УДК 519.718 DOI: 10.18698/2308-6033-2019-4-1867

Расчет надежности для системы с разнородным резервированием элементов в подсистемах

© И.В. Павлов, А.О. Орлова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача доверительного оценивания (по результатам испытаний элементов) основных показателей надежности, таких как вероятность безотказной работы системы в течение заданного промежутка времени и гарантированное (с заданным уровнем гарантии) время безотказной работы для модели системы с произвольными режимами резервирования (нагруженным или ненагруженным) в различных подсистемах. Проанализированы задачи подобного типа, довольно часто встречавшиеся в инженерной практике при проектировании и опытной отработке современных сложных технических систем и их различных составных частей. Представлено построение нижних доверительных границ для указанных основных показателей надежности системы на основе статистической информации, полученной по результатам испытаний ее элементов, а также приведены приближенные асимптотические (для случая высокой надежности) выражения для нижней доверительной границы функции надежности системы.

Ключевые слова: *надежность, система, структура системы, доверительные границы, нагруженное резервирование, ненагруженное резервирование*

Введение. Расчет показателей надежности для сложных систем по результатам испытаний их отдельных компонентов — одна из актуальных проблем в теории надежности. Такие задачи возникают, в частности, тогда, когда проведение испытаний системы как единого целого в достаточном объеме затруднительно или вообще невозможно, а имеется лишь статистическая информация по результатам испытаний ее отдельных элементов. В большинстве случаев основной интерес представляет доверительное оценивание тех или иных показателей надежности системы с заданным уровнем достоверности (коэффициентом доверия).

Существующие методы решения данной проблемы разработаны в основном для частного случая биномиальных испытаний и для случая нагруженного резервирования элементов. В работах [1–8] рассматривались модели сложных систем с нагруженным резервированием элементов без восстановления, в [9, 10] — доверительная оценка надежности для модели системы с нагруженным резервированием с восстанавливаемыми элементами. В монографии [11] получены нижние доверительные границы для основных показателей остаточного ресурса системы по результатам испытаний системы в целом. В предлагаемой работе рассматривается ситуация, когда доверительные границы для показателей надежности системы строятся по результатам испытаний ее различных элементов или подсистем. В работах [12–16] исследуются структуры типа k из n (т. е. структуры, исправные, если из n элементов системы исправны по крайней мере k элементов) также работающие в режиме нагруженного резервирования. Далее рассматривается модель системы, которая может быть составлена из произвольного числа различных подсистем, в каждой из которых может использоваться как нагруженное, так и ненагруженное резервирование. Целью данной работы является разработка для этой более общей ситуации соответствующих методов построения доверительных оценок (границ) для основных показателей надежности системы на основе результатов испытаний ее элементов.

Постановка задачи. Пусть система состоит из n последовательно соединенных подсистем, а каждая i-я подсистема — из n_i однотипных (идентичных) элементов, работающих в режиме нагруженного или ненагруженного резервирования $(i=1, ..., m)$. Кроме того, предположим, что подсистемы с индексами $i=1, ..., k$ работают в режиме нагруженного резервирования, а подсистемы с индексами $i=k+1, ..., m$ — в режиме ненагруженного резервирования. Также будем полагать, что отказы элементов различных подсистем происходят независимо друг от друга и функция надежности одного элемента i-й подсистемы (i-ого типа) имеет вид $P_i(t)=\exp(-\lambda_i t),$ где $\lambda_i>0$ — параметр интенсивности отказов элементов i-го типа, $i=1, \dots, m$. Тогда вероятность безотказной работы в течение времени t (функция надежности) системы для данной модели имеет вид

$$P_c(\lambda_i, t)=\prod_{i=1}^{k} H_i(\lambda_i, t), \tag{1}$$

где $\lambda=(\lambda_1, ..., \lambda_k, \ \lambda_{k+1}, ..., \lambda_m)$ — вектор параметров надежности элементов; $H_i(\lambda_i,\ t)$ — функция надежности i-й подсистемы, $i=1, ..., m.$ Для подсистем с индексами $i=1, ..., k$ (с нагруженным резервированием)

$$H_i(\lambda_i, t)=1-\left[1-\exp(-\lambda_i t)\right]^{n_i}, \quad i=1, ..., k. \tag{2}$$

Для подсистем с индексами $i=k+1, ..., m$ (с ненагруженным резервированием)

$$H_i(\lambda_i, t)=\sum_{l=0}^{n_i-1}\frac{(\lambda_i t)^l}{l!}e^{-\lambda_i t}, \quad i=k+1, ..., m. \tag{3}$$

Точные значения вектора параметров $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k, \lambda_{k+1}, ..., \lambda_m)$ неизвестны, и требуется построить нижнюю доверительную границу для функции надежности системы (1) по результатам испытаний элементов системы на надежность. Далее предположим, что испытания элементов *i*-го типа проводятся по планам испытаний типа $[N_i \;\; B \;\; T_i]$ (в обозначениях книги [1], где символ B означает, что испытания проводятся с восстановлением отказавших элементов), т. е. на испытания в течение времени T_i было поставлено N_i элементов *i*-го типа, в результате чего наблюдалось d_i отказов $(i = 1, ..., m)$.

Пусть $Z = \{\lambda : \lambda_i > 0, \; i = 1, ..., m\}$ — множество всех возможных значений вектора параметров $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$. Вектор результатов испытаний по различным типам элементов обозначим через $d = (d_1, ..., d_m)$, множество всех возможных значений вектора d — через $X = \{d : d_i = 0, 1, 2, ..., \; i = 1, ..., m\}$ и вероятностное распределение d при данном значении $\lambda \in Z$ — через $\underline{P}_\lambda\{d\}$. Таким образом, если исходить из результатов испытаний при различных типах элементов $d = (d_1, ..., d_m)$, можно получить нижнюю γ-доверительную границу для показателя надежности системы $\underline{P}_{\text{c}}(t)$, т. е. такую функцию вектора результатов испытаний $\underline{P}_{\text{c}}(d, t) = \underline{P}_{\text{c}}(d_1, ..., d_m, t)$, при которой

$$P_\lambda\{\underline{P}_{\text{c}}(d, t) \le P_{\text{c}}(\lambda, t)\} \ge \gamma$$

для всех возможных значений вектора параметров $\lambda \in Z$, где γ — коэффициент доверия.

Построение нижней доверительной границы для функции надежности системы. Наблюдаемое на испытаниях по плану $[N_i \;\; B \;\; T_i]$ число отказов d_i имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda_i = N_i T_i \lambda_i \;\; (i = 1, ..., m)$ [1]. Следовательно, статистика $D = d_1 + \ldots + d_m$ (суммарное число отказов) также имеет пуассоновское распределение с параметрами $\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i$, откуда следует

$$P_\lambda\left\{\sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i \le \Delta_\gamma(D)\right\} \ge \gamma, \;\; \lambda \in Z, \qquad (4)$$

где $\Delta_\gamma(D)$ — стандартная верхняя γ-доверительная граница для параметра пуассоновского закона распределения [1, 17].

Введем далее систему подмножеств в пространстве параметров

$$H_d = \left\{ \lambda : \sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i \le \Delta_\gamma(D) \right\}, \; d \in X. \tag{5}$$

В соответствии с формулой (4) набор подмножеств (5) образует систему γ-доверительных множеств для вектора параметров элементов системы $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$. В соответствии с общим методом доверительных множеств [1, 4, 17], нижняя γ-доверительная граница для функции надежности системы $P_с(\lambda, t)$ может быть построена при данном значении вектора результатов испытаний d:

$$\underline{P}_с(d,t) = \min_{\lambda \in H_d} P_с(\lambda, t), \tag{6}$$

где минимум вычисляется по доверительной области H_d в пространстве параметров, которые в соответствии с выражением (5) задается неравенствами

$$\sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i \le \Delta_\gamma(D), \; \lambda_i \ge 0, \; i = 1, \; ..., m. \tag{7}$$

Для вычисления минимума в уравнении (6) удобно представить функцию надежности системы в виде

$$P_с(\lambda, t) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{m} g_i(\lambda_i, t) \right], \tag{8}$$

где для подсистем с индексами $i = 1, ..., k$ (с нагруженным резервированием) функции $g_i(\lambda_i, t)$ имеют вид

$$g_i(\lambda_i, t) = -\ln\left\{ 1 - \left[1 - \exp(-\lambda_i t) \right]^{n_i} \right\}, \; i = 1, ..., k. \tag{9}$$

Для подсистем с индексами $i = k+1, ..., m$ (с ненагруженным резервированием) эти функции можно представить так:

$$g_i(\lambda_i, t) = -\ln \sum_{l=0}^{n_i - 1} \frac{(\lambda_i t)^l}{l!} \exp(-\lambda_i t), \; i = k+1, \; ..., m. \tag{10}$$

В соответствии с выражениями (6)–(8) вычисление минимума в уравнении (6) сводится к нахождению величины

$$\overline{g}(d,t) = \max_{\lambda \in H_d} \sum_{i=1}^{m} g_i(\lambda_i, t), \tag{11}$$

где максимум берется при тех же ограничениях вида (7).

После этого определяется нижняя доверительная граница (6) для функции надежности системы:

$$\underline{P}_{\text{c}}(d,t)=\exp\left[-\overline{g}(d,t)\right]. \tag{12}$$

Функция $g_i(\lambda_i,t)$ является «функцией ресурса» (ведущей функцией в терминологии) для i-й подсистемы, $i=1,\dots,m.$ Покажем, что каждая из этих функций $g_i(\lambda_i,t)$ выпукла по $\lambda_i>0$ при любом фиксированном $t>0$, т. е. как для систем с нагруженным, так и для систем с ненагруженным резервированием. Зафиксируем $t>0.$ Рассмотрим сначала подсистемы с индексами $i=1,\dots,k$ (с нагруженным резервированием). В соответствии с формулой (9) производная ведущей функции $g_i(\lambda_i,t)$ по параметру λ будет

$$\frac{\partial g_i}{\partial\lambda_i}=\frac{n_i t\left[1-\exp(-\lambda_i t)\right]^{n_i-1}\exp(-\lambda_i t)}{1-\left[1-\exp(-\lambda_i t)\right]^{n_i}},\quad i=1,\dots,k.$$

Используя сокращенные обозначения (при фиксированном $t>0$) $p_i(\lambda_i)=\exp(-\lambda_i t),\ \ q_i(\lambda_i)=1-\mathrm{p}_i(-\lambda_i),$ получим

$$\frac{\partial g}{\partial\lambda_i}(\lambda_i,t)=\frac{n_i t\ p_i(\lambda_i)\left[q_i(\lambda_i)\right]^{n_i-1}}{1-q_i^{n_i}(\lambda_i)},\quad i=1,\dots,k,$$

откуда, учитывая также, что

$$[p_i(\lambda_i)+q_i(\lambda_i)]^{n_i}=\sum_{j=0}^{n_i}C_{n_i}^j p_i^j(\lambda_i)\left[q_i(\lambda_i)\right]^{n_i-j}=1,$$

следует

$$\frac{\partial g}{\partial\lambda_i}(\lambda_i,t)=\frac{n_i t\ p_i(\lambda_i)\left[q_i(\lambda_i)\right]^{n_i-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n_i}C_{n_i}^j p_i^j(\lambda)\left[q_i(\lambda_i)\right]^{n_i-j}},\quad i=1,\dots,k. \tag{13}$$

Из выражения (13) находим

$$\frac{\partial g}{\partial\lambda_i}(\lambda_i,t)=\frac{n_i t}{\sum\limits_{j=1}^{n_i}C_{n_i}^j \theta_i^{j-1}(\lambda_i)},\quad i=1,\dots,k, \tag{14}$$

где функция

$$\theta_i(\lambda_i) = \frac{p_i(\lambda_i)}{q_i(\lambda_i)} = \frac{1}{\exp(\lambda_i t) - 1} \qquad (15)$$

монотонно убывает по λ_i при каждом фиксированном $t > 0$, $i = 1, ..., k$. Из выражений (14), (15) следует, что функция $\frac{\partial g}{\partial \lambda_i}(\lambda_i, t)$ при каждом фиксированном $t > 0$ монотонно возрастает по λ_i при каждом $i = 1, ..., k$. Следовательно, ведущая функция i-й подсистемы $g_i(\lambda_i, t)$ при каждом фиксированном $t > 0$ выпукла по параметру $\lambda_i > 0$ при всех $i = 1, ..., k$ (для всех подсистем с нагруженным резервированием).

Рассмотрим далее подсистемы с индексами $i = k+1, ..., m$ (с ненагруженным резервированием). Из выражения (10) при фиксированном $t > 0$ находим

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda_i, t) = \frac{t^{n_i}\lambda_i^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!}\left[\sum_{j=0}^{n_i - 1}\frac{(\lambda_i t)^j}{j!}\right]^{-1} = t\left[r_i!\sum_{j=0}^{r_i}\frac{1}{j!(\lambda_i t)^{r_i - j}}\right]^{-1}, \quad i = k+1, .., m, \qquad (16)$$

где $r_i = n_i - 1$ — число резервных элементов в i-й подсистеме, $i = k+1, ..., m.$. Как видно из выражения (16), функции $\frac{\partial g}{\partial \lambda_i}(\lambda_i, t)$ монотонно возрастают по параметрам λ_i, $i = 1, \ldots, k$, и, следовательно, ведущие функции $g_i(\lambda_i, t)$ при каждом фиксированном $t > 0$ выпуклы по $\lambda_i > 0$ для всех подсистем с индексами $i = n+1, ..., m$ (с ненагруженным резервированием). Таким образом, функция $\sum_{i=1}^{m} g_i(\lambda_i, t)$, от которой вычисляется максимум в выражении (11), выпукла по вектору параметров $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$. В соответствии с известными результатами теории выпуклого программирования [18] следует, что максимум в выражении (11) достигается в одной из m «угловых точек» области (7) вида $\lambda^{(i)} = (0, ..., 0, \tilde{\lambda}_i, 0, ..., 0)$, где $\tilde{\lambda}_i = \Delta_\gamma(D) / N_i T_i$, $i = 1, ..., m.$ Следовательно,

$$\overline{g}(d, t) = \max_{i=1,\ldots,m} g_i\left(\tilde{\lambda}_i, t\right) = \max_{i=1,\ldots,m} g_i\left[\Delta_\gamma(D) / N_i T_i, t\right]. \qquad (17)$$

Из выражений (12), (17) находим нижнюю доверительную границу для функции надежности системы

$$\underline{P}_{\text{c}}(d,t)=\exp\left\{-\max_{i=1,\dots,m} g_i\left[\Delta_\gamma(D)/N_iT_i,\, t\right]\right\}=$$
$$=\min_{i=1,\dots,m}\exp\left\{-g_i\left[\Delta_\gamma(D)/N_iT_i,\, t\right]\right\},$$

откуда, учитывая определение функций $g_i(\lambda_i,t)$ в (9), (10), получим

$$\underline{P}_{\text{c}}(d,t)=\min_{i=1,\dots,m} H_i\left[\Delta_\gamma(D)/N_iT_i,\, t\right], \qquad (18)$$

где функции $H_i(\cdot)$, $i=1,\dots,n,\ n+1,\dots,m$ для различных подсистем с нагруженным и ненагруженным резервированием определяются в соответствии с выражениями (2), (3).

Пример. Рассмотрим систему, составленную из $m=10$ подсистем, $n=5$, т. е. в подсистемах с индексами $i=1,\dots,5$ используется режим нагруженного резервирования, а в подсистемах с индексами $i=6,\dots,10$ — режим ненагруженного резервирования. Числа n_i элементов в различных подсистемах и результаты испытаний N_i, T_i, d_i приведены в таблице. В этом случае нижняя γ-доверительная граница (18) для функции надежности системы при $t=3$ равна $\underline{P}_{\text{c}}=0{,}975$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	3	2	3	2	3	2	3	2	2
N_i	7	9	7	7	10	8	6	9	15	9
T_i	50	30	45	60	20	35	50	30	20	15
d_i	0	1	1	2	1	0	0	1	0	0

Приближенные расчетные формулы для случая высокой надежности системы. Рассмотрим построение асимптотически приближенных выражений для нижней доверительной границы (18) функции надежности системы для случая высокой надежности при $t/N_iT_i \ll 1$ $(i=1,\dots,m)$, т. е. тогда, когда объемы испытаний элементов достаточно велики по сравнению с длиной интервала времени t, относительно которого оценивается надежность системы.

Из выражений (2), (3) для функций надежности различных подсистем находим при $t/N_iT_i \to 0$, $i=1,\dots,m$ для подсистем с индексами $i=1,\dots,n$ (с нагруженным резервированием)

$$H_i\left[\Delta_\gamma(D)\frac{t}{N_iT_i}\right]=1-\left[\Delta_\gamma(D)\frac{t}{N_iT_i}\right]^{n_i}+o\left(\frac{t}{N_iT_i}\right).$$

Для подсистем с индексами $i = n+1, ..., m$ (с ненагруженным резервированием) из (3) находим аналогичное выражение:

$$H_i\left[\frac{\Delta_\gamma(D)}{N_i T_i}\right] = 1 - \frac{1}{n_i!}\left[\frac{\Delta_\gamma(D)t}{N_i T_i}\right]^{n_i} + o\left(\frac{t}{N_i T_i}\right), \quad i = n+1, ..., m,$$

где символ o обозначает слагаемое более высокого порядка малости. Откуда далее для случая высокой надежности (при $t/N_i T_i \ll 1$, $i = 1, ..., m$) следуют соответствующие приближенные формулы для нижней границы надежности системы:

$$\underline{P}_{\text{c}}(d,t) = 1 - \overline{Q}_{\text{c}}(d,t), \tag{19}$$

где $\overline{Q}_{\text{c}}(d,t)$ имеет смысл верхней доверительной границы для функции надежности системы:

$$\overline{Q}_{\text{c}}(d,t) = \max\left\{\max_{i=1,...,k}\left[\frac{\Delta_\gamma(D)t}{N_i T_i}\right]^{n_i}, \quad \max_{i=k+1,...,m}\frac{1}{n_i!}\left[\frac{\Delta_\gamma(D)t}{N_i T_i}\right]^{n_i}\right\}. \tag{20}$$

Доверительное оценивание такого показателя, как гарантированное время безотказной работы системы. Рассмотрим задачу доверительного оценивания еще одного часто используемого в инженерной практике показателя — гарантированного (с заданным уровнем гарантии q) времени безотказной работы системы $t_q = t_q(\lambda)$, определяемого из уравнения

$$P_{\text{c}}(\lambda, t_q) = q\,.$$

Используя полученные выражения (17), (18), находим, что нижняя γ-доверительная граница $\underline{t}_q = \underline{t}_q(d)$ для показателя t_q может быть найдена из уравнения

$$\underline{P}_{\text{c}}(d, \underline{t}_q) = q\,,$$

$$\underline{t}_q = \underline{t}_q(d) = \min_{i=1,\dots,m} u_i(q,d)\,, \tag{21}$$

где величина $u_i = u_i(q,\, d)$ находится из уравнений

$$H_i\left[\frac{\Delta_\gamma(D)u_i}{N_i T_i}\right] = q, \; i = 1, ..., m. \tag{22}$$

В соответствии с (21), (22) может быть также найдена величина $\underline{t}_q$:

$$\underline{t}_q = \underline{t}_q(d) = \min_{i=1,\dots,m}\frac{N_i T_i H_i^{-1}(q)}{\Delta_\gamma(D)}\,, \tag{23}$$

где $H_i^{-1}(q)$ — функция, обратная к функции надежности i-й подсистемы $H_i(t), i=1,...,m$, а более точно, $H_i^{-1}(q)=\sigma_i$, где σ_i можно определить для подсистем с индексами $i=1,...,k$ (с нагруженным резервированием) с помощью выражения

$$1-\left[1-\exp(-\sigma_i)\right]^{n_i}=q,\ i=1,...,k,$$

а для подсистем с индексами $i=k+1,...,m$ (с ненагруженным резервированием) — из выражения

$$\exp(-\sigma_i)\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{\sigma_i^j}{j!}=q,\ i=k+1,...,m.$$

Подтверждение заданных требований к показателям надежности системы. На основе полученных выше выражений также может быть решена задача, часто возникающая в инженерной практике, — определение объема испытаний элементов различных типов (подсистем), необходимых для подтверждения заданных требований и показателем надежности системы. Пусть требование к вероятности безотказной работы системы $P_{\text{с}}(t)$ в течение заданного времени t имеет вид

$$P_{\text{с}}(t)\geq P_{\text{тр}}, \tag{24}$$

где $P_{\text{тр}}$ — заданный требуемый уровень этого показателя.

Требование (неравенство) вида (24) считается выполненным (с достоверностью γ), если построенная по результатам испытаний элементов системы нижняя γ-доверительная граница $\underline{P}_{\text{с}}=\underline{P}_{\text{с}}(d,t)$ удовлетворяет этому неравенству, т. е.

$$\underline{P}_{\text{с}}(d,t)\geq P_{\text{тр}}. \tag{25}$$

Тогда из полученных выше выражений (17), (18) находим, что объем испытаний элементов различных типов (подсистем) N_iT_i, $i=1,...,m,$ необходимых для подтверждения требований (неравенств) вида (24), (25), должны удовлетворять неравенствам в случае безотказных испытаний с учетом того, что $\Delta_\gamma(0)=\left|\ln(1-\gamma)\right|$:

$$H_i\left[\frac{\left|\ln(1-\gamma)\right|t}{N_iT_i}\right]\geq P_{\text{тр}},\ i=1,...,m.$$

Отсюда при монотонном убывании функции надежности $H_i(t)$ получим

$$N_i T_i \geq \frac{|\ln(1-\gamma)| t}{H_i^{-1}(P_{\text{тр}})}, \; i = 1, \ldots, m,$$

где $H_i^{-1}(P_{\text{тр}})$ — функция, обратная к функциям надежности подсистем $H_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$.

Кроме того, рассмотрим случай, когда требование к показателю надежности системы имеет вид

$$t_q \geq L, \tag{26}$$

где t_q — гарантированное (с уровнем гарантии q) время безотказной работы системы; L — заданный требуемый уровень этого показателя.

Требование (неравенство) вида (26) считается выполненным с достоверностью γ, если построенная по результатам испытаний элементов системы нижняя γ-доверительная граница $\underline{t}_q = \underline{t}_q(d)$ для этого показателя удовлетворяет неравенству

$$\underline{t}_q \geq L.$$

С учетом полученных выше выражений (21) – (23) для доверительной границы $\underline{t}_q$ находим, что в этом случае объемы испытаний элементов $N_i T_i$ $i = 1, \ldots, m$, необходимые для подтверждения с достоверностью γ требования вида (26), должны удовлетворять неравенствам (в случае безотказных испытаний)

$$\frac{N_i T_i H_i^{-1}(q)}{|\ln(1-\gamma)|} \geq L,$$

откуда следуют соответствующие неравенства непосредственно для объемов испытаний элементов различных подсистем:

$$N_i T_i \geq \frac{L|\ln(1-\gamma)|}{H_i^{-1}(q)}, \; i = 1, \ldots, m.$$

Эти неравенства показывают зависимость необходимых объемов испытаний элементов различных подсистем (как с нагруженным, так и с ненагруженным резервированием) от заданного (требуемого) уровня показателя, а также от функций надежности и количества резервных элементов в различных подсистемах.

Заключение. Таким образом, для общей модели системы с разнородным (нагруженным или ненагруженным) режимом резервирования в различных подсистемах построены по результатам испытаний элементов системы доверительные границы для основных показателей надежности, таких как вероятность безотказной работы системы в течение заданного времени и гарантированное (с заданным уровнем гарантии) время безотказной работы системы. Получены приближенные асимптотические выражения для нижней доверительной границы функции надежности системы в естественной, с точки зрения приложений, асимптотике (для случая высокой надежности). Получены также неравенства (нижние границы) для объемов испытаний элементов различных подсистем, необходимых для подтверждения заданных требований к основным показателям надежности системы, позволяющие на качественном уровне исследовать зависимость этих параметров от количества резервных элементов в подсистемах. С точки зрения приложений существенный интерес представляет также обобщение приведенных выше результатов на более общие модели систем, в том числе на системы с восстановлением и системы со сложной структурой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. *Математические методы в теории надежности*. Москва, Книжный дом «Либроком», 2013, 584 с.

[2] Гнеденко Б.В., ред. *Вопросы математической теории надежности*. Москва, Радио и связь, 1983, 376 с.

[3] Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. *Statistical reliability engineering*. N.Y., John Wiley & Sons, 1999, 517 p.

[4] Беляев Ю.К. Доверительные интервалы для функций от многих неизвестных параметров. *Докл. АН СССР*, 1967, т. 196, № 4, с. 755–758.

[5] Беляев Ю.К., Дугина Т.Н., Чепурин Е.В. Вычисление нижней доверительной границы для вероятности безотказной работы сложных систем. *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика*, 1967, №2, с. 52–69.

[6] Павлов И.В. Оценка надежности системы с резервированием по результатам испытаний ее элементов. *Автоматика и телемеханика*, 2017, № 3, с. 149–158.

[7] Павлов И.В., Разгуляев С.В. Асимптотические оценки надежности системы с резервированием разнотипными элементами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 2. DOI: 10.18698/2308-6033-2015-2-1365

[8] Павлов И.В., Теделури М.М. Доверительные границы для показателя надежности системы с дублированием элементов различных подсистем. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 1. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-1-1719

[9] Павлов И.В., Разгуляев С.В. Построение доверительных границ для коэффициента готовности системы с восстанавливаемыми элементами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки*, 2015, № 4, с. 15–22.

[10] Павлов И.В., Разгуляев С.В. Нижняя доверительная граница среднего времени безотказной работы системы с восстанавливаемыми элементами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки*, 2018, № 5, с. 37–44.

[11] Садыхов Г.С., Савченко В.П., Сидняев Н.И. *Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, с. 382.

[12] Asadi M., Bayramoglu I. The mean residual life function of a k-out-of-n structure at the system level (2006) *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 55 (2), pp. 314–318.
[13] Lixuan Lu, Gregory Lewis. Configuration determination for k-out-of-n partially redundant systems. *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 93, iss. 11, 2008, November, pp. 1594–1604.
[14] Wei-Chang Yeh. A simple algorithm for evaluating the k-out-of-n network reliability. *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 83, iss. 1, January, 2004, pp. 93–101.
[15] Emmanuel J, Marquez R, Levitin G. Algorithm for estimating reliability confidence bounds of multi-state systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 2008; iss. 93 (8), pp. 1231–1243.
[16] Hryniewicz O. Confidence bounds for the reliability of a system from subsystem data. *RT&A*? 2010, iss. 1, pp. 145–160.
[17] Горяинов В.Б. и др. *Математическая статистика, том 17*. Крищенко А.П., Зарубин В.С., ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 424 с.
[18] Зангвилл У.И. *Нелинейное программирование. Единый подход.* Москва, Советское радио, 1973, 312 с.

Статья поступила в редакцию 06.03.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Павлов И.В., Орлова А.О. Расчет надежности для системы с разнородным резервированием элементов в подсистемах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 4. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-4-1867

Павлов Игорь Валерианович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: ipavlov@bmstu.ru

Орлова Александра Олеговна — магистрант кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: alex-orlova@mail.ru

Reliability calculations for a system with heterogeneous subsystem redundancy

© I.V. Pavlov, A.O. Orlova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The purpose of the paper was to study the problem of confidence estimation of basic reliability indicators, such as the system failure-free operation probability for a given time and guaranteed uptime, with a given guarantee level, for a system model with arbitrary redundancy modes, loaded or unloaded, in various subsystems. When studying the problem, we relied on the elements test results. Problems like that are often found in engineering practice when designing and experimentally developing modern complex engineering systems and their various components. The paper gives the construction of lower confidence limits for the indicated main indicators of the system reliability based on the available statistical information on the test results of its elements, and also presents approximate asymptotic (for the case of high reliability) expressions obtained for the lower confidence limit of the system reliability function.

Keywords: *reliability, system, system structure, confidence limits, loaded redundancy, unloaded redundancy*

REFERENCES

[1] Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovev A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical methods in reliability theory]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2013, 584 p.

[2] Gnedenko B.V., ed. *Voprosy matematicheskoy teorii nadezhnosti* [Problems of mathematical reliability theory]. Moscow, Radio i Svyaz Publ., 1983, 376 p.

[3] Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. *Statistical reliability engineering*. N.Y., John Wiley & Sons, 1999, 517 p.

[4] Belyaev Yu.K. *Doklady AN SSSR* (*Proceedings of the USSR Academy of Sciences*), 1967, vol. 196, no. 4, pp. 755–758.

[5] Belyaev Yu.K., Dugina T.N., Chepurin E.V. *Izv. AN SSSR, Tekhnicheskaya kibernetika* (*Izv. USSR Academy of Sciences, Technical Cybernetics*), 1967, no. 2, pp. 52–69.

[6] Pavlov I.V. *Avtomatika i telemehanika — Automation and Remote Control*, 2017, no. 3, pp. 149–158.

[7] Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, iss. 2. DOI: 10.18698/2308-6033-2015-2-1365

[8] Pavlov I.V, Tedeluri M.M. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss. 1. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-1-1719

[9] Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2015, no. 4 (61), pp. 15–22.

[10] Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2018, no. 5, pp. 37–44.

[11] Sadykhov G.S., Savchenko V.P., Sidnyaev N.I. *Modeli i metody otsenki ostatochnogo resursa izdeliy radioelektroniki* [Models and methods for

assessing the residual life of the products of radio electronics]. Moscow, BMSTU Publ., 2015, p. 382.

[12] Asadi M., Bayramoglu I. The mean residual life function of a k-out-of-n structure at the system level (2006) *IEEE Transactions on Reliability*, 55 (2), pp. 314–318.

[13] Lixuan Lu, Gregory Lewis. Configuration determination for k-out-of-n partially redundant systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 2008, vol. 93, issue 11, pp. 1594–1604.

[14] Wei-Chang Yeh. A simple algorithm for evaluating the k-out-of-n network reliability. *Reliability Engineering & System Safety*, 2004, vol. 83, issue 1, pp. 93–101.

[15] Emmanuel J, Marquez R, Levitin G. Algorithm for estimating reliability confidence bounds of multi-state systems. *Reliability Engineering & System Safety* 2008, vol. 93 (8): pp. 1231–1243.

[16] Hryniewicz O. Confidence bounds for the reliability of a system from subsystem data. *RT&A* 2010; 1: pp. 145–160.

[17] Goryainov V.B., Pavlov I.V., et al. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics], *vol. 17.* Krischenko A.P., Zarubin V.S., ed. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 424 p.

[18] Zangwill W.I. *Nonlinear programming: a unified approach*. Prentice-Hall, 1969, 356 p. [In Russ.: Willard I. Zangwill. Nelineynoe programmirovanie. Ediny podhod. Mosoc, Sovetskoe Radio, 1973, 312 p.].

Pavlov I.V., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: ipavlov@bmstu.ru

Orlova A.O., Master's Degree student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: alex-orlova@mail.ru