

## Оптимальное конструктивное решение круглых многослойных биморфных пластин

© Д.А. Шляхин, О.В. Ратманова

Самарский государственный технический университет, Самара, 443100, Россия

*Разработана математическая модель расчета биморфных пластин. Рассмотрены многослойные сплошные жестко и шарнирно закрепленные конструкции, в работе которых используется принцип обратного пьезоэффекта. Построены замкнутые решения нестационарных осесимметричных задач теории электроупругости для многослойных конструкций методом конечных интегральных преобразований. На основании анализа численных результатов расчета представлены практические рекомендации по проектированию пьезокерамических преобразователей резонансного и нерезонансного классов. Разработан алгоритм оптимизации работы рассматриваемых конструкций путем подбора их геометрических размеров и используемого материала, позволяющий наиболее эффективно преобразовывать приложенную электрическую нагрузку в механические перемещения. Кроме того, представленные результаты дают возможность уточнить допущения о характере распределения электрического поля, необходимые при проектировании биморфных конструкций других конфигураций, расчет которых возможен только с помощью прикладных теорий для тонких пластин.*

**Ключевые слова:** биморфная пьезокерамическая пластина, нестационарная осесимметричная задача, конечные интегральные преобразования

**Введение.** В различных технических устройствах широко используются пьезокерамические преобразователи в виде тонких биморфных пластин [1–5]. Такие конструкции представляют собой симметричные или асимметричные многослойные системы, состоящие из электроупругих и упругих тонких элементов. В случае использования явления обратного пьезоэффекта изгибные колебания создаются с помощью электрического напряжения, приложенного к электродированным поверхностям пьезокерамических пластин.

Для наиболее эффективного преобразования электрической энергии в механические колебания необходим углубленный анализ связанности физических полей различной природы в многослойных конструкциях. Для решения этой проблемы применяется теория электроупругости в пространственной постановке [6, 7]. Математическая ее постановка включает сложные расчетные соотношения в частных производных. Для их реализации, как правило, используются прикладные теории, в которых применяются различные кинематические гипотезы и допущения о характере распределения напряженности электрического поля в пьезокерамических пластинах [8–14].

Цель настоящего исследования — разработать практические рекомендации по оптимизации функционирования рассматриваемых конструкций на основании представленного алгоритма расчета нестационарных осесимметричных задач для шарнирно и жестко закрепленных сплошных биморфных пластин в трехмерной постановке (без использования упрощений), а также анализа численных результатов. Кроме того, для пластин ступенчато переменной толщины, работу которых можно исследовать только с помощью прикладных теорий, сформулированы гипотезы изменения электрического поля.

**Постановка задачи.** В общем случае круглая биморфная конструкция, занимающая в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega: \{0 \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$ , представляет собой многослойную систему в виде жестко соединенных электроупругих (пьезокерамических) и упругих тонких пластин. Для определенности рассмотрим два конструктивных решения: 1) электроупругая система состоит из двух пьезокерамических пластин высотой  $h_1^*$  ( $h^* = 2h_1^*$ ) — рис. 1, а; 2) конструкция включает металлическую подложку толщиной  $h_2^*$  и две пьезокерамические пластины ( $h^* = 2h_1^* + h_2^*$ ) — рис. 1, б.

Изгибные осесимметричные колебания конструкций индуцируются в результате подведения к торцевым электродированным поверхностям пьезокерамических пластин, выполненных из материала гексагональной системы класса *6mm* [15] с параллельным направлением вектора аксиальной поляризации электрического напряжения  $V^*(r_*, t_*)$ . Рассматриваются случаи жесткого и шарнирного закрепления цилиндрической поверхности электроупругих систем.

Математическая формулировка рассматриваемых начально краевых задач в безразмерной форме включает [7]:

– систему линейных осесимметричных дифференциальных уравнений движения и электростатики относительно компонент вектора перемещений  $U, W$ , а также потенциала электрического поля  $\phi$ :

$$L_{pm} \bar{N}(r, z, t) = 0 \quad (p, m = \overline{1, 3}); \quad (1)$$

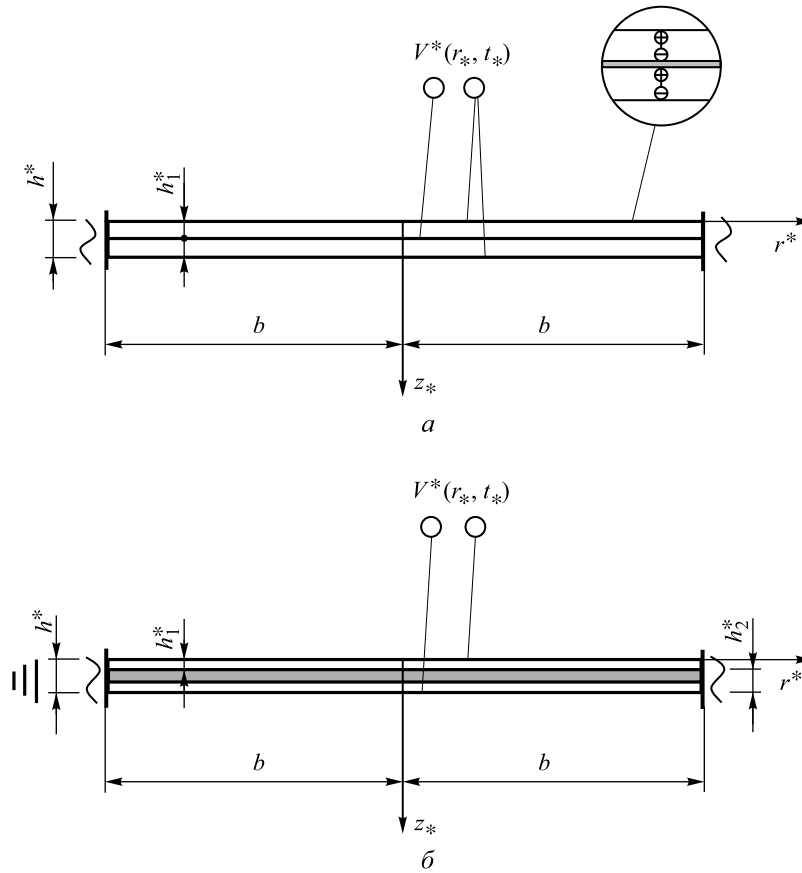
– механические и электрические граничные условия:

$$r = 0, 1 \quad W(0, z, t) < \infty, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad \phi(0, z, t) < \infty, \quad (2)$$

$$W(1, z, t) = 0, \quad D_{r|r=1} = 0;$$

при жестком закреплении

$$U(1, z, t) = 0; \quad (3)$$



**Рис. 1.** Расчетная схема биморфных пластин:  
 а — две пьезокерамические пластины (конструктивное решение 1);  
 б — то же и металлическая подложка (конструктивное решение 2)

при шарнирном закреплении

$$\sigma_{rr}(1, z, t) = 0; \quad (4)$$

$$z = 0, h \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0; \quad (5)$$

конструктивное решение 1 (см. рис. 1, а):  $\phi = V(r, t)/2$ ;

конструктивное решение 2 (см. рис. 1, б):  $\phi = \pm V(r, t)/2$ ;

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \sigma_{zz}(z+0) = \sigma_{zz}(z-0), \quad \sigma_{rz}(z+0) = \sigma_{rz}(z-0), \quad (6)$$

$$W(z+0) = W(z-0), \quad U(z+0) = U(z-0);$$

конструктивное решение 1 (см. рис. 1, а):  $\phi(h_1, z, t) = -V(r, t)/2$ ;

конструктивное решение 2 (см. рис. 1, б):  $\phi = 0$ ;

– начальные условия:

$$t = 0 \quad U(r, z, 0) = W(r, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial U(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial W(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $L_{pm}$  — дифференциальные операторы в частных производных;  $\bar{N}(r, z, t) = [U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t)]^T$ ;  $t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{11}^{(1)} / \rho^{(1)}}$ ;  $[U, W, h, r, z] = [U^*, W^*, h^*, r_*, z_*] / b$ ;  $[\phi, V] = [\phi^*, V^*] e_{33} / (C_{11}^{(1)} b)$ ;  $W^*, U^*, \phi^*$  — компоненты вектора перемещений и потенциал электрического поля в размерной форме соответственно;  $D_r$  — радиальная компонента вектора индукции электрического поля;  $\sigma_{pk}$  — компоненты тензора напряжений ( $p, k = r, z$ );  $C_{11}^{(1)}, \rho^{(1)}$  — модуль упругости и плотность анизотропного пьезокерамического материала соответственно.

Следует отметить, что при исследовании упругой среды (см. рис. 1, б) система уравнений (1) состоит только из уравнений движения, сформулированных относительно компонент вектора перемещений, а при формировании соотношений (6) для первого конструктивного решения (см. рис. 1, а) условия совместности механических напряжений и перемещений при  $z = h_1 + h_2$  отсутствуют.

**Построение общего замкнутого решения.** Решение осуществляется методом конечных интегральных преобразований, с последовательным использованием преобразования Фурье — Бесселя [16] по радиальной координате  $r$  и обобщенного преобразования [17] по аксиальной переменной  $z$ . При этом каждый раз предварительно выполняется процедура стандартизации (приведение граничных условий к виду, позволяющему применить соответствующее преобразование) [18].

Трансформанты  $\bar{R}(n, z, t)$ ,  $G(\lambda_{in}, n, t)$  и формулы обращения соответствующих преобразований имеют вид

$$\bar{R}(n, z, t) = \int_0^1 \bar{N}(r, z, t) \bar{P}(n, r) r dr, \quad \bar{N}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \bar{P} \bar{R}, \quad (8)$$

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_k^h \bar{Y}(\lambda_{in}, z) \bar{R}^*(n, z, t) dz, \quad \bar{R}^* = \sum_{i=1}^{\infty} G \bar{K} \|K_{in}\|^{-2}. \quad (9)$$

Здесь  $\bar{P} = [a_{mp}]$  — диагональная матрица 3-го порядка ( $a_{11} = J_1(j_n r)$ ,  $a_{22} = a_{33} = J_0(j_n r)$ );  $j_n$  — положительные нули функций  $J_1(j_n)$  при

жестком и  $J_0(j_n)$  при шарнирном закреплении ( $n = 0, 1, 2 \dots$ );  $\bar{R} = \bar{H}_k + \bar{R}^*$ ,  $H_k$  — трехкомпонентная ( $k = 1, 2, 3$ ) стандартизирующая вектор-функция;  $\bar{Y} = [K_1, K_2, 0]$ ,  $\bar{K} = [K_1, K_2, K_3]^T$ ,  $\lambda_{in}$  — положительные параметры, образующие счетное множество ( $i = 1, 2, 3 \dots$ );  $\Omega_n, \|K_{in}\|^2$  — квадрат нормы ядра преобразований.

В результате получаем расчетные соотношения для функций  $W, U, \phi$  в виде спектральных разложений по найденной системе собственных функций  $K_1 - K_3$ , которыми являются линейные комбинации обычных и модифицированных функций Бесселя:

$$\bar{N}(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \bar{P}(n, r) \left[ \bar{H}_k + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \bar{K}(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right]. \quad (10)$$

Круговые частоты осесимметричных колебаний цилиндра  $\omega_{in}$

$$\text{связаны с параметром } \lambda_{in} \text{ зависимостью } \omega_{in} = \frac{\lambda_{in}}{b} \sqrt{\frac{C_{11}^{(1)}}{\rho^{(1)}}}.$$

Алгоритм решения начально-краевых задач (1)–(7) подробно описан в работах авторов [19, 20].

**Численный анализ результатов. Выводы.** На основании представленного алгоритма и разработанного программного комплекса получены численные результаты расчета, которые позволяют путем подбора геометрических размеров и материала исследуемых конструкций оптимизировать их работу, т. е. добиться наиболее эффективного преобразования приложенной электрической нагрузки в механические перемещения.

*Пример 1.* Рассмотрим жесткозакрепленную биморфную конструкцию ( $b = 14 \cdot 10^{-3}$  м), состоящую из двух пьезокерамических пластин состава ЦТС-19 (см. рис. 1, а), материал которых имеет следующие физические характеристики:

$$\begin{aligned} \{e_{31}, e_{33}, e_{15}\} &= \{-4,9; 14,9; 10,6\} \text{ Кл/м}^2; \\ \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} &= \{7,73; 7,26\} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}; \rho = 7730 \text{ кг/м}^3; \\ \{C_{11}^{(1)}, C_{33}^{(1)}, C_{12}^{(1)}, C_{13}^{(1)}, C_{55}^{(1)}\} &= \{10,9; 9,1; 6,1; 5,4; 2,4\} \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2. \end{aligned}$$

Численные результаты расчета дают возможность сделать следующие выводы.

1. Для наиболее эффективного преобразования внешнего электрического воздействия в механические колебания на торцевых

электродированных поверхностях пьезокерамических пластин необходимо использовать систему разрезных кольцевых электродов (количеством и размерами электродов определяются нулевые значения функции  $J_1(j_n)$ ) при подключении соседних электродов в противофазе. При сплошном электродном покрытии механические колебания в жесткозакрепленной конструкции не возбуждаются.

На основании этого вывода анализ напряженно-деформированного состояния и электрического поля биморфной пластины, работающей на первой резонансной частоте, проводится при использовании двух электродов на торцевых поверхностях с радиусом раздела  $a = 8,8 \cdot 10^{-3}$  м ( $R_1 = a/b = 0,628$ ). Для этого электрическая нагрузка  $V(r, t)$  представляется в виде

$$V(r, t) = V_0 [H(R_1 - r) - H(r - R_1)] \sin \beta t,$$

где  $V_0$  — амплитудное значение интенсивности в безразмерной форме;  $\beta$  — относительная частота вынужденных колебаний,  $\beta = \beta^* b \sqrt{\rho^{(1)} / C_{11}^{(1)}}$  ( $\beta^*$  — круговая частота вынужденных колебаний).

2. При проектировании изгибных преобразователей необходимо учитывать, что одним из способов повышения чувствительности прибора является уменьшение его толщины. Это приводит к снижению жесткости конструкции и увеличению амплитудных значений вертикальных перемещений. Однако в этом случае наблюдается увеличение аксиальной компоненты векторов напряженности  $E_z(r, z, t)$  и индукции  $D_z(r, z, t)$  электрического поля (рис. 2). Этот факт необходимо учитывать, поскольку при больших значениях  $E_z(r, z, t)$  происходит деполяризация пьезокерамического материала. В частности, образование в пьезокерамическом материале состава ЦТС-19 напряженности электрического поля более 300 кВ/м приводит к снижению численных значений коэффициентов диэлектрической проницаемости и пьезомодулей. В рассматриваемой системе оптимальная толщина  $h_1^* = 0,2 \cdot 10^{-3}$  м ( $V_0^* = 20$  В).

3. Сравнение численных значений аксиальной (см. рис. 2) и радиальной (рис. 3) компонент электрического поля позволяет сделать вывод, что при расчете пьезокерамических пластин с помощью прикладных теорий радиальными составляющими можно пренебречь, поскольку их численные значения существенно меньше значений соответствующих аксиальных величин. Кроме того, принимая во внимание, что в пределах электрода аксиальная компонента напряженности по радиальной координате практически не изменяется, на

основании полученных результатов можно для расчета сформулировать гипотезу о характере изменения напряженности электрического поля в виде простой зависимости

$$E_z(r, z, t) = E_z(z, t) = \pm \frac{f(z)}{h_1^*} V(t),$$

где  $f(z)$  — многочлен, аппроксимирующий соответствующую функцию (см. рис. 2, кривая 1).

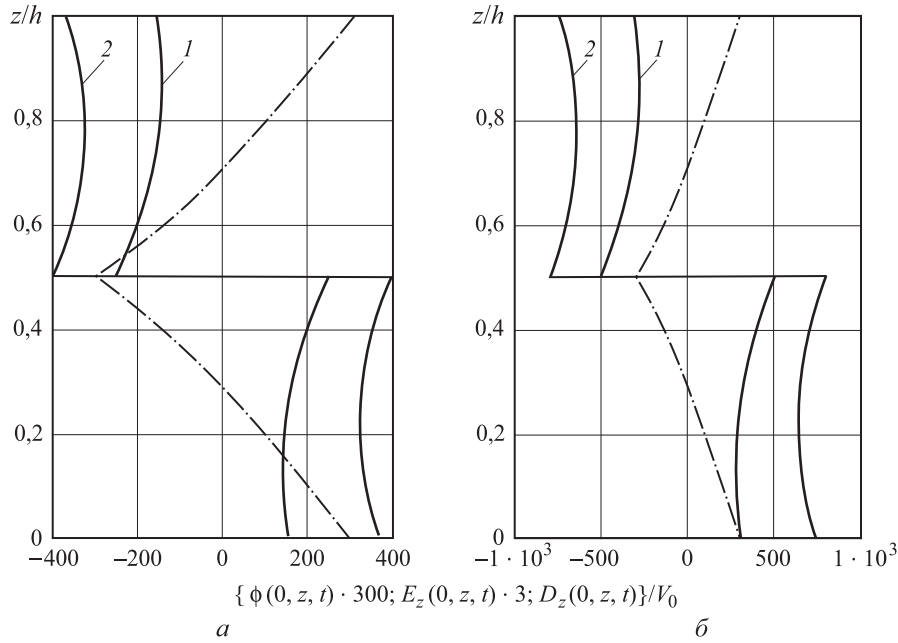
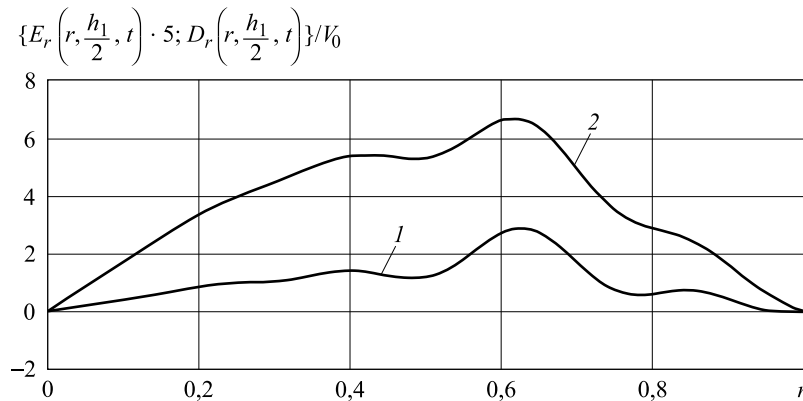


Рис. 2. Графики изменения амплитудных значений  $\phi(r, z, t)$ ,  $E_z(r, z, t)$ ,

$D_z(r, z, t)$  по высоте биморфной пластины при  $\beta = 0,8\lambda_{11}$ :

$a$  —  $h_1^* = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м;  $b$  —  $h_1^* = 0,25 \cdot 10^{-3}$  м; 1 —  $E_z$ ; 2 —  $D_z$ ; пунктирная линия —  $\phi$ ,  $\lambda_{11}$  — собственное значение, соответствующее первой частоте собственных осесимметричных колебаний

**Пример 2.** Рассмотрим шарнирно закрепленную биморфную конструкцию, состоящую из металлической подложки и двух пьезокерамических пластин состава ЦТС-19 (см. рис. 1, б). Подложка ( $h_2^* = 10^{-3}$  м) изготавливается из различных сплавов (дюралюминий имеет следующие физические характеристики: коэффициент Пуассона  $\nu = 0,34$ ; модуль упругости  $E = 7,3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>; плотность  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>; у латуни  $\nu = 0,35$ ;  $E = 9,8 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\rho = 8600$  кг/м<sup>3</sup>).



**Рис. 3.** Графики изменения амплитудных значений радиальных компонент вектора электрического поля (напряженности  $E_r$  и диэлектрической проницаемости  $D_r$ ) по радиальной координате  $r$ :

$$1 - E_r; 2 - D_r (h_1^* = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м})$$

Такое конструктивное решение позволяет повысить прочностные свойства многослойной электроупругой системы, поскольку пьезокерамика является хрупким материалом.

В работе принимаются во внимание выражения для модулей упругости металлической подложки:

$$C_{11}^{(2)} = C_{33}^{(2)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12}^{(2)} = C_{13}^{(2)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$C_{55}^{(2)} = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Работа электроупругой системы рассматривается на первой резонансной частоте. В этом случае для наиболее эффективного преобразования внешнего электрического воздействия на лицевых поверхностях конструкции выполняется сплошное электродное покрытие. В связи с этим электрическая гармоническая нагрузка  $V(r, t)$  представляется в виде

$$V(r, t) = V_0 \sin \beta t.$$

На рис. 4–7 изображены графики, характеризующие изменение по пространственным координатам и времени составляющих механических и электрических полей напряжений ( $\beta = 0,8\lambda_{11}$ ).



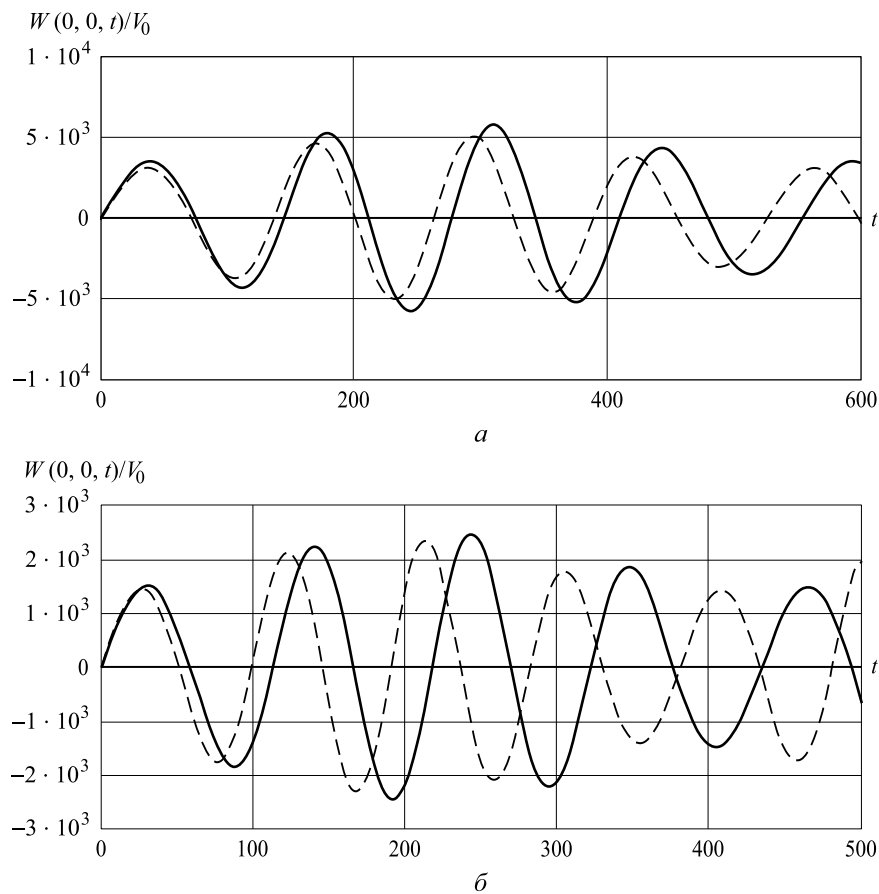


Рис. 4. Графики изменения перемещений  $W(0, 0, t)$  во времени  $t$ :

$a$  —  $h_1^* = 0,2 \cdot 10^{-3}$  м;  $b$  —  $h_1^* = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м (сплошная линия — подложка из дюралюминия; пунктирная — из латуни)

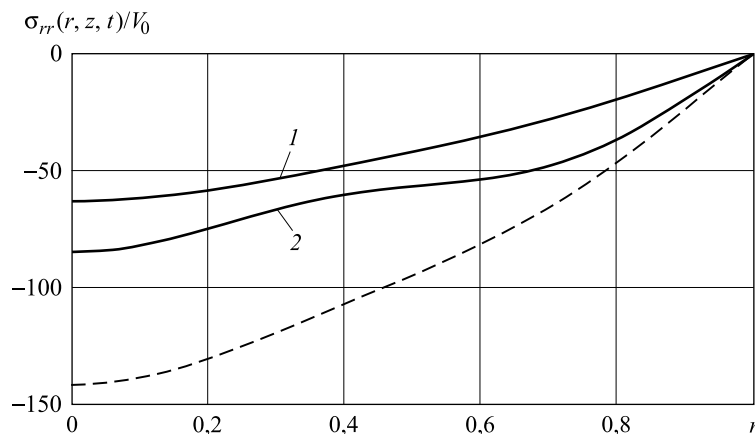
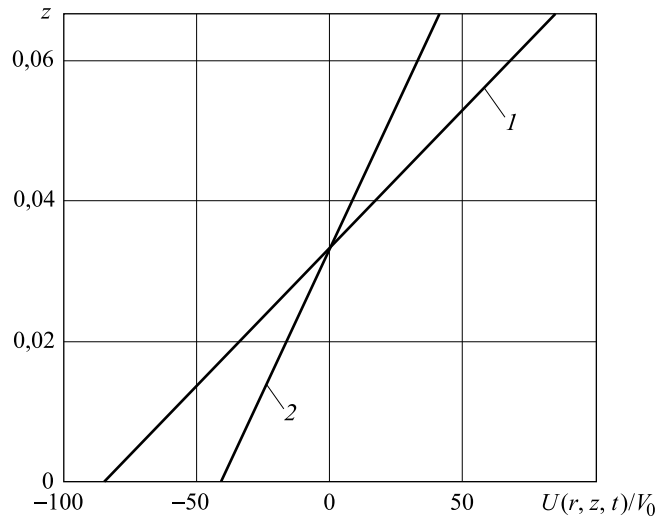


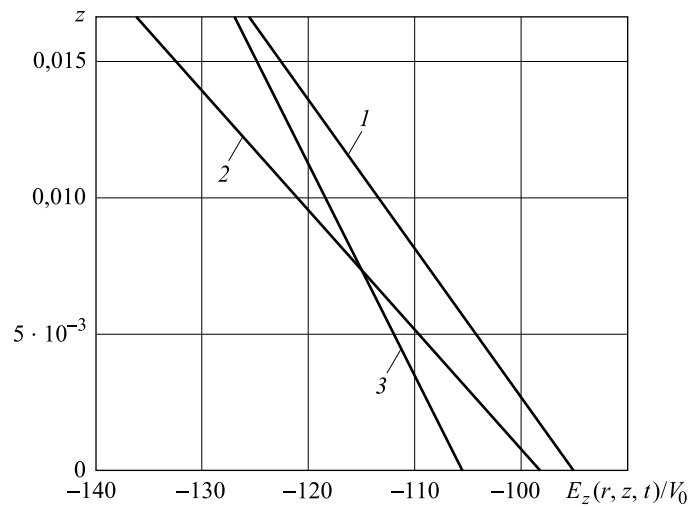
Рис. 5. Графики изменения амплитудных значений нормальных напряжений

$\sigma_{rr}(r, z, t)/V_0$  по радиальной координате:

1 —  $z = h_1 - 0$ ; 2 —  $z = h_1 + 0$ ; пунктирная линия —  $z = 0$



**Рис. 6.** Графики изменения амплитудных значений радиальной компоненты вектора перемещений  $U(r, z, t)$  по высоте пластины:  
1 —  $r = 1$ ; 2 —  $r = 0,3$



**Рис. 7.** Изменения амплитудных значений аксиальной компоненты напряженности  $E_z(r, z, t)$  по высоте пластины:  
1 —  $r = 0$ ; 2 —  $r = 0,4$ ; 3 —  $r = 0,8$

На основании анализа результатов расчета можно сделать следующие выводы.

1. При заданных геометрических размерах конструкции физические характеристики материала подложки оказывают влияние на частотный спектр собственных колебаний (см. таблицу) и практически не оказывают влияния на амплитудные значения вектора пере-

мещений. На рис. 4 приведены результаты расчета при использовании в качестве материала подложки латуни и дюралюминия.

2. Графики изменения амплитудных значений нормальных напряжений  $\sigma_{rr}(r, z, t)$  по радиальной координате показывают, что при шарнирном закреплении пластины максимальные значения наблюдаются в центре пластины при  $z = 0, h$  (см. рис. 5). При этом в области соединения двух элементов с разными физическими характеристиками значения напряжений различные.

3. Анализ представленных на рис. 6 графиков в координатах  $U(r, z, t)/V_0 - z$  показывает, что гипотезу плоских сечений, применяемую в прикладной теории для тонких систем, можно использовать также при исследовании составных тонких пластин, имеющих различные физические характеристики по высоте сечения.

4. Амплитудные значения вектора напряженности электрического поля  $E_z(r, z, t)$  по толщине пьезокерамической пластины изменяются линейно, и такой характер не зависит от радиальной координаты. На рис. 7 приведены результаты расчета при различных значениях  $r$ : 0; 0,4; 0,8. Причем наибольшие значения  $E_z(r, z, t)$  наблюдаются в области соединения металлической и пьезокерамической пластин ( $z = h_1, h_1 + h_2$ ).

5. На основании полученных результатов, как и в предыдущем примере, можно сформулировать гипотезу о характере изменения напряженности электрического поля. При этом функция  $f(z)$  является линейной (см. рис. 7).

Таблица

**Частотный спектр собственных колебаний  
в зависимости от материала подложки**

Толщина $h_1^* \cdot 10^{-3}$ , м	Дюралюминий			Латунь		
	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{13}$
0,2	0,057	0,296	0,716	0,059	0,312	0,756
0,5	0,072	0,373	0,888	0,082	0,427	1,020

В заключение следует отметить, что при действии гармонической электрической нагрузки допущение об установившемся режиме вынужденных колебаний, применяемое при исследовании большинства подобных динамических задач, можно использовать, когда частота вынужденных колебаний существенно меньше первой моды собственных колебаний. При высокочастотном внешнем воздействии вследствие наложения отраженных волн деформирования наблюдается более сложная зависимость (см. рис. 4), и в этом случае необходим построенный авторами алгоритм расчета.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Богородский В.В., ред. *Подводные электроакустические преобразователи. Справочник.* Ленинград, Судостроение, 1983, 248 с.
- [2] Sharapov V. *Piezoceramic sensors.* Springer Verlag, 2010, 498 p.
- [3] Джагуров Р.Г. *Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления.* Санкт-Петербург, Политехника, 1994, 608 с.
- [4] Домаркас В.И., Кажис Р.-И.Ю. *Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи.* Вильнюс, Минтис, 1975, 255 с.
- [5] Gabbert U., Tzou H.S. *Smart Structures and Structronic Systems.* London, Kluwer Academic Pub, 2001, 384 p.
- [6] Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А. *Электродинамик.* Москва, Наука, 1978, 352 с.
- [7] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. *Механика связанных полей в элементах конструкций.* Киев, Наукова думка, 1989, 279 с.
- [8] Smits J.G., Dalke S.I., Cooney T.K. The constituent equations of piezoelectric bimorphs. *Sensors and Actuators A*, 1991, no. 28, pp. 41–61.
- [9] Gohari S., Sharifi S., Vrcelj Z. New explicit solution for static shape control of smart laminated cantilever piezo-composite-hybrid plates/beams under thermo-electro-mechanical loads using piezoelectric actuators. *Composition Structure*, 2016, no. 145, pp. 89–112.
- [10] Ватульян А.О. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложение. *Изв. РАН. МТТ*, 2007, № 4, с. 114–122.
- [11] Tsaplev V., Konovalov R., Abbakumov K. Disk Bimorph-Type Piezoelectric Energy Harvester. *Journal of Power and Energy Engineering*, 2015, no. 3, pp. 63–68. DOI: org/10.4236/jpee.2015.34010
- [12] Петрищев О.Н. и др. Исследование параметров динамического напряженно-деформированного состояния асимметричных биморфных пьезокерамических элементов. *Вісник ЧДТУ*, 2013, № 4, с. 38–48.
- [13] Янчевский И.В. Минимизация прогибов электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций.* Харьков, 2011, вып. 16, с. 303–313.
- [14] Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания пьезокерамической тонкой биморфной пластины. *Изв. РАН. МТТ*, 2013, № 2, с. 77–85.
- [15] Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А. *Распространение волн в электроупругих средах.* Москва, Комкнига, 2003, 336 с.
- [16] Снеддон И.Н. *Преобразования Фурье.* Москва, Изд-во иностранной литературы, 1955, 668 с.
- [17] Сеницкий Ю.Э. *Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований.* Саратов, Изд-во Саратовского университета, 1985, 174 с.
- [18] Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пластины. *Вестник Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучн. серия*, 2011, № 8 (89), с. 142–152.
- [19] Shlyakhin D.A., Kazakova O.V. A dynamic axially symmetric goal and its extended solution for a fixed rigid circular multi-layer plate. *Procedia Engineering*, 2016, vol. 153, pp. 662–666. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.219
- [20] Шляхин Д.А. Уточненное решение динамической задачи электроупругости для биморфной пластины. *Вестник КРСУ*, 2016, т. 16, № 5, с. 108–113.

Статья поступила в редакцию 14.10.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Шляхин Д.А., Ратманова О.В. Оптимальное конструктивное решение круглых многослойных биморфных пластин. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 1. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-1-1844>

**Шляхин Дмитрий Аверкиевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Строительная механика и сопротивление материалов» Самарского государственного технического университета. e-mail: [d-612-mit2009@yandex.ru](mailto:d-612-mit2009@yandex.ru)

**Ратманова Олеся Викторовна** — ассистент кафедры «Строительная механика и сопротивление материалов» Самарского государственного технического университета. e-mail: [olesya654@yandex.ru](mailto:olesya654@yandex.ru)

## Optimal design solution for circular multilayered bimorph plates

© D.A. Shlyakhin, O.V. Ratmanova

Samara State Technical University, Samara, 443100, Russia

*The article reports on the development of the mathematical model for calculating the bimorph plates. It considers multilayered solid stiffened and hinged structures, in which the principle of the inverse piezoeffect is used. The authors have constructed closed solutions to the nonstationary axially symmetric problems of electroelasticity theory for multilayered structures by means of the finite integral transformation method. Based on the analysis of the numerical calculation results the article presents practical recommendations on designing the piezoceramic transducers of resonance and nonresonance classes. We have developed an algorithm for optimizing the work of the considered structures by selecting their geometrical dimensions and the material used. This algorithm allows transforming the applied electric load into mechanical displacement most efficiently. In addition, the presented results make it possible to clarify the assumptions regarding the pattern of the electric field distribution that must be used when designing the bimorph structures of other configurations, the calculation of which is possible only with the help of the applied theories for thin plates.*

**Keywords:** *bimorph piezoceramic plate, nonstationary axially symmetric problem, finite integral transformations*

### REFERENCES

- [1] Bogorodskiy V.V., ed. *Podvodnye elektroakusticheskie preobrazovateli. Spravochnik* [Submerged electroacoustic transducers. Reference book]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1983, 248 p.
- [2] Sharapov V. *Piezoceramic sensors*. Springer-Verlag, 2010, 498 p.
- [3] Dzhagurov R.G. *Pezelektronnyye ustroystva vychislitel'noy tekhniki, sistem kontrolya i upravleniya* [Piezoelectronic devices of computing tools, monitoring and control systems]. St. Petersburg, Politekhnik Publ., 1994, 608 p.
- [4] Domarkas V.I., Kazhis R.-I.Yu. *Kontrol'no-izmeritel'nye pezelektricheskie preobrazovateli* [Control-and-measuring piezoelectric transducers]. Vilnius, Mintis Publ., 1975, 255 p.
- [5] Gabbert U., Tzou H.S. *Smart Structures and Structronic Systems*. Dordrecht, Kluwer-Academic Publ., 2001, 384 p.
- [6] Novozhilov Yu.V., Yappa Yu.A. *Elektrodinamika* [Electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 352 p.
- [7] Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.A. *Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruktsiy* [Mechanics of related fields in structural components]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1989, 279 p.
- [8] Smits J.G., Dalke S.I., Cooney T.K. The constituent equations of piezoelectric bimorphs. *Sensors and Actuators A: Physical*, 1991, no. 28, pp. 41–61.
- [9] Gohari S., Sharifi S., Vrcelj Z. New explicit solution for static shape control of smart laminated cantilever piezo-composite-hybrid plates/beams under thermo-electro-mechanical loads using piezoelectric actuators. *Composite Structures*, 2016, no. 145, pp. 89–112.
- [10] Vatulyan A.O. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2007, no. 4, pp. 114–122.

- [11] Tsaplev V., Konovalov R., Abbakumov K. Disk bimorph-type piezoelectric energy harvester. *Journal of Power and Energy Engineering*, 2015, no. 3, pp. 63–68. DOI: org/10.4236/jpee.2015. 34010
- [12] Petrishchev O.N. *Visnik Cherkaskogo derzhavnogo tekhnologichnogo universitetu — Bulletin of Cherkasy State Technological University*, 2013, no. 4, pp. 38–48.
- [13] Yanchevskiy I.V. Minimizatsiya progibov elektrouprugoy bimorfnoy plastiny pri impulsnom nagruzhении [Minimizing the deflections of the electroelastic bimorph plate under impulsive loading]. *Problemy vychislitel'noy mekhaniki i prochnosti konstruksiy* [Problems of computational mechanics and strength of structures]. Kharkov, 2011, no. 16, pp. 303–313.
- [14] Shlyakhin D.A. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2013, no. 2, pp. 77–85.
- [15] Bardzokas D.I., Kudryavtsev B.A., Senik N.A. *Rasprostraneniye voln v elektrouprugikh sredakh* [Wave propagation in electro-elastic media]. Moscow, Komkniga Publ., 2003, 336 p.
- [16] Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. New York, McGraw-Hill, 1951, 542 p. [In Russ.: Sneddon I.N. *Preobrazovaniya Fure*. Moscow, Izd. inostr. lit. Publ., 1955, 668 p.].
- [17] Senitskiy Yu.E. *Issledovanie uprugogo deformirovaniya elementov konstruksiy pri dinamicheskikh vozdeystviyakh metodom konechnykh integralnykh preobrazovaniy* [The study of the elastic deformation of structural elements under dynamic loads using finite integral transform]. Saratov, Saratov State University Publ., 1985, 174 p.
- [18] Shlyakhin D.A. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya — Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2011, no. 8 (89), pp. 142–152.
- [19] Shlyakhin D.A., Kazakova O.V. A dynamic axially symmetric goal and its extended solution for a fixed rigid circular multi-layer plate. *Procedia Engineering*, 2016, vol. 153, pp. 662–666. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.219
- [20] Shlyakhin D.A. *Vestnik KRSU (Bulletin of Kyrgyz-Russian Slavic University)*, 2016, vol. 16, no. 5, pp. 108–113.

**Shlyakhin D.A.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Structural Mechanics and Strength of Materials, Samara State Technical University.  
e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

**Ratmanova O.V.**, Assist. Lecturer, Department of Structural Mechanics and Strength of Materials, Samara State Technical University.  
e-mail: olesya654@yandex.ru