,\xi_n\frac{h_1}{r_0}\mathrm{cth}\,\xi_n\frac{h_2}{r_0};$$

$$d_n = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\xi_n\dfrac{h_1}{r_0}}.$$

Положив в системе уравнений (13)

$$\sigma_{1n} = A_1e^{pt};\ \sigma_{2n} = A_2e^{pt};\ \vartheta = Ce^{pt};$$

$$\ddot{\sigma}_{1n} = p^2A_1e^{pt};\ \ddot{\sigma}_{2n} = p^2A_2e^{pt};\ \ddot{\vartheta} = p^2Ce^{pt},$$

получим систему однородных уравнений, записанную в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1p^2 & -d_1m'_{11}p^2 & B_{11}p^2 - c_1 \\ -d_1m'_{21}p^2 & a_2 + b_2p^2 & B_{22}p^2 - c_2 \\ B_{11}p^2 - c_1 & B_{22}p^2 - c_2 & J_pp^2 + S^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ C \end{bmatrix} = 0. \tag{14}$$

Обозначив $\lambda = p^2$, из системы уравнений (14) получим характеристическое уравнение третьего порядка

$$\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta = 0, \tag{15}$$

где

$$\alpha = b_1b_2J_p - b_1B_{22}^2 - m'_{11}m'_{21}d_1^2J_p - B_{11}B_{22}d_1(m'_{11} + m'_{21}) - b_2B_{11}^2;$$

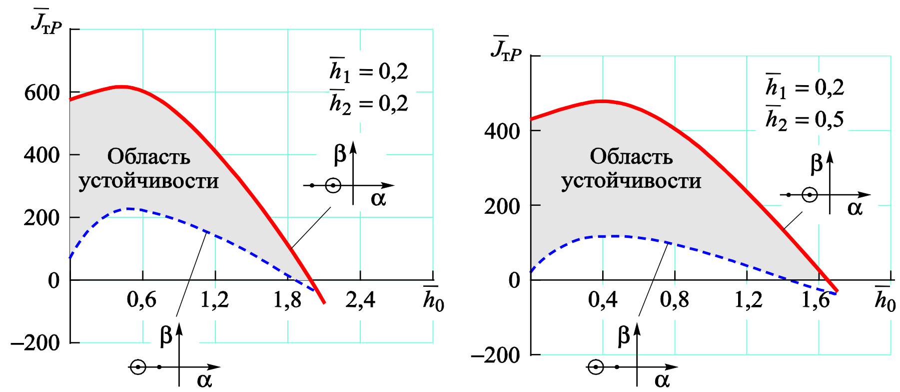
$$\beta = (a_1b_2 + a_2b_1)J_p + b_1b_2S^*g - (a_1B_{22}^2 - 2b_1B_{22}c_2) - m'_{11}m'_{21}d_1^2S^*g +$$
$$+ (B_{11}c_2 + B_{22}c_2)d_1(m'_{11} + m'_{21}) - (a_2B_{11}^2 - 2b_2B_{11}c_1);$$

$$\gamma = a_1a_2J_p + (a_1b_2 + a_2b_1)S^*g - (c_2^2b_1 - 2a_1B_{22}c_2) -$$
$$-c_1c_2d_1(m'_{11} + m'_{21}) - (c_1^2b_2 - 2a_2B_{11}c_1);$$

$$\delta = a_1a_2S^*g - (c_2^2a_1 + c_1^2a_2).$$

Рассматриваемая динамическая система является консервативной и не может быть асимптотически устойчивой. В связи с этим для ее устойчивости достаточно поставить требование, чтобы все корни характеристического уравнения были чисто мнимые или квадраты соответствующих корней были действительными числами, меньшими нуля. В результате исследования получены области устойчивости в параметрах, характеризующих инерционные свойства твердого тела и жидкости.

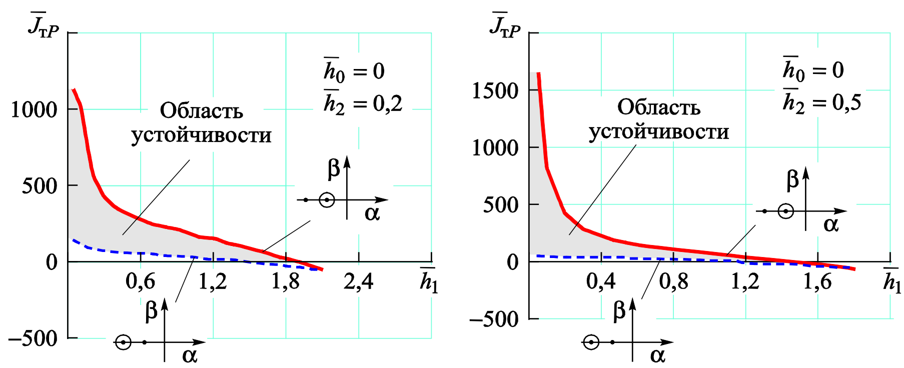
Области устойчивости колебаний твердого тела с полостью, наполненной тремя жидкостями, представлены на рис. 2, двумя жидкостями — на рис. 3. На этих рисунках также показано расположение корней характеристического уравнения, принадлежащих верхней и нижней границам области устойчивости.



а *б*

Рис. 2. Области устойчивости колебаний твердого тела с полостью, наполненной тремя жидкостями:

а — $\overline{h}_1 = \overline{h}_2 = 0{,}2$; *б* — $\overline{h}_1 = 0{,}2$; $\overline{h}_2 = 0{,}5$; — к мнимой оси ближе кратные корни; — к мнимой оси ближе простой корень



а *б*

Рис. 3. Области устойчивости колебаний твердого тела с полостью, частично наполненной двумя жидкостями:

а — $\overline{h}_0 = 0$; $\overline{h}_2 = 0{,}2$; *б* — $\overline{h}_0 = 0$; $\overline{h}_2 = 0{,}5$; — к мнимой оси ближе кратные корни; — к мнимой оси ближе простой корень

Экспериментальное исследование колебаний полуцилиндра с двумя несмешивающимися жидкостями. Для подтверждения достоверности теоретических результатов, относящихся к колебаниям твердого тела с полостью, частично наполненной идеальной слоистой жидкостью, было проведено экспериментальное исследование. Рассматривались колебания свободного твердого тела в виде стального полуцилиндра с закрепленной прозрачной цилиндрической емкостью, частично заполненной двумя несмешивающимися жидкостями. Начало движения системы задавалось наклоном полуцилиндра в произвольном направлении. Начальное отклонение полуцилиндра вызывало свободные колебания гидромеханической системы. Процесс колебаний регистрировался на видеокамеру «Айфон 5С» (iPhone 5s) и затем анализировался на персональном компьютере Samsung. Эксперимент проводился при следующих значениях параметров: радиус полуцилиндра $R = 0{,}05$ м, радиус цилиндрической емкости, заполненной жидкостями — водой и подсолнечным маслом, $r_0 = 0{,}035$ м, высота слоев жидкостей $h_2 = 0{,}025$ м и $h_1 = 0{,}05$ м.

В эксперименте был зафиксирован период колебаний полуцилиндра с двумя жидкостями $T^{\text{экс}}$, что отвечало второй главной собственной частоте колебаний $\omega_2^{\text{теор}} = 4{,}153\ \text{с}^{-1}$. Были зарегистрированы колебания жидкостей, отвечающие этой частоте, при которой поверхности раздела совершали колебания в противофазе.

Для определения периода колебаний было проведено четыре эксперимента с твердым полуцилиндром и четыре эксперимента с твердым полуцилиндром, частично заполненным жидкостями. При обработке результатов эксперимента были рассчитаны:

а) среднее арифметическое значение периода

$$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i;$$

б) отклонение измеренных периодов колебаний T_i от среднего значения $\overline{T}$, т. е. $T_i - \overline{T}$, и квадраты полученных отклонений $(T_i - \overline{T})^2$;

в) полуширина доверительного интервала

$$\Delta\overline{T} = t_{pf}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{\infty}(T_i - \overline{T})^2},$$

где t_{pf} — множитель, соответствующий доверительной вероятности $P = 0{,}95$ при числе измерений $n = 4$.

Данные эксперимента и результаты их обработки приведены в таблице.

i	T_i, с	$T_i - \overline{T}$, с	$(T_i - \overline{T})^2$, с^2	$\Delta\overline{T}$
Твердый полуцилиндр				
1	0,555	0,002	0,000004	0,131
2	0,650	0,097	0,009409	0,131
3	0,450	–0,103	0,011000	0,131
4	0,560	0,007	0,00005	0,131
Твердый полуцилиндр с двумя жидкостями				
5	1,514	–0,044	0,001936	0,117
6	1,651	0,093	0,008649	0,117
7	1,485	–0,073	0,005329	0,117
8	1,581	0,023	0,000529	0,117

На основании данных, представленных в таблице, получены следующие результаты измерения периода:

- для твердого полуцилиндра

$$T_{\text{ц}}^{\text{эксп}} = \overline{T} \pm \Delta\overline{T} = 0,553 \pm 0,131\ \text{с};$$

$$\omega_{\text{ц}}^{\text{эксп}} = 11,35\ \text{с}^{-1};$$

- для твердого полуцилиндра с двумя жидкостями

$$T_{\text{ц}}^{\text{эксп}} = \overline{T} \pm \Delta\overline{T} = 1,558 + 0,117\ \text{с};$$

$$\omega_{\text{ц}}^{\text{эксп}} = 4,033\ \text{с}^{-1}.$$

Частота колебания полуцилиндра без жидкостей определялась по формуле

$$\omega_{\text{ц}}^{\text{теор}} = \left[\frac{R}{g}\left(\frac{9\pi}{8} - 2\right)\right]^{-1/2} = 11,51\ \text{с}^{-1};\ T_{\text{ц}}^{\text{теор}} = 0,546\ \text{с},$$

а полуцилиндра с двумя жидкостями — по формуле (15):

$$\omega_{\text{ц}}^{\text{теор}} = 4,445\ \text{с}^{-1};\ T_{\text{ц}}^{\text{теор}} = 1,414\ \text{с}.$$

Заключение. Движение твердого тела с полостью, целиком заполненной трехслойной жидкостью, качественно отличается от движения твердого тела, полость которого целиком заполнена однородной несжимаемой жидкостью.

Предложен метод исследований устойчивости колебаний твердого тела, полость которого наполнена слоистой жидкостью.

Приведенные результаты экспериментального исследования динамических характеристик колебаний слоистой жидкости и твердого полуцилиндра с жидкостями дают удовлетворительные совпадения с расчетами, полученными по теоретическим формулам.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Жуковский Н.Е. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Избр. соч.* [репр. изд.]. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.

[2] Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. *ПММ*, 1956, т. 20, вып. I, с. 3–20.

[3] Колесников К.С. *Жидкостная ракета как объект регулирования*. Москва, Машиностроение, 1969, 298 с.

[4] Колесников К.С. *Динамика ракет*. Москва, Машиностроение, 2003, 520 с.

[5] Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, спецвыпуск № 8, с. 15–30.

[6] Пожалостин А.А. К теории собственных малых осесимметричных колебаний упругих баков, частично заполненных жидкостью. *Докл. I Всесоюзного симп. «Колебания упругих конструкций с жидкостью»*. Новосибирск, 1970, с. 153–164.

[7] Пожалостин А.А. *Разработка приближенных аналитических методов расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек с жидкостью.* Дис. … д-ра техн. наук. Москва, 2004, 220 с.

[8] Моисеев Н.Н., Петров А.А. *Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости*. Москва, ВЦ АН СССР, 1966, 269 с.

[9] Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. *Динамика тел с полостями, содержащими жидкость*. Москва, Наука, 1965, 440 с.

[10] Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. *Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью.* Москва, Машиностроение, 1968, 532 с.

[11] Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. *Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость*. Москва, Машиностроение, 1971, 563 с.

[12] Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. *Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью.* Москва, Машиностроение, 1977, 208 с.

[13] Рабинович Б.И. *Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1975, 416 с.

[14] Черноусько Ф.Л. *Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость.* Москва, ВЦ АН СССР, 1968, 232 с.

[15] Темнов А.Н. О спектре малых колебаний непрерывно стратифицированной жидкости. *Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Тр. семинара*. Казань, 1979, вып. 11, с. 183–193.

[16] Темнов А.Н. Устойчивость стационарных вращений неоднородной жидкости в эллипсоидальной полости. *Известия вузов. Машиностроение*, 1979, № 7, с. 149–151.

[17] Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1986, т. 26, № 5, с. 734–755.

[18] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость. *Механика твердого тела*, 1986, № 1, с. 27–36.

[19] Дерендяев Н.В., Сеняткин В.А. Условия устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного слоисто-неоднородной вязкой несжимаемой жидкостью. *ПМТФ*, 1984, № 1, с. 34–44.

[20] Булатов В.В., Владимиров Ю.В. *Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах*. Москва, Наука, 2005, 195 с.

Статья поступила в редакцию 04.03.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Темнов А.Н., Вин Ко Ко. Теоретическое и экспериментальное исследования колебаний твердого полуцилиндра с полостью, заполненной слоистой жидкостью. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 5.
http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-5-1883

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: antt45@mail.ru

Вин Ко Ко — стажер-исследователь кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: win.c.latt@gmail.com

Theoretical and experimental studies of vibrations of the solid half-cylinder having a cavity filled with a layered fluid

© A.N. Temnov, Win Ko Ko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Further exploration of outer space is not possible without energy industrialization. For the industrialization of outer space, Russian and American experts are considering the possibility of creating orbital refueling stations and space refueling stations for future flights to the Moon, Mars and other planets. The proposed article presents the formulation of the problem, the solutions and the results of studies of the dynamic characteristics and stability of small oscillations of a solid, simulating a space tanker, whose fuel tank contains a cryogenic liquid. A distinctive feature of a cryogenic liquid is the low temperatures and various densities of fluid particles observed in the processes of storage and operation, which greatly complicates the study of hydrodynamic problems. In the article, the cryogenic fluid is modeled by layers of immiscible liquids. In the work, the equations of motion of a rigid body with a cavity containing three immiscible incompressible ideal liquids and performing a plane motion are obtained. The formulation of the problem of small oscillations and stability of motion of a rigid body with a cavity filled with such a layered fluid is given. The areas of stability of the motion of a solid semi-cylinder with a cylindrical cavity filled with three immiscible liquids are investigated. The article also presents the results of an experimental study of oscillations of a half-cylinder with two immiscible liquids.

Keywords: *immiscible incompressible ideal fluid, a mechanical system, the area of stability, natural frequency, rigid body*

REFERENCES

[1] Zhukovsky N.E. *O dvizhenii tverdogo tela, imeushchego polosti, napolnennye odnorodnoy kapelnoy zhidkostyu* [On the motion of a rigid body with cavities filled with a homogeneous dropping liquid]. In: Izbrannye sochineniya [Selected works]. Moscow, BMSTU Publ., 2017.

[2] Okhotsimskiy D.E. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika — J. Appl. Math. Mech.*, 1956, vol. 20, no. I, pp. 3–20.

[3] Kolesnikov K.S. *Zhidkostnaya raketa kak obyekt regulirovaniya* [Liquid rocket as an object of regulation]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969, 298 p.

[4] Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [The dynamics of rockets]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003, 520 p.

[5] Kolesnikov K.S., Pozhalostin A.A., Shkapov P.M. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2012, Special issue number 8, pp. 15–30.

[6] Pozhalostin A.A. K teorii sobstvennykh malykh osesimmetrichnykh kolebaniy uprugikh bakov, chastichno zapolnennykh zhidkost'yu. *Dokl. I Vsesoyuznoy simp. «Kolebaniya uprugikh konstruktsiy s zhidkost'yu»* [On the theory of own small axisymmetric oscillations of elastic tanks, partially filled with a fluid. Proceedings of the 1st Vsesoyuz. simp. Fluctuations of Elastic Structures with Fluid]. Novosibirsk, 1970, pp. 153–164.

[7] Pozhalostin A.A. *Razrabotka priblizhennykh analiticheskikh metodov rascheta sobstvennykh i vynuzhdennykh kolebaniy uprugikh obolochek s zhidkost'yu. Dis. ... d-ra tekhn. nauk* [Development of approximate analytical methods for calculating the own and forced vibrations of elastic shells with a liquid: Diss. ... Dr. Sc. in Engineering]. Moscow, 2004, 220 p.

[8] Moiseev N.N., Petrov A.A. *Chislennyye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo obyema zhidkosti* [Numerical methods for calculating the natural frequencies of oscillations of a limited volume of a liquid]. Moscow, EC of the USSR Academy of Sciences, 1966, 269 p.

[9] Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Dinamika tel s polostyami, soderzhashchimi zhidkost* [Dynamics of bodies with cavities containing a liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 440 p.

[10] Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu* [Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with a liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 532 p.

[11] Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dinamika tonkostennykh konstruktsiy s otsekami, soderzhashchimi zhidkost* [Dynamics of thin-walled structures with compartments containing liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1971, 563 p.

[12] Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovskiy I.A. *Nelineynaya dinamika letatelnogo apparata s zhidkostyu* [Nonlinear dynamics of an aircraft with a liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 208 p.

[13] Rabinovich B.I. *Vvedeniye v dinamiku raket-nositeley kosmicheskikh apparatov* [Introduction to the dynamics of launch vehicles of spacecraft]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 416 p.

[14] Chernousko F.L. *Dvizheniye tverdogo tela s polostyami, soderzhashchimi vyazkuyu zhidkost* [Movement of a solid with cavities containing a viscous fluid]. Moscow, USSR Academy of Sciences, 1968, 232 p.

[15] Temnov A.N. *O spektre malykh kolebaniy nepreryvno stratifitsirovannoy zhidkosti. Nelineynyye problemy aerogidrouprugosti. Tr. seminara* [On the spectrum of small oscillations of a continuously stratified fluid. Nonlinear problems of aerohydroelasticity. Workshop Workshop]. Kazan, 1979, vol. 11, pp. 183–193.

[16] Temnov A.N. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 1979, no. 7, pp. 149–151.

[17] Kopachevsky N.D., Temnov A.N. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1986, vol. 26, no. 5, pp. 734–755.

[18] Akulenko L.D, Nesterov S.V. *Izvestiya RAN*, *Mekhanika Tverdogo Tela — Mechanics of Solids*, 1986, no. 1, pp. 27–36.

[19] Derendyaev N.V., Senyatkin V.A. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1984, no. 1, pp. 34–44.

[20] Bulatov V.V., Vladimirov Iu.V. *Vnutrennie gravitatsionnye volny v neodnorodnykh sredakh* [Internal gravitational waves in non-uniform environments]. Moscow, Nauka Publ., 2005, 195 p.

Temnov A.N., Cand. Sc. (Phys. & Math.), assoc. professor of the Spacecraft and Launch Vehicles Department, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: antt45@mail.ru

Win Ko Ko, Young researcher of the Spacecraft and Launch Vehicles Department, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: win.c.latt@gmail.com