

Расчет расщепления собственной частоты цилиндрического резонатора твердотельного волнового гироскопа на основе численного интегрирования высокой точности

© О.С. Нарайкин^{1,2}, Ф.Д. Сорокин², А.М. Гуськов², С.А. Козубняк^{1,2},
Д.С. Вахлярский²

¹НИИЦ «Курчатовский институт», Москва, 123182, Россия

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Твердотельные волновые гироскопы находят широкое применение в различных областях техники. Принцип их работы основан на явлении прецессии упругой волны, которая вращается с угловой скоростью пропорционально угловой скорости вращения корпуса прибора. На точность прибора существенно влияет расщепление собственной частоты резонатора гироскопа. В статье рассматривается расщепление, вызванное искажением формы поперечного сечения цилиндрического резонатора. Поскольку расщепление весьма мало, для его определения обычно используют метод возмущений. В данной статье предложен новый способ расчета расщепления, основанный на численном интегрировании высокой точности уравнений динамики цилиндрической оболочки с некруговым поперечным сечением. Для поиска двух весьма близких частот, через разность которых находили расщепление, решена линейная краевая задача на собственные значения с удержанием большого количества десятичных знаков. Приведены примеры определения расщепления собственной частоты в условиях разных законов распределения радиального отклонения формы сечения резонатора по окружной координате. Контроль результатов выполнен методом конечных элементов, при его использовании также применялась высокая точность вычисления каждой из двух близких частот.

Ключевые слова: твердотельный волновой гироскоп, цилиндрический резонатор, искажение формы, линейная краевая задача, расщепление частоты

Введение. Твердотельные волновые гироскопы (ТВГ) благодаря удачному соотношению цены и точности широко применяют в разных областях техники: бурение скважин, контроль качества автомобильных и железных дорог, робототехника, космонавтика, навигационные системы водного, воздушного и наземного транспорта [1, 2] и т. п. Принцип работы ТВГ основан на эффекте инерции упругих волн колебаний, возбуждаемых в кольцевом, цилиндрическом или полусферическом резонаторах, при их вращении вокруг оси симметрии [3]. При равномерном вращении резонатора с угловой скоростью Ω вокруг оси симметрии упругая волна также поворачивается (прецессирует), но отстает от вращения корпуса резонатора на величину $K\Omega$ (эффект Брайана [1–4]). Величину K называют масштабным коэффициентом

или коэффициентом прецессии [1–4], $K = 0,4$ — для кольцевого резонатора, $K \approx 0,3$ — для полусферического. Движение упругой волны относительно корпуса прибора удается зарегистрировать емкостными датчиками, что позволяет вычислить угловую скорость прибора Ω .

При вращении резонатора с постоянной угловой скоростью упругая волна также должна поворачиваться вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью, однако наличие дефектов, искажающих динамическую симметрию прибора, приводит к отклонению угловой скорости волны от величины $K\Omega$. Возникает так называемое явление «ухода» гироскопа, снижающее точность его работы. Наиболее существенные дефекты, вызывающие «уход» гироскопа, — искажение геометрической формы, а также неоднородность плотности, упругих свойств и толщины резонатора [2, 5–9].

В данной работе проведено исследование расщепления собственной частоты резонатора ТВГ, вызванное искажением формы его сечения, — одна из существенных причин погрешностей прибора. Отметим, что расщепление весьма мало, поэтому оно обычно определяется методом возмущений. Альтернатива методу возмущений — вычисления с очень большим количеством десятичных знаков (100 и более знаков) во всех числах. Повышенная разрядность чисел защищает от потери точности при вычислении расщепления как разности двух весьма близких чисел. Для цилиндрической оболочки здесь приняты граничные условия Навье [8, 9], т. е. речь идет не о расчете конкретного резонатора, а об отработке методики численного анализа явления расщепления частоты.

Как отмечено в работе [9], резонатор ТВГ в виде некруговой цилиндрической оболочки с граничными условиями Навье представляет собой не столько реализацию существующей конструкции, сколько некий плацдарм для отработки численных приемов, которые потом практически без изменений можно применять для исследования более сложных форм резонатора. Удобство граничных условий Навье состоит в том, что системы дифференциальных уравнений в частных производных сравнительно простыми приемами могут быть заменены системами обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ).

В работе [9] после получения СОДУ был применен метод возмущений с использованием сопряженных решений, что позволило полностью решить задачу расщепления частот для рассматриваемой формы оболочки в первом приближении (т. е. для первого слагаемого разложения расщепления в асимптотический ряд). В работе [8] метод возмущений применяли в сочетании с авторским конечным элементом и тензорной теорией оболочек. При этом был исследован не только цилиндрический, но и сферический резонатор с возмущением

формы. Метод возмущений, общий для работ [8, 9], использует асимптотические ряды и поэтому в общем случае требует исследования сходимости.

Цель данной статьи — построить численное решение высокой точности для задачи поиска расщепления собственной частоты резонатора рассматриваемой геометрической формы. Поясним, что термин «численное решение высокой точности» означает здесь расчет расщепления частот *с любым разумным (20 и более) наперед заданным количеством десятичных знаков*. Высокая точность вычисления каждой частоты принципиально необходима, для того чтобы избежать потерю точности при вычитании одного из другого двух близких чисел.

Разумеется, сама теория оболочек и даже механика деформируемого твердого тела содержит гипотезы и предположения, которые неизбежно скажутся на точности результата. Существуют разные варианты теории оболочек (с гипотезой Кирхгофа и без нее, с вариантами тензора приращений кривизны, с предложением Балабуха — Новожилова и без него и т. п.). Но если рассматривать дифференциальные уравнения динамики оболочки как абсолютно точные, то единственным источником погрешности будут численные методы их решения.

В настоящей статье применены вычислительные приемы, которые дают практически точные решения дифференциальных уравнений. Поэтому результаты, полученные на основе СОДУ, можно далее рассматривать как тестовые для отладки других алгоритмов расчета расщеплений частот. Использован наиболее простой вариант теории оболочек [10], основанный на гипотезе Кирхгофа, при этом рассмотренные вычислительные приемы могут быть перенесены на более сложные варианты теории оболочек практически без изменений.

Алгоритм вычисления собственных частот. Из всех неосесимметричных оболочек только для цилиндрической оболочки некруговой формы с граничными условиями Навье (рис. 1) можно исследовать расщепление частот, используя обыкновенные дифференциальные уравнения.

Под закреплениями Навье понимают следующий набор граничных условий [10]:

$$\begin{aligned} v(0, \varphi) = 0; \quad w(0, \varphi) = 0; \quad T_1(0, \varphi) = 0; \quad M_1(0, \varphi) = 0; \\ v(l, \varphi) = 0; \quad w(l, \varphi) = 0; \quad T_1(l, \varphi) = 0; \quad M_1(l, \varphi) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где v — окружное перемещение; w — нормальное перемещение; T_1 — интенсивность осевой мембранной силы; M_1 — интенсивность изгибающего меридионального изгибающего момента.

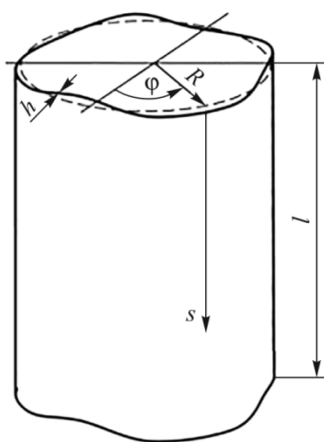


Рис. 1. Некруговая цилиндрическая оболочка:
 - - - - - — невозмущенная геометрия;
 - - - - - — возмущенная геометрия

Условия Навье (1) допускают решение в виде одной гармоники [10]:

$$u(s, \varphi) = u_{(1)}(\varphi) \cos \frac{\pi s}{l}; \quad v(s, \varphi) = v_{(1)}(\varphi) \sin \frac{\pi s}{l}; \quad w(s, \varphi) = w_{(1)}(\varphi) \sin \frac{\pi s}{l}, \quad (2)$$

где $u_{(1)}(\varphi)$, $v_{(1)}(\varphi)$, $w_{(1)}(\varphi)$ — амплитудные (по координате s и по времени) значения перемещений; остальные обозначения соответствуют рис. 1.

Пользуясь известной системой обыкновенных дифференциальных уравнений 8-го порядка [10] для определения коэффициентов $w_{(1)}$, $v_{(1)}$, $u_{(1)}$ и заменяя в ней внешние нагрузки q_1 , q_2 , q_3 динамическими нагрузками

$$q_{1(1)} = -u_{(1)} p^2 \rho h, \quad q_{2(1)} = -v_{(1)} p^2 \rho h, \quad q_{3(1)} = -w_{(1)} p^2 \rho h,$$

получим систему для расчета частот и форм колебаний неидеальной цилиндрической оболочки с граничными условиями Навье:

$$\frac{dy}{d\varphi} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) y, \quad (3)$$

где $y = \{u_{(1)}, v_{(1)}, w_{(1)}, \vartheta_{2(1)}, S_{(1)}, T_{2(1)}, Q_{2(1)}^*, M_{2(1)}\}^T$; ϑ_2 — угол поворота нормали в окружном направлении; S — сдвигающая сила; T_2 — мембранное усилие в окружном направлении; Q_2^* — приведенная поперечная сила; M_2 — интенсивность изгибающего момента в окружном направлении; $\lambda = p^2$, p — круговая частота собственных колебаний.

Матрица \mathbf{A} , согласно [10], имеет вид

$$\mathbf{A} = L \begin{bmatrix}
 0 & -\frac{\pi}{l} & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{Eh} & 0 & 0 & 0 \\
 \mu \frac{\pi}{l} & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 & \frac{1-\mu^2}{Eh} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\mu \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} \\
 Eh \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \frac{\pi}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{l} & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & \mu \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{6(1+\mu)} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где l, h, R — размеры оболочки (см. рис. 1); $1/R_2$ — кривизна деформированной поверхности в окружном направлении; L — параметр Ламе (масштаб) окружной координаты φ .

В матрице \mathbf{B} присутствуют только три ненулевых элемента:

$$B_{51} = B_{62} = B_{73} = \rho h L. \quad (5)$$

Для идеального кругового цилиндра $L = R_2 = \text{const} = R$. Если цилиндр некруговой, коэффициенты матриц \mathbf{A}, \mathbf{B} — переменные, так как переменными величинами являются масштаб L и кривизна $1/R_2$.

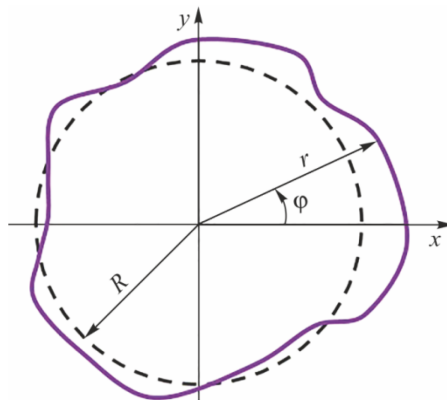


Рис. 2. Форма поперечного сечения некругового цилиндра (отклонения от окружности условно увеличены)

Форма поперечного сечения некругового цилиндра в общем случае — плоская кривая (рис. 2). Она может быть задана в параметрическом виде

$$x = (R + \xi) \cos \varphi; \quad y = (R + \xi) \sin \varphi,$$

где ξ — малое радиальное отклонение от круговой формы ($\xi = r - R$).

Масштаб и кривизну определяют по известным формулам дифференциальной геометрии

$$L = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{(R + \xi)^2 + \left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2};$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{L^3} \left(\frac{d^2 y}{d\varphi^2} \frac{dx}{d\varphi} - \frac{d^2 x}{d\varphi^2} \frac{dy}{d\varphi} \right) = \frac{1}{L^3} \left((R + \xi) \left(R + \xi - \frac{d^2 \xi}{d\varphi^2} \right) + 2 \left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 \right).$$
(6)

Так как в отличие от расчетов, рассмотренных в работах [8, 9, 11, 12], здесь метод возмущений не использован, не возникает необходимости в линеаризации (6).

В разработанном итерационном алгоритме применяется интегрирование высокой точности неоднородной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{d\varphi} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{y} + \mathbf{g},$$
(7)

где \mathbf{g} — нагрузочный вектор.

Вместо исходной однородной системы (3) решена неоднородная система (7). Нагрузочный вектор нужен только для того, чтобы довести систему до резонанса. Поэтому его можно задавать по-разному, в данной работе был выбран следующий вид вектора \mathbf{g} :

$$\mathbf{g}_c = (0, 0, 0, 0, 0, 0, q_0 R \cos 2\varphi, 0)^T;$$

$$\mathbf{g}_s = (0, 0, 0, 0, 0, 0, q_0 R \sin 2\varphi, 0)^T.$$
(8)

Здесь вектор \mathbf{g}_c с элементом $\cos 2\varphi$ используют для поиска симметричных относительно образующей $\varphi = 0$ форм колебаний, а вектор \mathbf{g}_s с элементом $\sin 2\varphi$ — для поиска кососимметричных форм; $q_0 = 1$ Н/м — амплитуда внешней нагрузки.

Для неоднородной системы (7) поставлены условия периодичности решения:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(2\pi).$$
(9)

На первой итерации начальное значение для собственного числа λ находили приближенно. Далее решали линейную краевую задачу для

системы (7) с граничными условиями (9). В целях преодоления численных проблем, связанных с жесткостью системы (7), использовали арифметику высокой точности (100 и более десятичных знаков), встроенную в пакет Wolfram Mathematica [13]. При этом метод Рунге — Кутты и решение линейной краевой задачи пришлось запрограммировать заново, так как стандартная процедура NDSolve из того же пакета, реализующая те же операции, не позволила определить расщепление частот с необходимой точностью за приемлемое время, даже при использовании специальных настроек, указывающих на жесткость СОДУ.

Следующее приближение для λ вычисляли из отношения Релея

$$\lambda_{new} = \frac{\int_0^{2\pi} \mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{y} d\varphi}{\int_0^{2\pi} \mathbf{y}^* \mathbf{B} \mathbf{y} d\varphi}, \quad (10)$$

где \mathbf{y}^* — вектор-столбец, в котором переставлены местами обобщенные силы и соответствующие им обобщенные перемещения, как это показано ниже:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7 \ y_8)^T; \\ \mathbf{y}^* &= (y_5 \ y_6 \ y_7 \ y_8 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4)^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее новое значение λ , найденное из соотношения (10), подставляли в неоднородную СОДУ (7) и выполняли следующую итерацию. Здесь необходимо подчеркнуть, что отношение Релея применено не как в методе Релея — Ритца для однократного приближенного вычисления собственной частоты, а для уточнения частоты и для приближения к резонансу. Каждая следующая итерация показывает, что амплитуда всех перемещений увеличивается на несколько порядков, что и говорит о приближении к резонансу.

Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока 30 десятичных знаков числа λ не переставали меняться. Численные эксперименты показали, что каждая следующая итерация приносит 4–8 новых правильных десятичных знаков числа λ . Точного попадания в резонанс никогда не происходит, а большое количество удерживаемых знаков оберегает от вырождения краевой задачи. Для получения точности в 30 десятичных знаков при удерживаемых 100 знаках во всех числах обычно хватает 3–6 итераций обработки формул (7–10).

Параметры цилиндрического резонатора. Ниже приведены примеры работы предложенного алгоритма для двух случаев распре-

деления несовершенства формы по окружности. Под термином «несовершенство» здесь и далее для краткости подразумевают функцию радиального отклонения $\xi(\varphi) = r(\varphi) - R$ (см. рис. 2). Расчеты проводили для цилиндрической оболочки со следующими параметрами: модуль упругости $E = 73600$ МПа; плотность $\rho = 2210$ кг/м³; коэффициент Пуассона $\mu = 0,17$; радиус срединной поверхности $R = 40$ мм; длина $l = 80$ мм; толщина $h = 1$ мм.

В случае отсутствия дефекта (идеальная оболочка) все компоненты вектора u в системе (3) меняются по закону $\cos 2\varphi$ либо $\sin 2\varphi$, что позволяет заменить дифференциальные уравнения алгебраическими. Равенство нулю определителя указанной алгебраической системы приводит к кубическому уравнению относительно λ . В качестве начального приближения для последующего итерационного уточнения использована частота $f_2 = 7951,835$ Гц собственных колебаний идеальной цилиндрической оболочки, найденная из этого кубического уравнения.

Пример 1. $\xi = \xi_4 \cos 4\varphi$. Из теории ТВГ известно, что наибольший вклад в расщепление частоты осесимметричного резонатора вносит четвертая гармоника разложения несовершенства в тригонометрический ряд. Поэтому в первую очередь целесообразно рассмотреть именно такое отклонение.

Результаты расчета собственных частот и их разностей приведены в табл. 1 (индексы у частот $f_{i(j)}$ обозначают: $i = 2$ — волновое число (номер гармоники в окружном направлении); $j = 1, j = 2$ — номер одной из двух расщепленных собственных частот).

Таблица 1

ξ_4 , мм	$f_{2(1)}$, Гц	$f_{2(2)}$, Гц	$f_{2(1)} - f_{2(2)}$, Гц
0,01	7963,78198	7939,92859	23,8534
0,10	8072,89605	7834,85906	238,0370
1,00	9200,23240	7258,48541	1941,7470

Все значащие цифры чисел в табл. 1 можно считать точными, так как они не меняются при увеличении количества итераций и уменьшении шага интегрирования ($\Delta\varphi = \pi/150$). Кроме того, ошибки округления при использовании «длинных» чисел (100 и более десятичных знаков) располагаются очень далеко от показанных в таблице значащих цифр и не могут повлиять на результат. В табл. 1 расщепление для амплитуды несовершенства ($\xi_4 = 10^{-2}$ мм) очень хорошо совпадает с результатами статей [8, 9].

Расчеты показывают, что расщепление частоты зависит линейно от амплитуды несовершенства при сравнительно больших его значе-

ниях. Следующая диаграмма (рис. 3) демонстрирует, что расщепление начинает существенно отклоняться от линейной зависимости примерно с $\xi_4 = 0,4$ мм (0,4 мм — чрезвычайно большое значение несовершенства!).

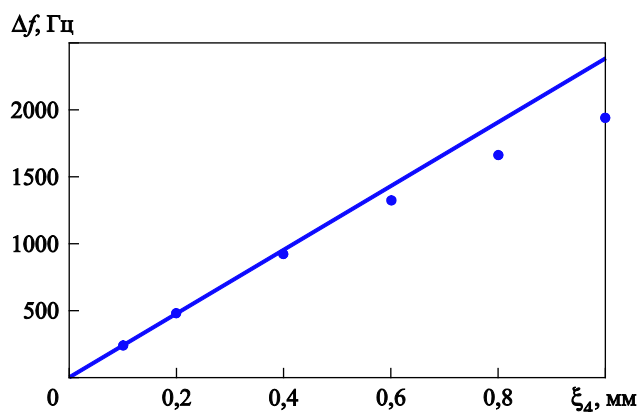


Рис. 3. Зависимость расщепления частоты от амплитуды несовершенства

При этом линейное приближение завышает расщепление, поэтому оценка погрешности прибора по линейному приближению закладывается «в запас». Это делает линейное приближение, теория которого подробно разработана в работе [9], весьма полезным.

Последнее замечание будет верным только при наличии 4-й гармоники в разложении несовершенства в тригонометрический ряд. Если указанная гармоника отсутствует, то зависимость расщепления от амплитуды несовершенства изначально будет нелинейной. Это иллюстрируется следующим примером.

Пример 2. Эллиптический дефект формы. Незначительная эллиптичность вполне может возникнуть на практике как следствие технологических причин. Этот дефект считается менее значимым, чем рассмотренный в предыдущем примере. Исследуем зависимость собственных частот от небольшой эллиптичности численно. Эллиптическую форму поперечного сечения цилиндра удобно задать в параметрическом виде

$$x = R(1 + \varepsilon) \cos \varphi; \quad y = R(1 - \varepsilon) \sin \varphi, \quad (12)$$

где ε — малый безразмерный параметр.

Для геометрии поперечного сечения в форме (12) по рассмотренному выше алгоритму вычисляли две близкие собственные частоты, затем — расщепление как их разность. Для удобства сопоставления

амплитуды несовершенства (ϵR) выбирали такими же, как и в предыдущем примере. Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

ϵ	ϵR , мм	$f_{2(1)}$, Гц	$f_{2(2)}$, Гц	$f_{2(1)} - f_{2(2)}$, Гц
$25 \cdot 10^{-5}$	0,01	7951,83466	7951,83357	0,001086
$25 \cdot 10^{-4}$	0,10	7951,80030	7951,69170	0,108607
$25 \cdot 10^{-3}$	1,00	7948,37379	7937,53980	10,833460

Как видно из табл. 2, зависимость расщепления от амплитуды несовершенства — резко нелинейная. При малых дефектах изменение параметра ϵ в 10 раз приводит к изменению расщепления в 100 раз.

Сопоставление данных табл. 1 и 2 показывает, что эллиптический дефект формы существенно меньше влияет на расщепление собственной частоты резонатора, чем дефект по 4-й гармонике радиального отклонения. Последние строки табл. 1 и 2 практического значения не имеют и приведены лишь для демонстрации возможностей численного метода, а также для предполагаемого использования полученных здесь результатов при тестировании других алгоритмов.

Сопоставление полученных результатов с результатами МКЭ-моделирования. В целях контроля предложенной методики собственные частоты эллиптического цилиндра и расщепление были вычислены с помощью конечно-элементного комплекса ANSYS.

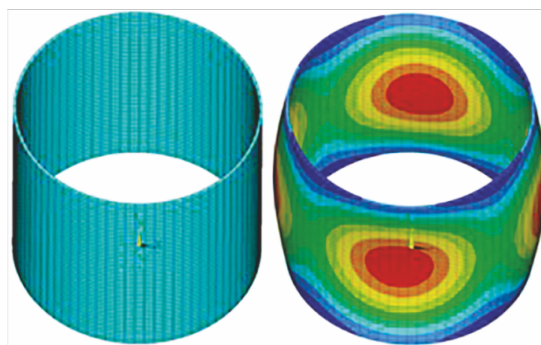


Рис. 4. Конечно-элементная модель эллиптического цилиндра и одна из исследуемых форма колебаний

Расчетная модель (рис. 4) состояла из 4000 конечных элементов (100 элементов в окружном направлении и 40 в осевом), построенных на основе теории оболочек Тимошенко. На верхнем и нижнем торцах цилиндра запрещались радиальные и окружные перемещения. Модель создавалась с использованием уравнений (12), задающих эллип-

тический контур сечения. Результаты расчетов собственных частот, соответствующих разным значениям параметра эллиптичности ϵR , приведены в табл. 3.

Таблица 3

ϵR , мм	$f_{2(1)}$, Гц (ANSYS)	$f_{2(2)}$, Гц (ANSYS)	$f_{2(1)} - f_{2(2)}$, Гц (ANSYS)
0,01	7952,20684	7952,20792	0,001086391175
0,10	7952,06491	7952,17354	0,108632911
1,0	7937,90759	7948,74415	10,8365678

Сопоставление данных табл. 2 и 3, в которых расщепления совпадают в четырех знаках, подтверждает правильность того и другого расчетов и показывает, что ANSYS вполне пригоден для расчета расщепления частот. Как и в предыдущей работе [12], обнаруживается факт равенства расщеплений, вычисленных с помощью разных методов (интегрирование дифференциальных уравнений и МКЭ), хотя сами частоты при этом заметно различаются.

Выводы. По результатам выполненных расчетов можно сделать следующие выводы.

1. Сочетание арифметики высокой разрядности и приема итерационного уточнения собственных значений с помощью отношения Релея позволило вычислить расщепление собственных частот резонатора ТВГ в форме некругового цилиндра с высокой точностью без использования метода ортогонализации Годунова и метода возмущений.

2. Расчеты показали, что небольшая эллиптичность сечения резонатора приводит к квадратичной зависимости расщепления частоты от амплитуды дефекта.

3. Радиальное возмущение формы сечения, распределенное по 4-й гармонике, при больших несовершенствах дает зависимость расщепления частоты от амплитуды дефекта, заметно отклоняющуюся от линейной.

4. На примерах показано, что расщепление обладает «стабильностью», т. е. очень мало зависит от выбранной модели оболочки и численных методик, хотя сами частоты таким свойством не обладают.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Фомичев А.В., Чуманкин Е.А., Юрин А.В. Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2014, № 4, с. 80–96.
- [2] Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А. *Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах*. Москва, Физматлит, 2008, 240 с.
- [3] Дзама М.А., Егармин Н.Е. Прецессия упругих волн при вращении некоторых классов осесимметричных оболочек. *Известия РАН. Сер. Механика твердого тела*, 1991, № 1, с. 170–175.

- [4] Меркурьев И.В., Подалков В.В. *Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов*. Москва, Физматлит, 2009, 228 с.
- [5] Донник А.С. *Влияние геометрической неоднородности и упругой анизотропии материала на точностные характеристики волнового твердотельного гироскопа*. Дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2006, 131 с.
- [6] Матвеев В.А., Басараб М.А., Лунин Б.С. Аппроксимация распределения плотности резонатора волнового твердотельного гироскопа по измеренным параметрам дебаланса. *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*, 2015, № 10, с. 9–16.
- [7] Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. *Проектирование волнового твердотельного гироскопа*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998, 168 с.
- [8] Вахлярский Д.С., Гуськов А.М., Басараб М.А., Матвеев В.А. Использование метода конечных элементов совместно с методом возмущений в задаче вычисления расщепления частоты оболочки с дефектом формы срединной поверхности. *Наука и образование. Электронный журнал*, 2016, № 5, с. 152–174. DOI: 10.7463/0516.0839190
- [9] Козубняк С.А. Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2015, № 3, с. 39–49. DOI: 10.18698/0236-3933-2015-3-39-49
- [10] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций: статика*. Москва, URSS, 2017, 496 с.
- [11] Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А. Расщепление собственных частот кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа, вызванное возмущением формы. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2012, № 6, с. 176–185.
- [12] Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А., Вахлярский Д.С. Численное моделирование прецессии упругой волны в цилиндрическом резонаторе волнового твердотельного гироскопа с неоднородным распределением плотности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2017, № 5, с. 41–51. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-5-41-51
- [13] Дьяконов В.П. *Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления*. Москва, ДМК-Пресс, 2008, 576 с.

Статья поступила в редакцию 21.05.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Гуськов А.М., Козубняк С.А., Вахлярский Д.С. Расчет расщепления собственной частоты цилиндрического резонатора твердотельного волнового гироскопа на основе численного интегрирования высокой точности. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 5.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-5-1876>



Нарайкин Олег Степанович — д-р техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН, вице-президент НИЦ «Курчатовский институт», заведующий кафедрой «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: naraikin@kiae.ru



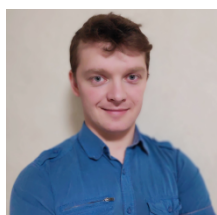
Сорокин Фёдор Дмитриевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: sorokin_fd@mail.ru



Гуськов Александр Михайлович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: guskov_am@mail.ru



Козубняк Светлана Аркадьевна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, сотрудник НИЦ «Курчатовский институт».
e-mail: sark-new@yandex.ru



Вахлярский Дмитрий Сергеевич — ассистент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: vahlyar@yandex.ru

Calculation of eigen frequency splitting of a cylindrical resonator of a solid-state wave gyroscope based on numerical integration of high accuracy

© O.S. Naraykin^{1,2}, F.D. Sorokin², A.M. Guskov²,
S.A. Kozubnyak^{2,1}, D.S. Vakhlyarskiy²

¹National Research Center “Kurchatov Institute”, Moscow, 123182, Russia

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Solid-state wave gyroscopes are widely used in various fields of technology. The principle of their operation is based on the phenomenon of precession of the elastic wave, which rotates at an angular velocity proportional to the angular velocity of device body rotation. The accuracy of the device is significantly affected by splitting the gyroscope resonator frequency. The article considers splitting caused by the distortion of the cylindrical resonator cross-section shape. Since the splitting is very small, the perturbation method is usually used to determine it. The article proposes a new method for calculating the splitting based on the numerical high accuracy integration of equations of dynamics of a cylindrical shell with a non-circular cross section. To search for two very close frequencies, through the difference of which the splitting was found, a linear boundary eigenvalue problem was solved with retention of a large number of decimal places. Examples of determining the natural frequency splitting are presented for various laws of the distribution of the radial deviation of the cavity cross-section shape along the circumferential coordinate. Verification of the results was performed by the finite element method. When using the method each of the two close frequencies was calculated with high accuracy.

Keywords: *solid-state wave gyroscope, cylindrical resonator, shape distortion, linear boundary value problem, splitting*

REFERENCES

- [1] Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., Fomichev A.V., Chumankin E.A., Yurin A.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Priborostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument Engineering*, 2014, no. 4, pp. 80–96.
- [2] Matveev V.A., Lunin B.S., Basarab M.A. *Navigatsionnye sistemy na volnovykh tverdotelnykh giroscopakh* [Navigation system based on the wave solid-state gyroscopes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 240 p.
- [3] Dzama M.A., Egarmin N.E. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids. A Journal of Russian Academy of Sciences*, 1991, no. 1, pp. 170–175.
- [4] Mercuryev I.V., Podalkov V.V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotelnogo giroskopov* [Dynamics of micromechanical and wave solid-state gyroscopes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 228 p.
- [5] Donnik A.S. *Vliyanie geometricheskoy neodnorodnosti i uprugoy anizotropii materiala na tochnostnye kharakteristiki volnovogo tverdotelnogo giroskopa*. Diss. kand. tekhn. nauk [Influence of geometrical heterogeneity and elastic anisotropy of a material on the accuracy characteristics of a wave solid-state gyroscope. Cand. eng. sc. diss.]. Moscow, 2006, 131 p.

- [6] Matveev V.A., Basarab M.A., Lunin B.S. *Pribory i sistemy. Upravlenie, control, diagnostika — Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*, 2015, no. 10, pp. 9–16.
- [7] Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alekhin A.V. *Proektirovanie volnovogo tverdotelnogo giroskopa* [Design of the hemispherical resonator gyro]. Moscow, BMSTU Publ., 1998, 168 p.
- [8] Vakhlyarskiy D.S., Guskov A.M., Basarab M.A., Matveev V.A. *Nauka i obrazovanie: elektronnyy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal — Science and Education: Electronic Scientific and technical Journal*, 2016, no. 5, pp. 152–174. DOI: 10.7463/0516.0839190
- [9] Kozubnyak S.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Priborostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument Engineering*, 2015, no. 3, pp. 39–49. DOI: 10.18698/0236-3933-2015-3-39-49
- [10] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsey* [Mechanics of thin-walled structure]. Moscow, URSS Publ., 2017, 496 p.
- [11] Naraykin O.S., Sorokin F.D., Kozubnyak S.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Mechanical Engineering*, 2012, no. 6, pp. 176–185.
- [12] Naraykin O.S., Sorokin F.D., Kozubnyak S.A., Vakhlyarskiy D.S. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroyeniye — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Mechanical Engineering*, 2017, no. 5, pp. 41–51. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-5-41-51
- [13] Dyakonov V.P. *Mathematica 5.1/5.2/6. Programmirovaniye i matematicheskie vychisleniya* [Mathematica 5.1/5.2/6. Programming and mathematical calculations]. Moscow, DMK-Press Publ, 2008, 574 p.

Naraykin O.S., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Vice-President of National Research Center “Kurchatov Institute”, Head of the Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: naraikin@kia.ru

Sorokin F.D., Dr. Sc. (Eng.), Professor Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sorokin_fd@mail.ru

Guskov A.M., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: guskov_am@mail.ru

Kozubnyak S.A., Cand. Sc. (Eng.), Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, employee of the National Research Center “Kurchatov Institute”. e-mail: sark-new@yandex.ru

Vakhlyarskiy D.S., Department Assistant, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: vahlyar@yandex.ru