

## Оптимизация целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса отработавших ступеней в атмосферу

© И.С. Григорьев<sup>1</sup>, А.И. Проскуряков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
Москва, 119991, Россия

<sup>2</sup>Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,  
Баку, AZ1144, Азербайджан

*Рассмотрена идея уменьшения замусоренности околоземного пространства вследствие сброса отработавших ступеней в атмосферу. Решена задача оптимизации апсидального импульсного перелета между опорной круговой орбитой искусственного спутника Земли и целевой эллиптической орбитой. Проведен параметрический анализ полученных решений. Предложена схема выбора импульсов, близкая по функционалу к оптимальной. Исследован вопрос о рациональном числе и расположении импульсов и об оптимальной массе первой ступени. Дана оценка дополнительным расходам массы, связанным со сбросом ступеней в атмосферу, по сравнению с аналогичной ситуацией при простой отстыковке ступеней. Установлено, что при значении импульса довыведения 1,5 км/с в случае оптимального распределения топлива по бакам такие расходы невелики.*

**Ключевые слова:** космический мусор, апсидальные импульсы, сброс в атмосферу, оптимизация траектории космического аппарата

**Введение.** С начала исследования космоса в околоземном пространстве скопился значительный объем космического мусора, состоящего из неисправных объектов искусственного происхождения и их фрагментов, которые уже не функционируют и не могут служить никаким полезным целям, но являются опасным фактором воздействия на космические аппараты (КА). Доклад Генерального секретаря ООН «Воздействие космической деятельности на окружающую среду», прозвучавший 10 декабря 1993 г., придал официальный статус проблеме космического мусора на международном уровне.

Разработка мер по очистке и предотвращению или уменьшению образования космического мусора признана актуальной [1]. В настоящее время проводятся работы по проектированию очистки околоземного пространства с помощью сети [2, 3], гарпуна [4, 5] либо посредством лазерной установки [6–8]. В работе [9] предложен облет крупногабаритного космического мусора с последующим переводом на орбиту захоронения. Однако можно утверждать, что экономически приемлемых проектов пока не существует.

В принятых международных документах в качестве одной из мер по предотвращению образования космического мусора указан увод космических средств с рабочих орбит по окончании их активного функционирования [10]. В работе [11] рассмотрен перевод закончившего работу КА на орбиту захоронения с заданным сроком существования, а в работе [12] — выбор орбит захоронения, на которые можно перевести крупноразмерные космические объекты по окончании их активного функционирования.

В настоящей работе предлагается к рассмотрению сокращение замусоренности космоса — идея, по сути, близкая к изложенной в работах [11, 12]. Согласно этой идее, еще на этапе проектирования верхних ступеней следует предусматривать средства их удаления — в частности, торможение для перевода на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, с помощью дополнительного двигателя, которым оснащена ступень, за счет остающегося в баках топлива.

Цель работы — максимизация полезной массы КА для апсидальных импульсных траекторий его выведения на целевую орбиту с заданным импульсом довыведения и с учетом сброса отработавших ступеней в атмосферу.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу оптимизации перелета КА искусственного спутника Земли (ИСЗ) с низкой круговой орбиты заданного наклона на целевую орбиту. Параметры целевой орбиты — радиусы перигея и апогея, угол наклона — заранее неизвестны и определяются в результате решения оптимизационной задачи. Предполагается, что характеристическая скорость маневра довыведения ограничена заданной величиной. Довыведение спутника на геостационарную орбиту осуществляется с использованием двигателей и за счет топлива самого спутника. Перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле в апсидальной импульсной постановке. Аппарат должен быть оснащен разгонным блоком, состоящим из двух ступеней. Масса ступеней пропорциональна массе содержащегося в них топлива (коэффициент пропорциональности  $\alpha$ ), масса двигателя и структурных конструкций не учитывается. Во всех представленных далее расчетах  $\alpha = 0,08$ . Торможение ступеней для перевода на орбиту, касающуюся границы атмосферы, происходит в апогее соответствующей орбиты отделения. Полезная масса максимизируется.

Перелет рассматривается в декартовой прямоугольной системе координат, связанной с центром Земли. Ось  $z$  этой системы перпендикулярна плоскости экватора и направлена с юга на север, ось  $x$  лежит в плоскости экватора и направлена по линии узлов начальной круговой орбиты от нисходящего узла к восходящему, ось  $y$  дополняет систему координат до правой системы координат. Траектория

перелета представляет собой серию эллиптических орбит, последовательно пересекающихся в точках на оси  $x$ . Каждая из этих орбит однозначно определяется величинами  $r_-$ ,  $r_+$  и  $i$  — расстояниями от центра Земли до точек орбиты на отрицательном и положительном направлении оси  $x$  и углом наклона; если орбита эллиптическая, то одно из этих расстояний является радиусом перигея, другое — радиусом апогея (рис. 1).

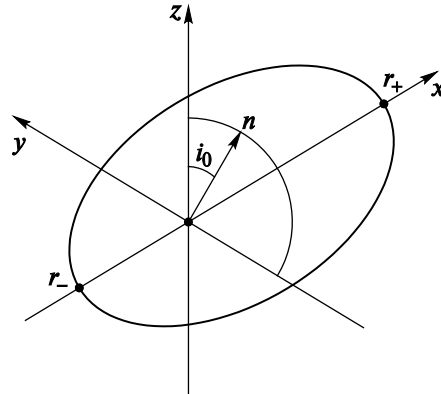


Рис. 1. Эллиптическая орбита с наклоном  $i$  и апсидальными радиусами  $r_-$ ,  $r_+$

Импульсы даются только в точках орбиты на оси  $x$ , радиальные составляющие векторов импульсов равны нулю. При приложении в точке отрицательной части оси  $x$  изменяются величины  $r_+$  и  $i$ , а величина  $r_-$  остается неизменной; импульс перехода с орбиты на орбиту определяется соотношением [13]

$$\Delta v_- = \sqrt{v_{1-}^2 + v_{2-}^2 - 2v_{1-}v_{2-} \cos(i_2 - i_1)},$$

где  $v_{1-} = \sqrt{\frac{2\mu r_{1+}}{r_{1-}(r_{1-} + r_{1+})}}$ ,  $v_{2-} = \sqrt{\frac{2\mu r_{2+}}{r_{2-}(r_{2-} + r_{2+})}}$  — скорости на первой и второй орбите соответственно;  $\mu$  — гравитационный параметр Земли,  $\mu = 398601,19 \text{ км}^3/\text{с}^2$ ;  $r_{1-}$ ,  $r_{2-}$ ,  $r_{1+}$ ,  $r_{2+}$  — апсидальные радиусы на первой и второй орбите соответственно;  $i_1$ ,  $i_2$  — наклон первой и второй орбиты соответственно.

Аналогично, при приложении в точке положительной части оси  $x$  изменяются величины  $r_-$  и  $i$ , неизменной остается величина  $r_+$ , а импульс перехода с орбиты на орбиту определяется соотношением

$$\Delta v_+ = \sqrt{v_{1+}^2 + v_{2+}^2 - 2v_{1+}v_{2+} \cos(i_2 - i_1)},$$

где

$$v_{1+} = \sqrt{\frac{2\mu r_{1-}}{r_{1+}(r_{1-} + r_{1+})}}, \quad v_{2+} = \sqrt{\frac{2\mu r_{2-}}{r_{2+}(r_{2-} + r_{2+})}}, \quad (1)$$

причем  $r_{1+} = r_{2+}$ .

Таким образом, есть последовательность орбит перехода, и на ней определяется оптимизируемый функционал — полезная масса. В начальный момент на орбите старта масса КА считается равной единице ( $m_0 = 1$ ). После каждого импульса она изменяется согласно формуле Циолковского

$$m_+ = m_- \exp(-\Delta v/c),$$

где  $c$  — скорость истечения реактивной струи,  $c = P_{\text{уд}} g_3$ ;  $g_3$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли,  $g_3 = 9,80665 \text{ м/с}^2$ ; при расчетах используется величина удельной тяги  $P_{\text{уд}} = 350 \text{ с}$ .

Рассмотрим два варианта сброса отработавших ступеней: 1) простая отстыковка ступени; 2) сброс ступени в атмосферу. В первом случае сбрасываемая масса считается пропорциональной массе находящегося в ней топлива, во втором — ступень сбрасывается с некоторым остатком топлива, расходуемого на торможение ступени. Предположим, что разделение произошло на орбите с параметрами  $r_-$ ,  $r_+$ ,  $i$  и тормозной импульс дан в точке  $r_+$ . Он не изменяет наклон орбиты, но уменьшает радиус  $r_-$ :

$$\Delta v_{\text{сб}} = v_+ - v_{\text{б}+}. \quad (2)$$

Здесь скорости  $v_+$  и  $v_{\text{б}+}$  выражены аналогично формуле (1):

$$v_+ = \sqrt{\frac{2\mu r_-}{r_+(r_- + r_+)}}, \quad v_{\text{б}+} = \sqrt{\frac{2\mu r_{\text{атм}}}{r_+(r_{\text{атм}} + r_+)}}$$

где  $r_{\text{атм}}$  — радиус перигея, достаточный для постепенного торможения КА в атмосфере,  $r_{\text{атм}} = R_3 + 100 \text{ км}$ .

Данный метод является развитием подходов, изложенных в работах [14–16].

**Решение задачи.** Все маневры выполняются с использованием двух ступеней. Импульс (или импульсы) с общей суммой характеристической скорости  $u_1$  реализуется с использованием первой ступени,  $u_2$  — второй ступени.

В случае простой отстыковки ступеней:

масса КА после выполнения первой серии маневров

$$m_{1-} = m_0 \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right), \quad (3)$$

сухая масса первой ступени

$$m_{1c} = \alpha m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right),$$

масса КА после сброса первой ступени

$$m_{1+} = m_{1-} - m_{1c} = m_0 \left( (1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha \right),$$

масса КА после выполнения второй серии маневров

$$m_{2-} = m_{1+} \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right),$$

сухая масса второй ступени

$$m_{2c} = \alpha m_{1+} \left(1 - \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\right),$$

полезная масса

$$m_n = m_{2-} - m_{2c} = m_0 \left( (1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha \right) \left( (1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right) - \alpha \right),$$

где  $m_0$  — безразмерная масса КА,  $m_0 = 1$ ;  $u_1, u_2$  — характеристические скорости маневра, реализованные за счет топлива из первой и второй ступеней соответственно;  $c$  — скорость истечения реактивной струи;  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности.

Решение задачи с простой отстыковкой ступеней хорошо известно [17] и в настоящей работе приводится для сравнения.

В случае сброса ступеней в атмосферу разделить траекторную и массовую части задачи не удастся.

Как и при простом сбросе, после первой серии маневров масса КА определяется по формуле (3). Рассмотрим случай, когда отделение первой ступени произошло на эллиптической орбите с радиусами  $r_{сб1-}$ ,  $r_{сб1+}$  и тормозной импульс дан в положительной части оси  $x$ . Формула для тормозного импульса задается подстановкой соответствующих переменных в выражение (2). В отличие от предыдущего случая, обозначим  $m_{1c}$  массу сбрасываемой ступени, состоящую из сухой массы и массы топлива, необходимого для реализации маневра сброса в атмосферу. Сухая масса  $m_{1\text{сухая}}$  сброшенной первой ступени после тормозного импульса составляет

$$m_{1\text{сухая}} = m_{1c} \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right).$$

Считаем, что топлива в ступени не осталось и это ее сухая масса. Масса  $m_{1\text{топлива}}$  топлива в первой ступени определяется по уравнению

$$m_{1\text{топлива}} = m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right) + m_{1c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right)\right),$$

сухая масса первой ступени

$$m_{1\text{сухая}} = \alpha \left( m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right) + m_{1c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right)\right) \right),$$

где  $\Delta v_{c61}$  — дополнительное импульсное воздействие, переводящее первую ступень на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы.

В результате решения линейного уравнения

$$m_{1c} \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right) = \alpha \left( m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right) + m_{1c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right)\right) \right):$$

определяется масса  $m_{1c}$  сбрасываемой ступени:

$$m_{1c} = \frac{\alpha m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right) - \alpha}. \quad (4)$$

Масса КА после сброса первой ступени составляет

$$m_{1+} = m_{1-} - m_{1c}.$$

Вторая ступень отделяется на целевой орбите. Импульс  $\Delta v_{c62}$  сброса и сбрасываемая масса  $m_{2c}$  второй ступени определяются аналогично первой ступени при положении апогея орбиты отделения на положительной части оси  $x$ :

$$m_{2c} = \frac{\alpha m_{1+} \left(1 - \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_{c62}}{c}\right) - \alpha}.$$

Полезная масса определяется соотношением

$$m_{\Pi} = m_{2+} = m_{2-} - m_{2c}. \quad (5)$$

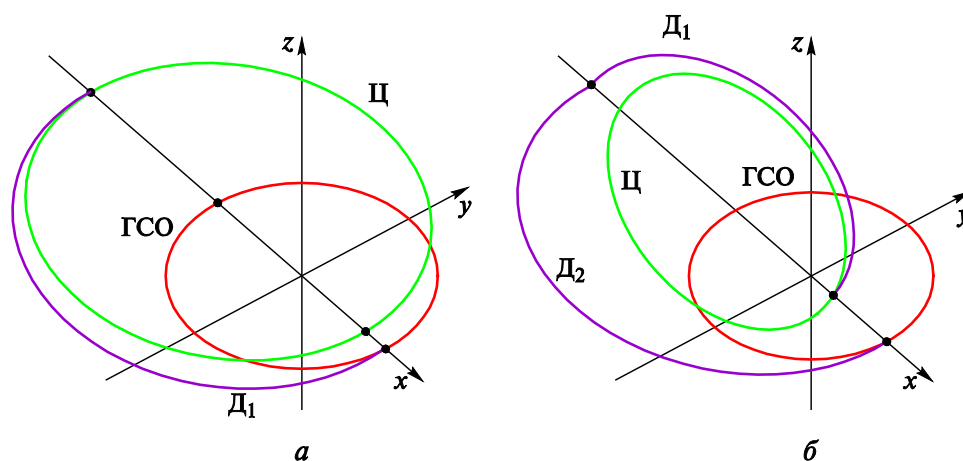
При последующем анализе предполагается, что перелет начинается на начальной орбите старта с круговой высотой 200 км ( $r_{0-} = r_{0+} = R_3 + 200 = 6578,25$  км) и наклоном  $i_0 = 0,9$  рад.

При вычислении импульса довыведения КА с целевой орбиты на геостационарную (ГСО) рассматриваются четыре возможных маневра.

Первый маневр — двухимпульсный. При этом первый импульс в положительной части оси  $x$  изменяет величину  $R_{ц-}$  до  $R_{ГСО}$ , а второй импульс в отрицательной части оси  $x$  является установочным. Импульс довыведения считается как сумма этих двух импульсов, угол наклона орбиты довыведения определяется из условия минимума импульса довыведения.

Второй маневр также двухимпульсный. Он аналогичен первому маневру, но первый импульс дается в отрицательной части оси  $x$ , а установочный — в положительной. На рис. 2, *а* зеленым цветом выделена целевая орбита, красным — геостационарная, синим — орбита довыведения, соответствующая двухимпульсному маневру.

Третий маневр является трехимпульсным. При этом первый импульс дается в положительной части оси  $x$  и он изменяет величину  $R_{ц-}$  до  $R_{max}$  — максимально-возможного удаления КА от притягивающего центра. Вторым импульсом в удаленной точке  $r_- = R_{max}$  изменяет  $r_+$  до  $R_{ГСО}$ . Третий импульс снова в положительной части оси  $x$  является установочным. Импульс довыведения равен сумме этих трех импульсов, а углы наклона двух эллиптических орбит рассматриваемого маневра довыведения определяются из условий его минимума. Этот маневр изображен на рис. 2, *б*.

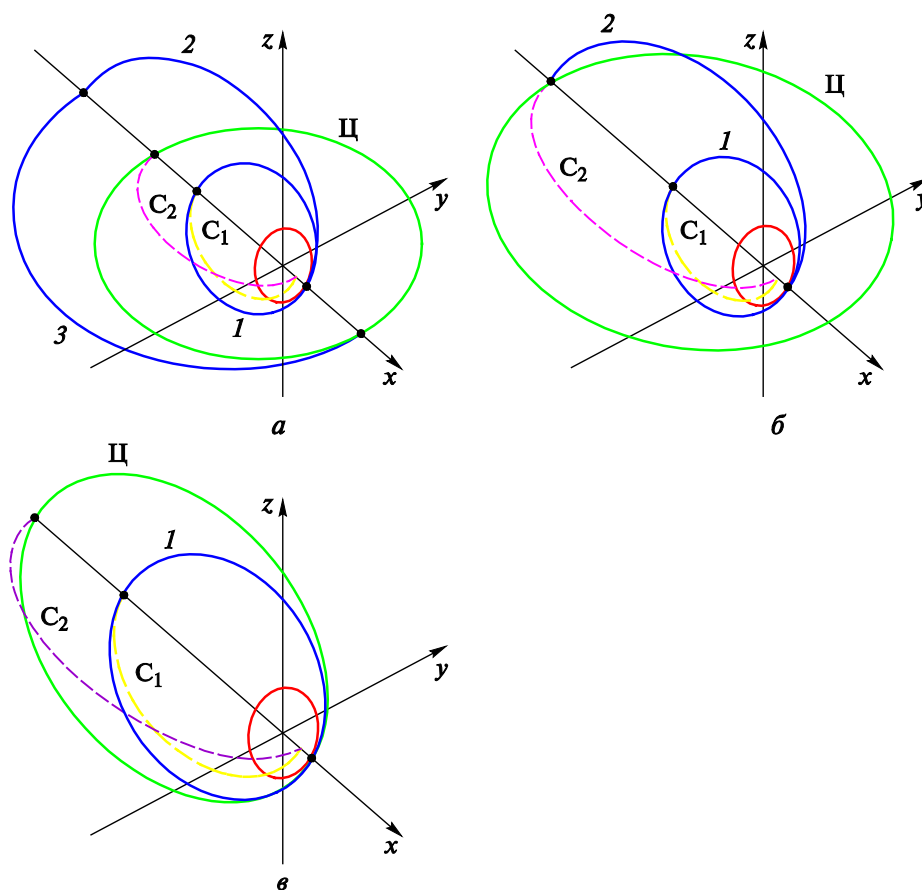


**Рис. 2.** Маневры довыведения ( $D_1$  — первая орбита довыведения,  $D_2$  — вторая орбита довыведения) космического аппарата с целевой орбиты Ц на геостационарную:  
*а* — двухимпульсный; *б* — трехимпульсный

Четвертый маневр аналогичен третьему, но первый и последний импульс даются в отрицательной части оси  $x$ , а импульс в удаленной точке — в положительной. Итоговый импульс довыведения определя-

ется как минимум из импульсов доведения этих четырех возможных маневров.

Рассматривались различные схемы перелета КА с круговой орбиты ИСЗ на целевую. Вначале предполагалось, что в задаче перелета на целевую орбиту импульсы последовательно подаются во всех апогеях и перигеях переходных орбит. В процессе оптимизации часть таких импульсов обнулилась. Итоговое решение, в зависимости от импульса доведения, получается двух-, трех- или четырехимпульсным (рис. 3). Можно сказать, что оно возникает вследствие биэллиптического перелета КА на ГСО. Отметим, что первоначальные расчеты были проведены с помощью прямых методов оптимизации, а итоговое решение получено с применением принципа Лагранжа [18, 19]. Система нелинейных уравнений, получаемая в результате применения принципа Лагранжа, решается модифицированным методом Ньютона.



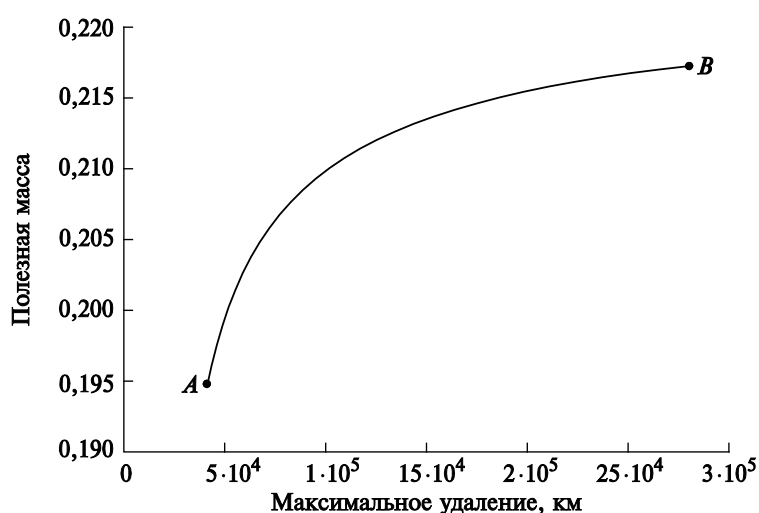
**Рис. 3.** Схемы перелета с опорной орбиты на целевую орбиту ( $C_1$ ,  $C_2$  — орбиты сброса соответственно первой и второй ступени в атмосферу) по маневрам:  $a$  — четырехимпульсному;  $б$  — трехимпульсному;  $в$  — двухимпульсному



Для пояснения полученного результата рассмотрим вспомогательную задачу апсидального импульсного перехода с низкой круговой орбиты ИСЗ на ГСО. Трехимпульсный переход состоит из двух эллиптических движений. Первый, «разгонный», импульс переводит КА с круговой орбиты ИСЗ радиусом  $r_0 = R_3 + 200$  км и наклоном  $i_0 = 0,9$  рад на первую эллиптическую орбиту с параметрами  $r_{1+} = R_3 + 200$  км,  $r_{1-} = r_*$  и наклоном  $i_1$ . Второй импульс «в удаленной точке»  $r_{1-} = r_*$  переводит КА с первой эллиптической орбиты на вторую с параметрами  $r_{2-} = r_*$ ,  $r_{2+} = R_{\text{ГСО}} = 42\,164$  км и наклоном  $i_2$ . Третий, «установочный», импульс переводит КА со второй эллиптической орбиты на ГСО. Полезная масса вычисляется по формуле Циолковского

$$m_{\text{п}} = \exp\left(-\frac{\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3}{c}\right).$$

Зависимость обезразмеренной полезной массы от  $r_*$  для такого перехода при оптимальном выборе  $i_1$  и  $i_2$  представлена на рис. 4. Оптимальные величины  $i_1$  и  $i_2$  и соответствующая им величина  $m_{\text{п}}$  определены в результате численного решения задачи максимизации функции двух переменных без дополнительных ограничений  $m_{\text{п}}(i_1, i_2) \rightarrow \max$ . На первом этапе использовался метод покоординатного спуска, на втором — метод Ньютона.



**Рис. 4.** Зависимость полезной массы от величины максимально возможного удаления космического аппарата в задаче оптимизации траектории биэллиптического перелета с опорной орбиты на геостационарную

Точка  $A$  ( $r_* = R_{\text{ГСО}}$ ) на рис. 4 соответствует гомановскому переходу. Полученная зависимость показывает, что оптимальный (среди двухимпульсных) гомановский перелет при расширении класса сравнения до трехимпульсных оптимальным не является. Максимум полезной массы соответствует максимально допустимой величине  $r_* = R_{\text{max}}$ , а при отсутствии такого ограничения — переходу через бесконечность.

В качестве второй вспомогательной задачи рассмотрим простую схему построения перехода. Для этого построим оптимальный биэллиптический перелет с низкой круговой орбиты ИСЗ с заданным наклоном на ГСО при заданном максимальном удалении КА от Земли  $r_* = R_{\text{max}}$ . На рис. 4 такой переход соответствует величине  $R_{\text{max}} = 280\,000$  км (точка  $B$ ). Обозначим  $\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3$  величины импульсных воздействий в рассмотренной задаче биэллиптического перелета на ГСО,  $\Delta v_{\text{дов}}$  — импульс довыведения,  $u_1$  и  $u_2$  — характеристические скорости маневров, реализованные за счет топлива из первой и второй ступени соответственно.

После отработки первой серии маневров КА оказывается на соответствующей орбите сброса первой ступени. Случай  $u_1 < \Delta v_1$  называется разделением первого импульса, случай  $\Delta v_1 < u_1 < \Delta v_1 + \Delta v_2$  — разделением второго импульса, случай  $\Delta v_1 + \Delta v_2 < u_1$  — разделением третьего импульса, случаи  $u_1 = \Delta v_1$  и  $u_1 = \Delta v_1 + \Delta v_2$  называются схемами без разделения импульсов со сбросом отработавшей первой ступени на первом и на втором протяженном пассивном участке соответственно. Величина  $u_2$  определяется соотношением

$$u_2 = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 - \Delta v_{\text{дов}} - u_1. \quad (6)$$

Положение и скорость КА после выполнения второй серии маневров и определяют целевую орбиту (орбиту сброса второй ступени).

В зависимости от величины импульса довыведения получаются различные целевые орбиты. Рассмотрены три характерные значения импульса довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО: 0,5; 1,0 и 1,5 м/с. В случае импульса доведения, равного 0,5 м/с, перигей целевой орбиты равен радиусу ГСО, апогей выше нее, но ниже максимально возможного удаления. В данном случае возможны пять нижеперечисленных схем разделения при выведении КА на целевую орбиту.

Во-первых, в случае разделения первого импульса (см. рис. 3, *a*) схема перелета состоит из трех переходных орбит: перигей первой переходной орбиты равен радиусу опорной орбиты, апогей лежит ниже максимально возможного удаления КА; перевод первой ступени на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, происхо-

дит с апогея рассматриваемой переходной орбиты; перигей второй переходной орбиты равен радиусу опорной, апогей — максимально возможному удалению; перигей третьей орбиты равен перигею целевой орбиты, апогей — максимально возможному удалению.

Во-вторых, в случае разделения второго импульса получается схема перелета, состоящая из трех орбит: перигей первой орбиты равен радиусу опорной, апогей — максимально возможному удалению; перигей второй орбиты лежит ниже перигея целевой орбиты, апогей равен максимально возможному удалению КА; перигей третьей орбиты равен перигею целевой орбиты, апогей — максимально возможному удалению; перевод первой ступени на орбиту, касающуюся границы атмосферы, происходит с апогея второй переходной орбиты.

В-третьих, в случае разделения третьего импульса получается следующая схема перелета: первая переходная орбита аналогична первой орбите в задаче разделения второго импульса; апогей второй орбиты равен максимально возможному удалению КА, перигей — радиусу перигея целевой орбиты; апогей третьей орбиты лежит ниже максимально возможного удаления КА, но выше апогея целевой орбиты; перевод первой ступени на орбиту, касающуюся границы атмосферы, происходит с апогея третьей орбиты.

В-четвертых и в-пятых, в случае сброса ступени без разделения импульсов перелет состоит из двух переходных орбит: перигей первой переходной орбиты равен радиусу опорной орбиты, апогей — максимально возможному удалению; перигей второй переходной орбиты равен перигею целевой орбиты, апогей — максимально возможному удалению. При сбросе ступени на первом протяженном пассивном участке перевод ступени на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, происходит в максимально удаленной точке  $R_{\max}$ , и величина импульса сброса мала (требуется уменьшить высоту перигея на 100 км). Наилучшее довыведение КА с целевой орбиты на ГСО во всех этих случаях осуществляется за счет одного импульса в перигее целевой орбиты.

В случае импульса довыведения, равного 1,0 км/с апогей целевой орбиты равен максимально возможному удалению КА, перигей лежит ниже ГСО. В данном случае получаются три схемы разделения: первого импульса (см. рис 3, б), второго импульса и схема без разделения импульсов, в которой первая ступень переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, с апогея первой переходной орбиты.

В случае импульса довыведения, равного 1,5 км/с перигей целевой орбиты равен радиусу опорной круговой орбиты, апогей лежит ниже максимально возможного удаления. В данном случае реализуется единственно возможная схема с разделением первого импульса (см. рис. 3, в).

Определены зависимости полезной массы от массы первой ступени в результате решения трех задач: 1) простая отстыковка ступени от КА (простой сброс); 2) простая схема со сбросом в атмосферу (вторая вспомогательная задача); 3) задача оптимизации со сбросом в атмосферу.

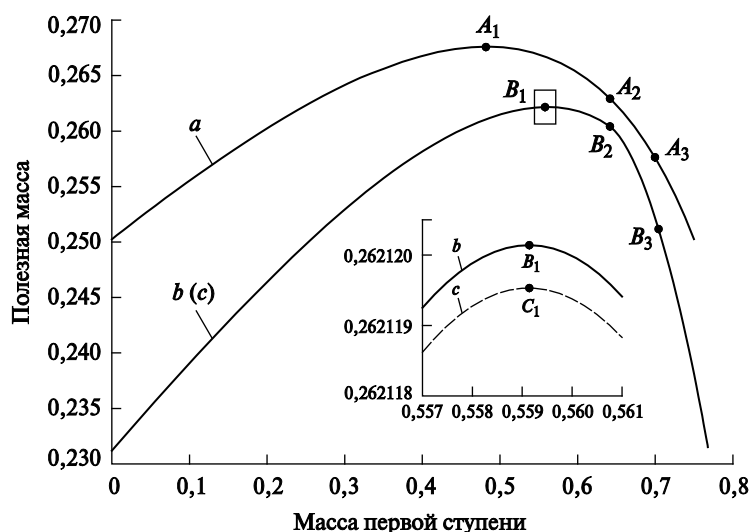
Задача оптимизации со сбросом ступеней в атмосферу и с простой отстыковкой ступеней решалась численно с помощью метода покоординатного спуска на первом этапе и метода Ньютона — на втором этапе: в обоих случаях рассматривалась оптимизация функции многих переменных с ограничением типа равенств и неравенств. Оптимизация проводилась по неизвестным параметрам орбит выведения и целевой орбиты.

При решении второй вспомогательной задачи по заданному значению величины  $u_1$  вычислялось значение  $u_2$  по формуле (6), полезная масса — по формуле (5), а масса первой ступени — по формуле

$$m_{1c} = 1 - m_{1+} = 1 - m_{1-} + m_{1c},$$

где  $m_{1-}$  и  $m_{1c}$  заданы формулами (3) и (4) соответственно.

График зависимости полезной массы от массы первой ступени в случае импульса довыведения, равного 0,5 км/с, представлен на рис. 5: кривая  $a$  соответствует простому сбросу, кривая  $b$  ( $c$ ) — сбросу ступеней в атмосферу (простая схема и задача оптимизации). Отметим, что решения задачи оптимизации и второй вспомогательной задачи на основном графике визуально не различаются. Полезная масса в задаче с простой отстыковкой ступеней (0,267), как и следовало ожидать, больше, чем в задаче со сбросом ступеней в атмосферу (0,262).



**Рис. 5.** Зависимость полезной массы от массы первой ступени в задачах перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую эллиптическую (импульс довыведения равен 0,5 км/с)

Точки  $A_1, B_1, C_1$  соответствует максимуму полезной массы,  $A_2, B_2$  и  $A_3, B_3$  — решению задачи без разделения импульсов, но  $A_2 (B_2)$  показывает отстыковку первой ступени от КА на первой переходной орбите, а  $A_3 (B_3)$  — отстыковку первой ступени от КА на второй орбите. Во врезке окрестности точки максимума эта зависимость изображена в увеличенном масштабе: линия  $c$  — полезная масса во второй вспомогательной задаче, линия  $b$  — в задаче оптимизации. Отсюда следует, что полезная масса в задаче оптимизации несколько лучше полезной массы во второй вспомогательной задаче. Максимум в обеих задачах соответствует массе первой ступени, равной 0,5591317, в задаче оптимизации максимальная полезная масса равна 0,2621201, во второй вспомогательной задаче — 0,2621195 (различие в седьмом знаке после запятой).

Аналогичная зависимость полезной массы от массы первой ступени в случае импульса довыведения, равного 1,0 км/с, представлена на рис. 6. Полезная масса в задаче с простой отстыковкой ступеней (0,316) больше, чем в задаче со сбросом ступеней в атмосферу (0,314). Как в задаче оптимизации, так и во второй вспомогательной задаче максимум соответствует массе первой ступени, равной 0,4686843, максимальная полезная масса в задаче оптимизации равна 0,31420396, во второй вспомогательной задаче — 0,31420295 (различие в шестом знаке после запятой).

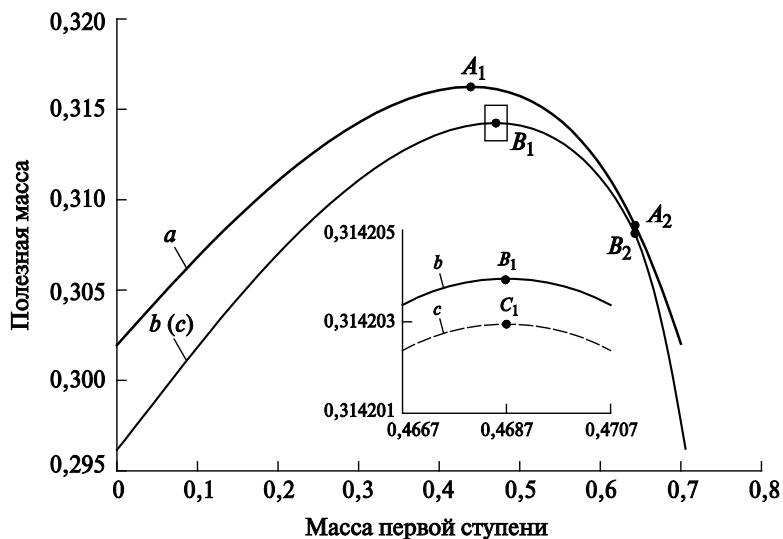
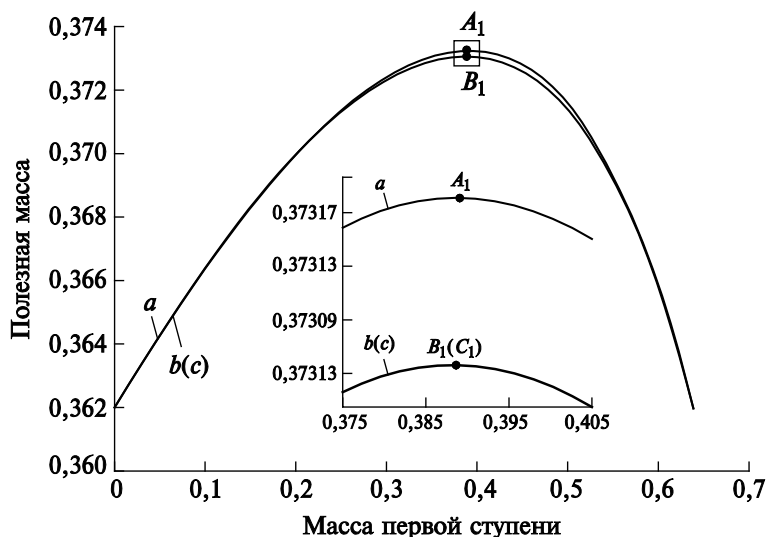


Рис. 6. Зависимость полезной массы от массы первой ступени в задачах перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую эллиптическую (импульс довыведения равен 1,0 км/с)

Зависимость полезной массы от массы первой ступени в случае импульса довыведения, равного 1,5 км/с, представлена на рис. 7. Полезная масса в задаче с простой отстыковкой ступеней (0,37318) больше, чем в задаче со сбросом ступеней в атмосферу (0,37305). По сравнению с предыдущими случаями отличие простого сброса ступеней от сброса в атмосферу визуализируется на графике только в окрестности точки, соответствующей максимуму полезной массы. Это обусловлено малым значением импульса, переводящего вторую ступень на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. Как в задаче оптимизации, так и во второй вспомогательной задаче максимум соответствует массе первой ступени, равной 0,388544314663, максимальная полезная масса в задаче оптимизации равна 0,373055529801, во второй вспомогательной задаче — 0,373055529689 (различие в десятом знаке после запятой). Отметим, что во всех рассмотренных выше случаях различие значений полезной массы в задаче оптимизации и во второй вспомогательной задаче не связано с погрешностями расчетов. Вычисления проводились с большей точностью: полученная многомерная точка во второй вспомогательной задаче отделима от множества останковки метода Ньютона, применяемого при решении задачи оптимизации.

Наличие локального максимума в задаче со сбросом ступеней в атмосферу демонстрирует зависимости полезной массы от радиусов апогея и перигея целевой эллиптической орбиты (рис. 8), при этом импульс довыведения равен 0,5 км/с. Для каждой расчетной точки



**Рис. 7.** Зависимость полезной массы от массы первой ступени в задачах перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую эллиптическую (импульс довыведения равен 1,5 км/с)

(заданных радиусов апогея и перигея) так подобраны наклон целевой орбиты, неизвестный радиус апогея первой переходной орбиты, углы наклона трех переходных орбит и орбиты довыведения, чтобы удовлетворить ограничению импульса довыведения и обеспечить максимальную полезную массу. Значения этих величин определены численно в результате решения системы уравнений по принципу Лагранжа. «Излом» на графике соответствует радиусу перигея целевой орбиты, равного радиусу ГСО. Следует отметить «овраговость» линий уровня функционала — абсолютное изменение радиуса апогея значительно меньше влияет на функционал, чем отклонение перигея от радиуса ГСО. Выделенная точка на графике соответствует наилучшим значениям радиуса апогея и перигея целевой орбиты для рассматриваемого импульса довыведения. Как видно по данным на рис. 8, максимум полезной массы соответствует случаю, когда радиус перигея равен радиусу ГСО. На рис. 5 эта точка соответствует точке  $B_1$  на врезке.

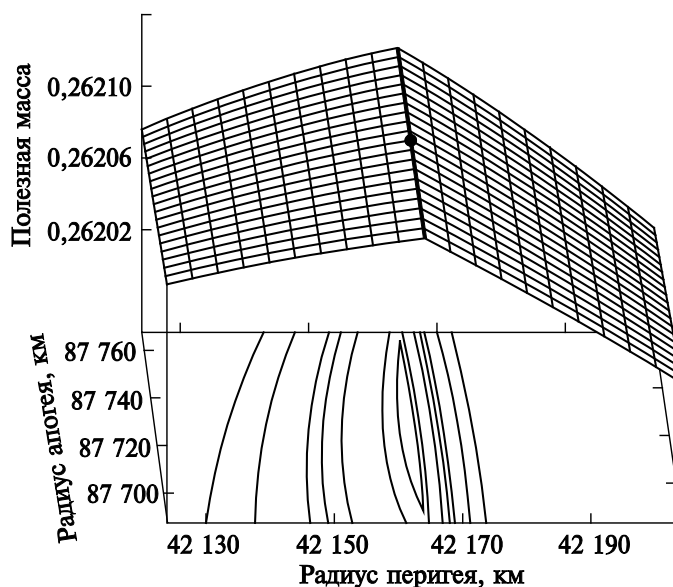


Рис. 8. Зависимость полезной массы от радиусов апогея и перигея целевой эллиптической орбиты (импульс довыведения равен 0,5 км/с)

**Заключение.** В результате выполненных расчетов было установлено следующее. Решение задачи оптимизации перелета КА на целевую эллиптическую орбиту в зависимости от импульса довыведения является двух-, трех или четырехимпульсным; максимум полезной массы достигается при разделении первого импульса; простая схема

сброса ступеней в атмосферу позволяет построить решение задачи, близкое к оптимальному; накладные расходы, связанные со сбросом ступеней в атмосферу при импульсе довыведения, равном 1,5 км/с и максимально возможном удалении ( $R_{\max} = 280\,000$  км), малы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Райкунов Г.Г., ред. *Космический мусор. Кн. 2. Предупреждение образования космического мусора*. Москва, Физматлит, 2014, 188 с.
- [2] Starke J., Bischof B., Foth W.-O., Gunter J.-J. *ROGER a potential orbital space debris removal system*. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010cosp...38.3935S> (дата обращения 18.12.2018).
- [3] Guang Zhai, Yue Qiu, Bin Liang, Cheng Li. On-orbit capture with flexible tether-net system. *Acta Astronautica*, 2009, no. 69, pp. 613–623.
- [4] Савельев Б.И. *Многоразовый космический аппарат-буксир для уборки космического мусора*. Пат. № 2510359 Российская Федерация, 2014, бюл. № 9, 8 с.
- [5] Dudziak R., Tuttle S., Barraclough S. Harpoon technology development for the active removal of space debris. *Advances in Space Research*, 2015, vol. 56 (3), pp. 509–527.
- [6] Авдеев А.В., Башкин А.С., Каторгин Б.И., Парфеньев М.В. Анализ возможности очистки околоземного пространства от опасных фрагментов космического мусора с помощью космической лазерной установки на основе автономного непрерывного химического ИФ-лазера. *Квантовая электроника*, 2011, т. 41, № 7, с. 669–674.
- [7] Аполлонов В.В. Уничтожение космического мусора и объектов естественного происхождения лазерным излучением. *Квантовая электроника*, 2013, т. 43, № 9, с. 890–894.
- [8] Phipps C.R., Baker K.L., Libby S.B., Liedahl D.A., Olivier S.S., Pleasance L.D., Rubenchik A., et al. Removing orbital debris with lasers. *Advances in Space Research*, 2012, vol. 49 (9), pp. 1283–1300.
- [9] Baranov A.A., Grishko D.A., Razoumny Y.N., Li Jun. Flyby of large-size space debris objects and their transition to the disposal orbits in LEO. *Advances in Space Research*, 2017, vol. 59 (12), pp. 3011–3022.
- [10] *Inter-Agency Space Debris Coordination Committee space debris mitigation guidelines*. 2003. URL: [http://www.unoosa.org/pdf/limited/c1/AC105\\_C1\\_L260RE.pdf](http://www.unoosa.org/pdf/limited/c1/AC105_C1_L260RE.pdf) (дата обращения 10.10.2018).
- [11] Голиков А.Р., Баранов А.Р., Будянский А.А., Чернов Н.В. Выбор низковысотных орбит захоронения и перевод на них выработавших свой ресурс космических аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2015, № 4, с. 4–19.
- [12] Афанасьева Т.И., Гридчина Т.А., Колюка Ю.Ф. Оценка возможных орбит увода для очищения области космического пространства на высотах 900–1500 км. *Космонавтика и ракетостроение*, 2014, № 1, с. 94–105.
- [13] Дубошин Г.Н. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*. Москва, Наука, 1976, 864 с.
- [14] Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Упрощенная оптимизация выведения космического аппарата с возвращением разгонного блока в атмосферу Земли. *Идеи К.Э. Циолковского в инновациях науки и техники. Материалы 51-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского*. Калуга, Эйдос, 2016, с. 142–143.



- [15] Григорьев И.С., Проскураков А.И. Оптимизация перелета космического аппарата на целевую эллиптическую орбиту со сбросом ступеней в атмосферу Земли. *К.Э. Циолковский. Проблемы и будущее российской науки и техники. Материалы 52-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского*. Калуга, Эйдос, 2017, с. 181.
- [16] Григорьев И.С., Проскураков А.И. Оптимизация целевой орбиты и анализ апсидальных импульсных траекторий в задаче перелета КА на целевую орбиту со сбросом отработавших ступеней в атмосферу Земли. *Идеи К.Э. Циолковского в контексте современного развития науки и техники. Материалы 53-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского*. Калуга, Эйдос, 2018, с. 161–162.
- [17] Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры*. Москва, Наука, 1997, 320 с.
- [18] Галеев Э.М. *Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи*. Москва, ЛЕНАНД, 2018, 335 с.
- [19] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление*. Москва, Наука, 2005, 384 с.

Статья поступила в редакцию 06.12.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Григорьев И.С., Проскураков А.И. Оптимизация целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса отработавших ступеней в атмосферу. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 4. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-4-1869>

**Григорьев Илья Сергеевич** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика» механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. e-mail: [iliagri@mech.math.msu.su](mailto:iliagri@mech.math.msu.su)

**Проскураков Александр Игоревич** — аспирант кафедры «Вычислительная математика» механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, старший лаборант кафедры технических наук филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Баку. e-mail: [ap\\_91@mail.ru](mailto:ap_91@mail.ru)

## Optimization of the spacecraft final orbit and the trajectory of the apsidal impulse launch, with due regard to spent stage jettisons into the atmosphere

© I.S. Grigoryev<sup>1</sup>, A.I. Proskuryakov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Baku Branch, Baku, AZ1144, Azerbaijan

*The article considers the idea of reducing littering the near-Earth space by means of spent stage jettisons into the Earth's atmosphere. A solution to the problem of optimization of the apsidal impulse transfer between the reference circular orbit of an Earth's artificial satellite and the final elliptical orbit is proposed. A parametric analysis of the obtained solutions is performed, a simple pulse choice scheme close in functionality to the optimal one is proposed. Questions about the optimal number and location of pulses and the optimal mass of the first stage are investigated. An assessment of the additional mass consumption associated with the stage jettisons into the atmosphere comparing with the simple separation of the stages is performed. It was found that in the case of optimal fuel distribution among the tanks such mass consumption is small when a final ascent pulse is 1.5 km/s.*

**Keywords:** space debris, apsidal pulses, stage jettison into the atmosphere, spacecraft trajectory optimization

### REFERENCES

- [1] Raikunov G.G., ed. *Kosmicheskij musor. Kn. 2. Preduprezhdenie obrazovaniya kosmicheskogo musora* [Space debris. Book 2. Space debris prevention]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 188 p.
- [2] Starke J., Bischof B., Foth W., Gunther J. *ROGER a potential orbital space debris removal system*. Available at: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010cosp...38.3935S> (accessed December 18, 2018).
- [3] Guang Zhai, Yue Qiu, Bin Liang, Cheng Li. *Acta Astronautica*, 2009, no. 69, pp. 613–623.
- [4] Savelyev B.I. *Mnogorazovyy kosmicheskij apparat-buksir dlya uborki kosmicheskogo musora* [Reusable tug spacecraft for cleaning space debris]. Patent RF, no. 2510359, 2014, Bull. 9, 8 p.
- [5] Dudziak R, Tuttle S., Barraclough S. *Advances in Space Research*, 2015, vol. 56 (3), pp. 509–527.
- [6] Avdeev A.V., Bashkin A.S., Katorgin B.I., Parfenyev M.V. *Kvantovaya elektronika — Quantum Electronics*, 2011, vol. 41, no. 7, pp. 669–674.
- [7] Apollonov V.V. *Kvantovaya elektronika — Quantum Electronics*, 2013, vol. 43, no. 9, pp. 890–894.
- [8] Phipps C.R., Baker K.L., Libby S.B., Liedahl D.A., Olivier S.S., Pleasance L.D., Rubenchik A., Trebes J.E., George E.V., Marcovici B., Reilly J.P., Valley M.T. *Advances in Space Research*, 2012, vol. 49 (9), pp. 1283–1300.
- [9] Baranov A.A., Grishko D.A., Razoumny Y.N., Li Jun., *Advances in Space Research*, 2017, vol. 59 (12), pp. 3011–3022.
- [10] *Inter-Agency Space Debris Coordination Committee space debris mitigation guidelines*. 2003. Available at:

- [http://www.unoosa.org/pdf/limited/c1/AC105\\_C1\\_L260RE.pdf](http://www.unoosa.org/pdf/limited/c1/AC105_C1_L260RE.pdf) (accessed October 10, 2018).
- [11] Golikov A.R., Baranov A.R., Budyansky A.A., Chernov N.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroyeniye — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Mechanical Engineering*, 2015, no. 4, pp. 4–19.
- [12] Afanasyeva, T.I., Gridchina, T.A., Kolyuka, Yu.F. *Kosmonavtika i raketostroenie — Cosmonautics and Rocket Engineering*, 2014, no. 1, pp. 94–105.
- [13] Duboshin G.N. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoy mekhanire i astrodinamike* [Reference Guide on Celestial Mechanics and Astrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 864 p.
- [14] Grigoryev I.S., Proskuryakov A.I. Uproschennaya optimizatsiya vyvedeniya kosmicheskogo apparata s vozvrascheniem razgonnogo bloka v atmosferu Zemli [Simplified optimization of the spacecraft launch with booster reentry into the Earth atmosphere]. *Idei K.E. Tsiolkovskogo v innovatsiyakh nauki i tekhniki. Materialy 51-kh Nauchnykh chteniy pamyati K.E. Tsiolkovskogo* [Proceedings of the 51st Scientific Readings in Memory of K.E. Tsiolkovsky. K.E. Tsiolkovsky's ideas in the innovations of science and technology]. Kaluga, Eidos Publ., 2016, pp. 142–143.
- [15] Grigoryev I.S., Proskuryakov A.I. Optimizatsiya pereleta kosmicheskogo apparata na tselevuyu ellipticheskuyu orbitu so sbrosom stupeney v atmosferu Zemli [Optimization of the spacecraft transfer to the final elliptic orbit with discarding rocket stages into the Earth atmosphere]. *K.E. Tsiolkovsky. Problemy i budushee rossiyskoy nauki i tekhniki. Materialy 52-kh Nauchnykh chteniy pamyati K.E. Tsiolkovskogo* [Proceedings of the 52nd Scientific Readings in Memory of K.E. Tsiolkovsky. K.E. Tsiolkovsky. Problems and future of Russian science and technology]. Kaluga, Eidos Publ., 2017, p. 181.
- [16] Grigoryev I.S., Proskuryakov A.I. Optimizatsiya tselevoy orbity i analiz apsidalnykh impulsnykh traektoriy v zadache pereleta kosmicheskogo apparata na tselevuyu orbitu so sbrosom otrabotavshikh stupeney v atmosferu Zemli [Optimization of the final orbit and analysis of apsidal pulse trajectories in the problem of spacecraft transfer to the final orbit with spent stage jettisons into the Earth atmosphere]. *Idei K.E. Tsiolkovskogo v kontekste sovremennogo razvitiya nauki i tekhniki. Materialy 53-kh Nauchnykh chteniy pamyati K.E. Tsiolkovskogo* [Proceedings of the 53rd Scientific Readings in Memory of K.E. Tsiolkovsky. K.E. Tsiolkovsky's ideas in the context of modern development of science and technology]. Kaluga, Eidos Publ., 2018, pp. 161–162.
- [17] Samarsky A.A., Mikhailov A.P. *Matematicheskoe modelirovaniye. Idei. Metody. Primery* [Mathematical modeling. Ideas. Methods. Examples]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 320 p.
- [18] Galeev E.M. *Optimizatsiya. Teoriya. Primery. Zadachi* [Optimization. Theory. Examples. Problems]. Moscow, LENAND Publ., 2018, 335 p.
- [19] Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimalnoe upravlenie* [Optimal control]. Moscow, Nauka Publ., 2005, 384 p.

**Grigoryev I.S.**, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University. e-mail: iliagri@mech.math.msu.su

**Proskuryakov A.I.**, Postgraduate student, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; senior laboratory assistant, Department of Technical Sciences, Lomonosov Moscow State University, Baku Branch. e-mail: ap\_91@mail.ru