

## Применение метода сечений для определения коэффициента интенсивности напряжений по фронту полуэллиптической поперечной краевой трещины в растянутой полосе

© А.М. Покровский, Е.И. Дубовицкий

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Разработана методика аналитического определения распределения коэффициента интенсивности напряжений по фронту полуэллиптической краевой поперечной трещины в растянутой постоянными напряжениями полосе. В основу расчета положен метод сечений, согласно которому записано уравнение равновесия для нормальной силы, сводящееся к равенству нормальных сил на свободном торце полосы и в плоскости трещины. Показано, что между значениями коэффициента интенсивности напряжений в наиболее заглубленной точке и в точке, выходящей на поверхность, можно ввести жесткую связь, зависящую от отношения глубины трещины к ее полудлине и отношения глубины трещины к толщине полосы. Введение данной связи позволило использовать в расчете только одно уравнение равновесия. Проведено тестирование полученных расчетных данных для полосы бесконечной ширины, для чего выполнено их сравнение с результатами вычисления коэффициента интенсивности напряжений по имеющимся в справочной литературе аппроксимационным формулам. Обоснована возможность использования разработанной методики для полосы конечной ширины путем сравнения результатов расчета по предлагаемой методике с численными значениями, полученными в процессе решения задачи методом конечных элементов в программной среде ANSYS.*

**Ключевые слова:** полуэллиптическая трещина, коэффициент интенсивности напряжений, метод сечений, метод конечных элементов

**Введение.** Значительное количество деталей машин и строительных конструкций представляют собой работающие на растяжение, в том числе и при циклически изменяющейся нагрузке, полосы, т. е. тела длиной, значительно превышающей размеры поперечного сечения. При эксплуатации в таких элементах со временем возникают трещиноподобные дефекты. Для оценки их трещиностойкости и живучести необходимо знать распределение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) по фронту трещин, так как только в этом случае можно применить силовой критерий разрушения Ирвина [1].

Для определения КИН в деталях с трещинами, как правило, используют численные методы, в первую очередь метод конечных элементов (МКЭ). Чаще всего применяют стандартные конечно-элементные комплексы, в которых имеется встроенная функция вычисления КИН. Например, в работе [2] для вычисления КИН по фронту полуэллиптической краевой трещины в нагруженной внутренним давлением трубе

используется программная среда ANSYS. Часто при оценке трещиностойкости деталей используют аппроксимационные выражения для КИН, приводимые в справочной литературе [3–6], а также в работе [7]. Однако не для всех схем можно найти готовые решения. Достаточно простым и в то же время обладающим приемлемой точностью методом определения КИН является метод сечений [8].

Следует отметить, что в литературных источниках, например в работе [9], приводятся решения с использованием метода сечений в основном только для сквозных или осесимметричных трещин, но в них не рассматривается распределение КИН по фронту трещины, которое имеет место для несквозных трещин.

В работах [10, 11] представлено решение методом сечений задачи о распределении КИН по фронту дисковых трещин в прокатных валках с использованием асимптотических формул для определения напряжений.

В настоящей работе предложена методика вычисления КИН по фронту полуэллиптической краевой поперечной трещины в растянутой полосе методом сечений с помощью усовершенствованных точных формул для напряжений.

**Постановка задачи и исходные данные.** Рассмотрим растянутую напряжениями  $\sigma$  полосу бесконечной длины толщиной  $h$  и шириной  $d$  с поперечной краевой полуэллиптической трещиной глубиной  $a$  и полудлиной  $l$  (рис. 1).

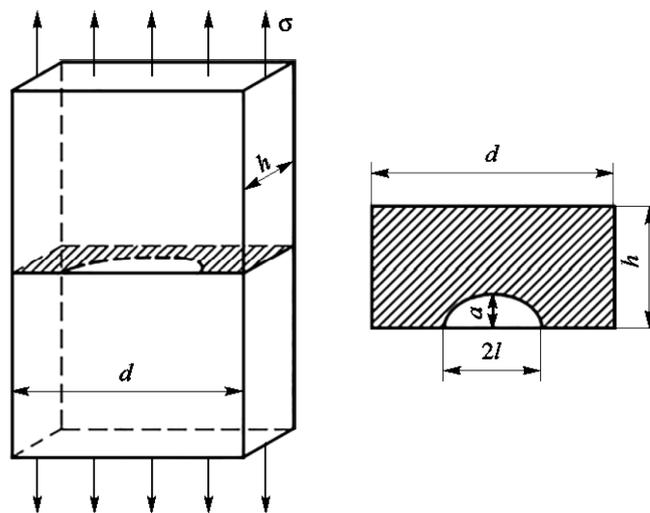


Рис. 1. Поперечная краевая полуэллиптическая трещина в полосе

В связи с симметрией задачи будем рассматривать только правую часть поперечного сечения полосы (рис. 2). Функция контура трещины имеет следующий вид:

$$R(\varphi) = \frac{al}{\sqrt{(a \cos \varphi)^2 + (l \sin \varphi)^2}},$$

где  $\varphi$  — угол, определяющий точку на фронте трещины ( $\varphi = 0$  для точки, выходящей на поверхность,  $\varphi = \pi/2$  для наиболее заглубленной точки).

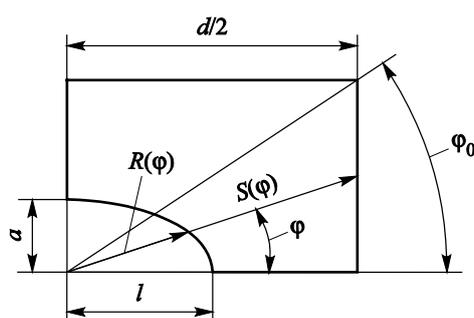


Рис. 2. Поперечное сечение полосы в плоскости трещины

Расстояние до внешнего контура полосы

$$S(\varphi) = \begin{cases} \frac{d}{2 \cos \varphi}, & \varphi \leq \varphi_0, \\ \frac{h}{\sin \varphi}, & \varphi > \varphi_0. \end{cases}$$

где  $\varphi_0 = \arctg(2h/d)$ .

Введем следующие обозначения:  $\varepsilon = a/l$ ;  $\lambda = a/h$ .

Растягивающее напряжение примем равным 200 МПа, глубину трещины — 5 мм. Полудлину трещины и толщину полосы определим по значениями  $\varepsilon$  и  $\lambda$  соответственно.

**Методика аналитического расчета КИН.** Воспользуемся формулой для напряжений в плоскости дисковой трещины в бесконечной среде [8]:

$$\sigma(r) = \sigma - \frac{2\sigma}{\pi} \arcsin \frac{b}{r} + K_1^\infty \sqrt{\frac{b}{\pi(r^2 - b^2)}}, \quad (1)$$

где  $r$  — радиус-вектор;  $b$  — радиус трещины;  $K_I^\infty = 2\sigma\sqrt{b/\pi}$  — КИН для дисковой трещины в бесконечной среде.

Примем, что напряжения в плоскости полуэллиптической трещины в полосе можно приближенно определить по формуле (1) для дисковой трещины в бесконечной среде при замене постоянного радиуса  $b$  на расстояние  $R(\varphi)$  от начала координат до точки на фронте трещины, а постоянного КИН для круговой трещины на КИН  $K_I(\varphi)$ , зависящий от угла  $\varphi$ :

$$\sigma(r, \varphi) = \sigma - \frac{2\sigma}{\pi} \arcsin \frac{R(\varphi)}{r} + K_I(\varphi) \sqrt{\frac{R(\varphi)}{\pi[r^2 - R^2(\varphi)]}}.$$

Применим для вычисления  $K_I(\varphi)$  метод сечений, согласно которому запишем уравнение равновесия для нормальной силы на одном из торцов и в плоскости трещины:

$$N_\sigma = N_{K_I}.$$

Очевидно, что на внешнем торце нормальная сила

$$N_\sigma = \sigma \frac{dh}{2}.$$

Рассмотрим теперь уравнение для сил в плоскости трещины

$$N_{K_I} = \int_0^{\pi/2} \int_{R(\varphi)}^{S(\varphi)} \left( \sigma - \frac{2\sigma}{\pi} \arcsin \frac{R(\varphi)}{r} + K_I(\varphi) \sqrt{\frac{R(\varphi)}{\pi[r^2 - R^2(\varphi)]}} \right) r dr d\varphi.$$

Примем распределение КИН по координате  $y$  линейным. По углу  $\varphi$  от 0 до  $\pi/2$  получим тригонометрическое распределение

$$\begin{aligned} K_I(\varphi) &= K_I^{(1)} - \frac{K_I^{(1)} - K_I^{(2)}}{a} y = K_I^{(1)} - \frac{K_I^{(1)} - K_I^{(2)}}{a} R(\varphi) \sin \varphi = \\ &= K_I^{(1)} \left( 1 - \frac{R(\varphi)}{a} \sin \varphi \right) + K_I^{(2)} \frac{R(\varphi)}{a} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $K_I^{(1)}$  — КИН в точке, выходящей на поверхность;  $K_I^{(2)}$  — КИН в наиболее заглубленной точке.

Введем жесткую связь между  $K_I^{(1)}$  и  $K_I^{(2)}$ . С этой целью воспользуемся аппроксимационной формулой для определения КИН вдоль фронта поперечной полуэллиптической трещины в растянутом напряжением  $\sigma$  слое толщиной  $h$  в случае, когда глубина трещины меньше ее полудлины [3]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{1+1,464\varepsilon^{1,65}}} \left\{ 1,13 - 0,09\varepsilon + \left[ -0,54 + \frac{0,89}{0,2+\varepsilon} \right] \lambda^2 + \right. \\ \left. + \left[ 0,5 - \frac{1}{0,65+\varepsilon} + 14(1-\varepsilon)^{24} \right] \lambda^4 \right\} \left[ 1 + (0,1 + 0,35\lambda)^2 \right] \times \\ \times (1 - \sin\varphi)^2 (\varepsilon^2 \cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^{0,25}. \quad (3)$$

В работе [4] КИН для наиболее заглубленной точки, т. е.  $K_I^{(2)}$ , рассчитывалось по следующей формуле:

$$K_I^{(2)} = \sigma \sqrt{\pi a} \left\{ 1,1362 - 0,3927\varepsilon - 0,345\varepsilon^2 + 0,2623\varepsilon^3 + \right. \\ \left. + \lambda(-0,2179 + 0,2354\varepsilon + 0,3773\varepsilon^2 - 0,4189\varepsilon^3) + \right. \\ \left. + \lambda^2(5,0486 - 16,7939\varepsilon + 19,986\varepsilon^2 - 8,0212\varepsilon^3) + \right. \\ \left. + \lambda^3(-2,6383 + 8,6007\varepsilon - 9,6332\varepsilon^2 + 3,5118\varepsilon^3) \right\}. \quad (4)$$

Результаты расчета КИН по формуле (3) для наиболее заглубленной точки и точки, выходящей на поверхность ( $K_I^{(2)}$  и  $K_I^{(1)}$  соответственно), для различных значений  $\varepsilon$  и  $\lambda$ , а также отношение  $K_I^{(2)}/K_I^{(1)}$  представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Значения КИН  $K_I^{(2)}$  (числитель) и  $K_I^{(1)}$  (знаменатель), МПа·м<sup>1/2</sup>, вычисленные по формуле (3)

$\lambda$	$\varepsilon$				
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0,1	<u>26,9 (26,4)</u>	<u>25,5 (25,0)</u>	<u>24,0 (23,6)</u>	<u>22,6 (22,2)</u>	<u>21,2 (20,9)</u>
	13,3	15,4	16,8	17,6	18,1
0,2	<u>28,1 (27,6)</u>	<u>26,3 (25,7)</u>	<u>24,6 (24,0)</u>	<u>23,0 (22,5)</u>	<u>21,6 (21,1)</u>
	14,0	16,1	17,4	18,2	18,6
0,3	<u>30,0 (29,6)</u>	<u>27,7 (27,0)</u>	<u>25,6 (24,8)</u>	<u>23,7 (23,0)</u>	<u>22,1 (21,5)</u>
	15,2	17,1	18,3	19,0	19,3
0,4	<u>32,6 (32,3)</u>	<u>29,5 (28,7)</u>	<u>26,9 (25,9)</u>	<u>24,7 (23,7)</u>	<u>22,8 (22,0)</u>
	16,9	18,6	19,6	20,2	20,4
0,5	<u>35,7 (35,4)</u>	<u>31,5 (30,7)</u>	<u>28,4 (27,2)</u>	<u>25,8 (24,6)</u>	<u>23,6 (22,6)</u>
	18,9	20,5	21,3	21,6	21,7
0,6	<u>39,1 (38,8)</u>	<u>33,8 (33,0)</u>	<u>30,0 (28,6)</u>	<u>26,9 (25,5)</u>	<u>24,4 (23,3)</u>
	21,5	22,7	23,3	23,3	23,2

Примечание. В скобках указаны значения  $K_I^{(2)}$ , рассчитанные по формуле (4).

Таблица 2

Значения отношения  $K_1^{(2)}/K_1^{(1)}$

$\lambda$	$\varepsilon$				
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0,1	2,03	1,66	1,43	1,28	1,17
0,2	2,01	1,63	1,41	1,26	1,16
0,3	1,97	1,62	1,40	1,25	1,15
0,4	1,93	1,59	1,37	1,22	1,12
0,5	1,89	1,54	1,33	1,19	1,09
0,6	1,81	1,49	1,29	1,15	1,05

Обычно связь между  $K_1^{(1)}$  и  $K_1^{(2)}$  представляют в следующем виде [3]:

$$K_1^{(2)} = \frac{K_1^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon}} f(\lambda), \quad (5)$$

где  $f(\lambda)$  — функция  $\lambda$ .

В связи с этим разделим значения  $K_1^{(2)}/K_1^{(1)}$  (см. табл. 2) на множитель  $1/\sqrt{\varepsilon}$ . В табл. 3 представлены полученные результаты. По данным табл. 3 видно, что  $(K_1^{(2)}/K_1^{(1)})\sqrt{\varepsilon}$  практически не зависят от  $\varepsilon$  (значения в строчках отличаются менее чем на 1 %), а зависят только от  $\lambda$ . Это подтверждает возможность использования связи между  $K_1^{(1)}$  и  $K_1^{(2)}$  в форме (5). Анализ табличных значений показывает, что зависимость  $f(\lambda)$  близка к линейной, поэтому она была аппроксимирована, согласно методу наименьших квадратов [12], прямой линией. В результате получена следующая связь между  $K_1^{(1)}$  и  $K_1^{(2)}$ :

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} [0,901 - 0,141(\lambda - 0,1)] K_1^{(1)}. \quad (6)$$

Таблица 3

Значения  $(K_1^{(2)}/K_1^{(1)})\sqrt{\varepsilon}$

$\lambda$	$\varepsilon$				
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0,1	0,907	0,909	0,904	0,905	0,906
0,2	0,899	0,893	0,892	0,891	0,899
0,3	0,883	0,887	0,885	0,884	0,891
0,4	0,863	0,871	0,866	0,863	0,868
0,5	0,845	0,843	0,841	0,841	0,844
0,6	0,809	0,816	0,816	0,813	0,813

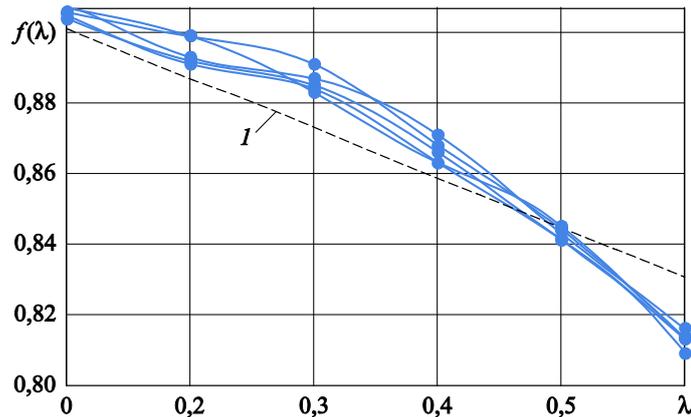


Рис. 3. Аппроксимация  $f(\lambda)$  линейной зависимостью (I)

График функции  $(K_I^{(2)}/K_I^{(1)})\sqrt{\varepsilon}$  в зависимости от  $\lambda$  приведен на рис. 3.

С учетом выражения (6) формула (2) — зависимость КИН от угла  $\varphi$  — примет вид

$$\begin{aligned} K_I(\varphi) &= K_I^{(1)} \left( 1 - \frac{R(\varphi)}{a} \sin \varphi \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} [0,901 - 0,141(\lambda - 0,1)] K_I^{(1)} \frac{R(\varphi)}{a} \sin \varphi = \\ &= K_I^{(1)} \left[ 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} [0,901 - 0,141(\lambda - 0,1)] - 1 \right) \frac{R(\varphi)}{a} \sin \varphi \right]. \end{aligned}$$

В этом случае получим следующее уравнение для определения КИН в точке, выходящей на поверхность:

$$\sigma \frac{dh}{2} - A_{10} = A_{11} K_I^{(1)},$$

где

$$\begin{aligned} A_{10} &= \int_0^{\pi/2} \int_{R(\varphi)}^{S(\varphi)} \left( \sigma - \frac{2\sigma}{\pi} \arcsin \frac{R(\varphi)}{r} \right) r dr d\varphi; \\ A_{11} &= \int_0^{\pi/2} \int_{R(\varphi)}^{S(\varphi)} \left( 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} [0,901 - 0,141(\lambda - 0,1)] - 1 \right) \frac{R(\varphi)}{a} \sin \varphi \right) \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{R(\varphi)}{\pi [r^2 - R^2(\varphi)]}} dr d\varphi. \end{aligned}$$

**Результаты аналитического расчета и их тестирование.**  
 В табл. 4 и 5 представлены результаты расчета по предложенной методике. Ширина полосы принималась равной 10 полудлинам трещины, чтобы имитировать бесконечный слой.

Анализ результатов, представленных в табл. 4 и 5, показывает, что максимальная погрешность вычисления КИН, достигающая 15 % для точки, выходящей на поверхность, наблюдается для глубоких трещин, глубина которых составляет 0,6 толщины слоя. Меньшая погрешность, не превышающая 10 %, имеет место при сравнении с  $K_I^{(2)}$ , вычисленным по формуле (4), за исключением очень вытянутых трещин, длина которых в 10 раз больше глубины ( $\epsilon = 0,2$ ).

Таблица 4

**Значения КИН,  $K_I^{(2)}$  (числитель) и  $K_I^{(1)}$  (знаменатель), МПа·м<sup>1/2</sup>, вычисленные по предложенной методике**

$\lambda$	$\epsilon$				
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0,1	27,5 (2,23%)	24,3 (4,71%)	21,8 (9,17%)	20,1 (11,1%)	18,9 (10,8%)
	13,6 (2,25%)	14,8 (3,90%)	15,3 (8,93%)	15,8 (10,2%)	16,2 (10,5%)
0,2	31,1 (10,7%)	26,8 (1,90%)	23,5 (4,47%)	21,3 (7,39%)	19,6 (7,41%)
	15,7 (12,1%)	16,5 (2,48%)	16,8 (3,45%)	17,0 (6,58%)	17,1 (8,06%)
0,3	33,6 (12,0%)	28,4 (2,53%)	24,6 (3,91%)	22,0 (7,18%)	20,1 (9,05%)
	17,2 (13,1%)	17,8 (4,09%)	17,8 (2,73%)	17,8 (6,35%)	17,8 (7,77%)
0,4	35,6 (9,20%)	29,7 (0,67%)	25,4 (5,58%)	22,6 (8,50%)	20,4 (10,5%)
	18,6 (10,1%)	18,9 (1,61%)	18,7 (4,59%)	18,6 (7,92%)	18,4 (9,80%)
0,5	37,5 (5,04%)	30,8 (2,22%)	26,2 (7,75%)	23,1 (10,5%)	20,7 (12,3%)
	19,9 (5,29%)	20,0 (2,44%)	19,6 (7,98%)	19,3 (10,6%)	19,0 (12,4%)
0,6	39,3 (0,51%)	31,9 (5,62%)	26,9 (10,3%)	23,6 (12,3%)	21,0 (13,5%)
	21,2 (1,40%)	21,0 (7,49%)	20,5 (11,6%)	20,1 (13,7%)	19,7 (15,0%)

*Примечание.* В скобках указаны погрешности расчета КИН относительно значений, вычисленных по формуле (3) (см. табл. 1).

Таблица 5

**Погрешность расчета КИН  $K_I^{(2)}$ , %, относительно значений, вычисленных по формуле (4)**

$\lambda$	$\epsilon$				
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0,1	4,17	2,80	7,63	9,46	9,57
0,2	12,7	4,28	2,08	5,33	7,11
0,3	13,5	5,19	0,81	5,00	6,51
0,4	10,2	3,48	1,93	4,64	7,27
0,5	5,93	0,33	3,68	6,10	8,41
0,6	1,29	3,33	5,94	7,45	9,84

**Результаты численного моделирования.** Для оценки возможности использования изложенной методики определения КИН по фронту полуэллиптической поперечной трещины методом сечений в полосе конечной ширины решим указанную задачу в конечно-элементном комплексе ANSYS.

Конечно-элементная модель полосы толщиной 10 мм и шириной 40 мм представлена на рис. 4. Рассматривалась полоса бесконечной длины, поэтому длина задавалась в 10 раз больше ширины 400 мм. Растягивающее напряжение составляло 200 МПа. Для создания математической модели полосы с трещиной использовались 10-узловые тетраэдрические конечные элементы SOLID 187, а для описания особенности вдоль фронта трещины — специальные сингулярные 15-узловые призматические конечные элементы SOLID 186. Количество элементов — 15 277.

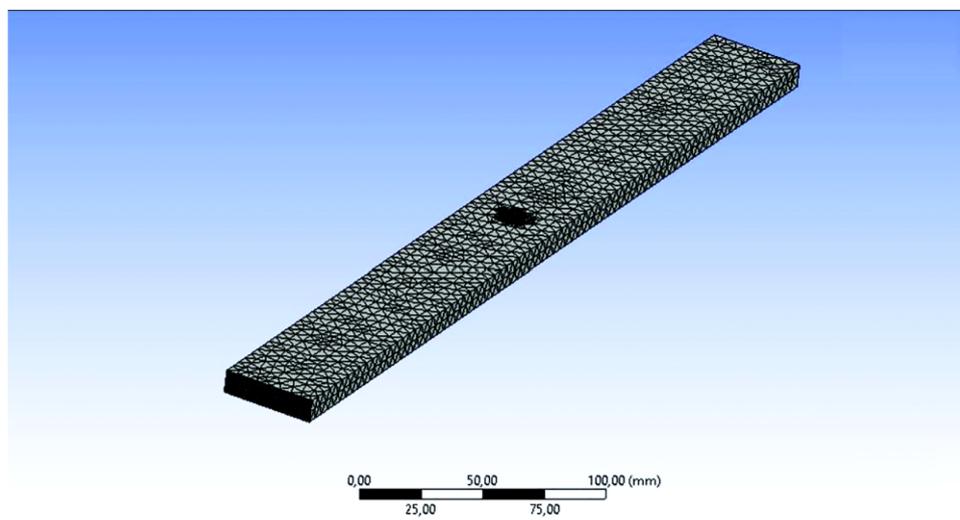


Рис. 4. Конечно-элементная модель полосы с краевой трещиной

В качестве иллюстрации на рис. 5 приведены распределения КИН по фронту трещины для отношений ее глубины к полудлине 0,3 и 0,4 и отношения глубины трещины к толщине, равного 0,1.

В табл. 6 представлены результаты для сравнения значений КИН, полученных методом сечений и МКЭ.

По данным табл. 6 видно, что бóльшая погрешность вычисления КИН методом сечений по отношению к МКЭ (12,25 %) наблюдается для точки, выходящей на поверхность. На рис. 6 приведены графики зависимостей  $K_I(\varphi)$ , рассчитанных с использованием МКЭ и метода сечений для  $\varepsilon = 0,4$ .

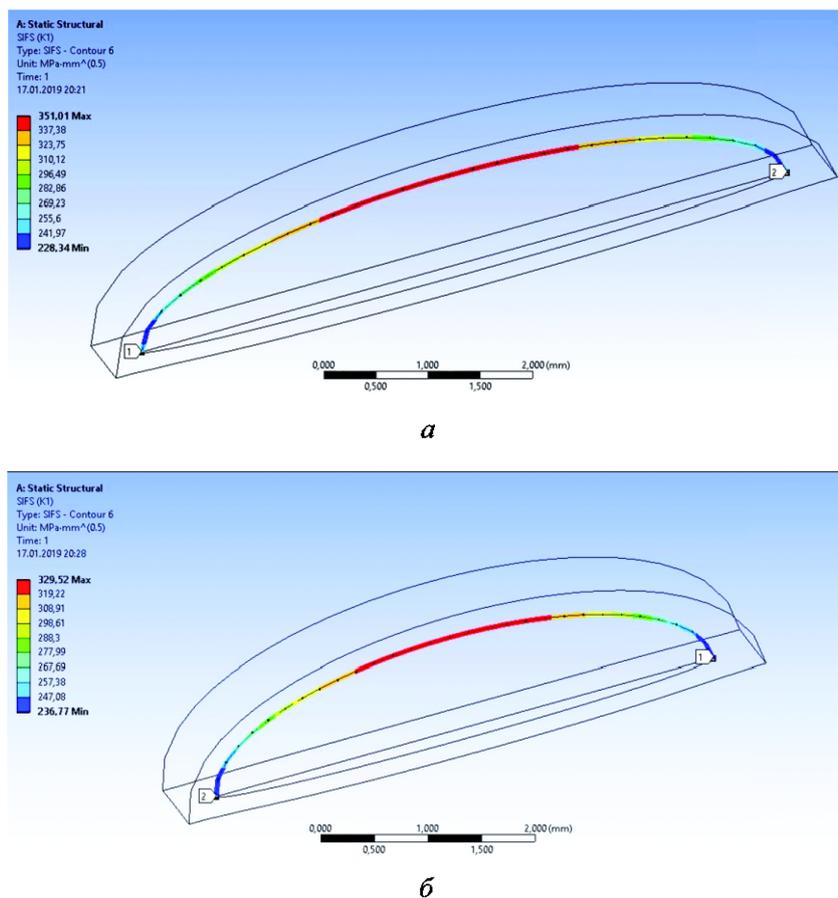


Рис. 5. Распределение КИН по фронту трещины для  $\varepsilon = 0,3$  (а) и  $\varepsilon = 0,4$  (б)

Таблица 6

Значения КИН  $K_I^{(2)}$  (числитель) и  $K_I^{(1)}$  (знаменатель), МПа·м<sup>1/2</sup>,  
полученные с использованием МКЭ и метода сечений

$\lambda$	$\varepsilon = 0,3$		$\varepsilon = 0,4$	
	МКЭ	Метод сечений	МКЭ	Метод сечений
0,1	11,07	11,08 (0,09%)	10,40	10,17 (2,26%)
	7,49	6,71 (11,62%)	7,84	7,11 (10,26%)
0,2	16,82	5,85 (6,12%)	15,15	4,51 (4,41%)
	10,43	19,73 (7,19%)	11,54	110,28 (12,25%)

Примечание. В скобках указана погрешность вычисления методом сечений по отношению к МКЭ.

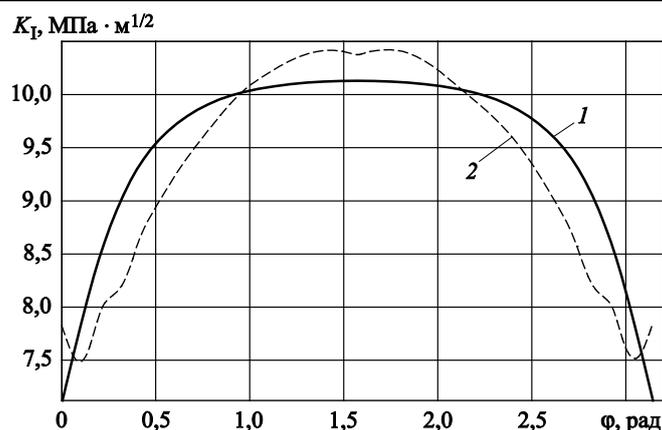


Рис. 6. Распределение КИН по фронту трещины:  
1 — метод сечений; 2 — МКЭ

Результаты тестирования позволяют сделать вывод о возможности использования формулы (5) для связи между  $K_I^{(1)}$  и  $K_I^{(2)}$  и применения метода сечений для определения КИН в изложенной постановке.

**Заключение.** Разработана простая, но достаточно точная методика для определения КИН по фронту краевой полуэллиптической поперечной трещины в растянутой полосе. Данной методикой особенно удобно пользоваться при моделировании роста трещины в случае циклического нагружения. Решение такой задачи с помощью МКЭ затруднительно, так как на каждом шаге требуется генерирование новой конечно-элементной сетки. Изложенную методику вычисления КИН можно обобщить и на другие тела с несквозными трещинами, в первую очередь на нагруженные внутренним давлением тонкостенные трубы с продольными краевыми трещинами.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Черепанов Г.П. *Механика разрушения*. Москва — Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2012, 872 с.
- [2] Глушков С.В., Скворцов Ю.В., Перов С.Н. Сравнение результатов решения задачи механики разрушения для трубы с несквозной трещиной. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2014, № 3, с. 36–49.
- [3] Панасюк В.В., ред. *Механика разрушения и прочность материалов. Т. 2: Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами*. Киев, Наук. думка, 1988, 620 с.
- [4] Мураками Ю., ред. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 2. Пер. с англ.* Москва, Мир, 1990, 1016 с.
- [5] Матвиенко Ю.Г. *Модели и критерии механики разрушения*. Москва, Физматлит, 2006, 328 с.
- [6] Сапунов В.Т. *Прочность поврежденных трубопроводов: течь и разрушение трубопроводов с трещинами*. 3-е изд. Москва, Ленанд, 2019, 187 с.

- [7] Бочектуева Е.Б., Рогов В.Е. Анализ трещиностойкости прокатных валков стана кварто. *Омский научный вестник*, 2017, № 6 (156), с. 12–14.
- [8] Партон В.З., Морозов Е.М. *Механика упругопластического разрушения: Основы механики разрушения*. 3-е изд. Москва, Изд-во ЛКИ, 2008, 352 с.
- [9] Гооге С.Ю., Таболин И.С., Ширяев Е.И., Шрон Л.Б. Применение метода плоских сечений для определения коэффициентов интенсивности напряжений. *Вестник КузГТУ*, 2012, № 1, с. 137–140.
- [10] Покровский А.М., Лешковцев В.Г., Земсков А.А. Оценка трещиностойкости прокатных валков при индукционной закалке. *Вестник машиностроения*, 2001, № 10, с. 56–60.
- [11] Покровский А.М. *Термопрочность цельнокованых и бандажированных прокатных валков*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 272 с.
- [12] Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра: теория и приложения*. Москва. Мир, 2001, 429 с.

Статья поступила в редакцию 19.02.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Покровский А.М., Дубовицкий Е.И. Применение метода сечения для определения коэффициента по фронту полуэллиптической поперечной краевой трещины в растянутой полосе. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 3.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-3-1861>

**Покровский Алексей Михайлович** — д-р техн. наук, профессор, заместитель по научной работе заведующего кафедрой «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: pokrovsky@bmstu.ru

**Дубовицкий Егор Игоревич** — аспирант кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: oakegor@yandex.ru

## Sectioning method application to determine stress intensity factor along the front of a semi-elliptical transverse edge crack in a stretched flat bar

© A.M. Pokrovsky, E.I. Dubovitsky

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article presents the developed method of analytic determination of the stress intensity factor distribution along the front of a semi-elliptical edge transverse crack in a flat bar stretched by constant stresses. The calculation is based on the method of sections. According to the method, the equilibrium equation for the normal force is written, which comes to the equality of the normal forces at the free end of the bar and in the plane of the crack. We show that between the values of the stress intensity factor at the deepest point and at the point coming to the surface, one can introduce a rigid constraint depending on the ratio of the crack depth to its half-length and the ratio of the crack depth to the bar thickness. The introduction of this connection allowed to use only one equilibrium equation in the calculation. To test the obtained data for a bar of infinite width, we compared this data and the results of calculating the stress intensity factor from the approximation formulae available in the reference literature. The possibility of using the developed methodology for a flat bar of finite width is justified by comparing the results of calculation by the proposed method with numerical values obtained in the process of solving the problem by the finite element method in the ANSYS software environment.*

**Keywords:** semi-elliptical crack, stress intensity factor, method of sections, finite element method

### REFERENCES

- [1] Cherepanov G.P. *Mekhanika razrusheniya* [Mechanics of destruction]. Moscow—Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2012, 872 p.
- [2] Glushkov S.V., Skvortsov Yu.V., Perov S.N. Comparison of the results of solving the problem of fracture mechanics for pipe with non-through crack. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 36–49. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.03
- [3] Panasyuk V.V., ed. *Mekhanika razrusheniya i prochnost materialov* [Fracture mechanics and the strength of materials. A handbook in 4 vols.]. Vol. 2: Savruk M.P. *Koeffitsiyenty intensivnosti napryazheniy v telakh s treshchinami* [Stress intensity factors in media with cracks]. Kiev, Nauk. dumka, 1988, 620 p.
- [4] Murakami Yu., ed. *Spravochnik po koeffitsiyentam intensivnosti napryazheniy*. [Handbook of Stress Intensity Factors]. Vol. 2. Moscow, Mir Publ., 1990, 1016 p. [Russian translation].
- [5] Matvienko Yu.G. *Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya* [Models and criteria for fracture mechanics]. Moscow, Fizmathlit Publ., 2006, 328 p.
- [6] Sapunov V.T. *Prochnost povrezhdennykh truboprovodov: tech i razrusheniye truboprovodov s treshchinami* [Strength of damaged pipelines: leakage and destruction of pipelines with cracks]. 3<sup>rd</sup> ed. Moscow, Lenand Publ., 2019, 187 p.
- [7] Bochektueva E.B., Rogov V.E. *Omskiy nauchnyy vestnik — Omsk Scientifc Bulletin*, 2017, no. 6 (156), pp. 12–14.

- [8] Parton V.Z., Morozov Ye.M. *Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya: Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Mechanics of elastoplastic destruction: Fundamentals of fracture mechanics]. 3rd ed. Moscow, LKI Publ., 2008, 352 p.
- [9] Googe S.Yu., Tabolin I.S., Shiryayev Ye.I., Shron L.B. *Vestnik of Kuzbass State Technical University — Bulletin of the Kuzbass State Technical University*, 2012, no. 1, pp. 137–140.
- [10] Pokrovsky A.M., Leshkovtsev V.G., Zemskov A.A. *Vestnik mashinostroyeniya — Bulletin of Mechanical Engineering*, 2001, no. 10, pp. 56–60.
- [11] Pokrovsky A.M. *Termoprochnost' tsel'nokovanykh i bandazhirovannykh prokatnykh valkov* [Thermal strength of one-forged and banded rolls]. Moscow, BMSTU Publ., 2017, 272 p.
- [12] Demmel J.W. *Applied numerical linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997 [In Russ.: Demmel J.W. *Vychislitel'naya lineynaya algebra: teoriya i prilozheniya*. Moscow, Mir Publ., 2001, 429 p.].

**Pokrovsky A.M.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, deputy head of the Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: pokrovsky@bmstu.ru

**Dubovitsky E.I.**, post-graduate student, Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University e-mail: oakegor@yandex.ru