

## Кинематика и прочность круглой пилы роботизированного узла для деревообработки

© А.Ю. Карпачев<sup>1</sup>, Б.В. Букеткин<sup>1</sup>, А.С. Воякин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Мытищинский филиал,  
Мытищи, Московская обл., 141005, Россия

*Разработке робототехнических систем предшествует исследование динамики их элементов, необходимость проведения которого обусловлена трудностями обоснования выбора допустимых параметров, обеспечивающих заданную работоспособность этих систем. Для деревообрабатывающего роботизированного оборудования весьма актуальной задачей является определение допустимых кинематических режимов применения круглых пил, совершающих при эксплуатации сложные вращательные движения, на основе анализа возникающего в таких пилах напряженно-деформированного состояния. Решение этой проблемы проведено с использованием разработанной математической модели тонкого диска (тонкой пластины), относительное и переносное вращение которого происходит вокруг пересекающихся осей. Сформулированная краевая задача рассчитана численными методами. Определены напряжения в диске и его деформации в зависимости от кинематических характеристик движения. Расчет допустимых частот вращения диска пилы проведен на примере круглой пилы роботизированного обрабатывающего центра Uniteam Ultra (Италия). Для получения необходимых при расчете на прочность исходных данных выполнены эксперименты по определению прочностных характеристик стали, из которой изготавливают пилы указанного обрабатывающего центра. Результаты расчетов позволяют вводить ограничения на частоты вращения круглой пилы при работе обрабатывающего центра с учетом ее геометрических параметров и механических характеристик материала. Предложенный метод исследования пространственного движения и поведения режущего дискового инструмента необходим для выбора технологических режимов работы современного деревообрабатывающего оборудования.*

**Ключевые слова:** круглая пила, диск, частота вращения, деформация, ускорение Кориолиса

**Введение.** На современном этапе в деревообработке получают широкое внедрение специализированные обрабатывающие центры (ОЦ) с числовым программным управлением (ЧПУ), предназначенные для изготовления крупногабаритных деревянных деталей для деревянного домостроения.

Примером такого центра может служить ОЦ Uniteam Ultra (Италия), оснащенный двухполюсным роботом, разработанным с учетом установки на нем электрошпинделя высокой мощности (17 кВт) с электроприводами вращения вокруг осей *A* и *B* (рис. 1, *a*).



В зависимости от выполняемой операции пиления диск пилы может занимать различное положение относительно обрабатываемой заготовки, однако в любом случае ее ориентация должна обеспечивать процесс встречного пиления древесины вследствие технологических ограничений.

Например, при формировании на торце бруса толщиной 300 мм лобовой врубки пиление осуществляется за два прохода. Сначала брус надрезается в нужной плоскости на половину его толщины при подводе пилы к нижней его пласти. Затем, после выхода диска пилы из пропила, она разворачивается на необходимый угол в вертикальной плоскости, поднимается вверх и подводится к верхней пласти бруса, завершая пропил также при встречном пилении.

Таким образом, в роботизированных деревообрабатывающих комплексах дисковый инструмент (как твердое тело) приводится в исполнительное рабочее положение, совершая сложное движение в пространстве.

Наибольшая опасность, связанная с появлением в инструменте недопустимых по критерию прочности напряжений, возникает, когда относительное и переносное движения представляют собой вращение вокруг взаимно перпендикулярных пересекающихся осей (рис. 1, б). На рисунке угловые скорости (частоты) относительного  $\bar{\omega}_r$  и переносного  $\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_e^A + \bar{\omega}_e^B$  вращений перпендикулярны:  $\bar{\omega}_e \perp \bar{\omega}_r$ .

В указанном движении диск пилы деформируется в результате действия сил инерции, обусловленных ускорениями его частиц [1]:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k, \quad (1)$$

где  $\bar{a}_r$  — относительное ускорение;  $\bar{a}_e$  — переносное ускорение;  $\bar{a}_k$  — ускорение Кориолиса,

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r), \quad (2)$$

здесь  $\bar{v}_r$  — относительная скорость [1].

Такое движение приводит к одновременному растяжению и изгибу диска пилы.

В связи с этим цель работы заключается в определении напряженно-деформированного состояния диска пилы в зависимости от кинематических характеристик его движения. Результаты решения этой задачи позволяют предотвратить риск возникновения высоких переменных напряжений и обусловленных ими усталостных разрушений корпусов пил [2, 3].

**Постановка задачи.** Расчет деформаций рассмотренного тела с позиций двухмерной геометрически нелинейной теории круглых

пластин слишком трудоемок [4]. Обратимся к допущениям, которые позволяют исследовать деформацию диска на основе решения одномерной краевой задачи с использованием линеаризованных уравнений [5–7].

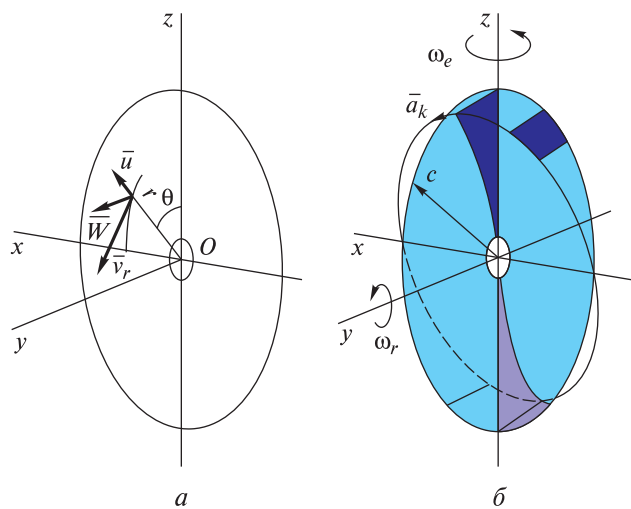
Перемещения  $W$  точек срединной поверхности диска в направлении нормали к ней считаем малыми по сравнению с его радиусом  $c$ . Рассматриваем случаи, когда частота переносного вращения  $\omega_e$  много меньше частоты собственного вращения  $\omega_r$ . Это дает основание принимать движение диска сферическим, характеризуемым законом распределения ускорений Кориолиса его точек

$$a_k = 2\omega_e\omega_r r \cos\theta \quad (3)$$

(рис. 2), учитывать в расчетах относительное ускорение точек диска

$$a_r = \omega_r^2 r \quad (4)$$

и пренебрегать их переносным ускорением  $a_e$ .



**Рис. 2.** Ускорение точек срединной плоскости диска от их положения, заданного в полярной системе координат:

$a$  — вид перемещений ( $W$ ,  $u$ ) и относительная скорость  $\bar{v}_r$ ;

$b$  — ускорения Кориолиса

В дальнейшем линеаризованные соотношения построены в предположении, что напряженное состояние диска состоит из основного и дополнительного состояний. Первое вызвано растяжением диска в его плоскости и обусловлено относительным ускорением его точек, второе зависит от изгиба его плоскости как следствия проявления ускорений Кориолиса.

Для определения основного напряженного состояния используются расчетная схема, представленная на рис. 3, и основные соотношения теории растяжения пластин в виде системы двух дифференциальных и одного алгебраического уравнений [8–10]:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} = (1 - \mu^2) \tilde{N}_r - \mu \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}}, \quad \frac{d\tilde{N}_r}{d\tilde{r}} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} - (1 - \mu) \frac{\tilde{N}_r}{\tilde{r}} - \tilde{q}_r \tilde{r}, \quad (5)$$

$$\tilde{N}_\theta = \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} + \mu \tilde{N}_r. \quad (6)$$

В этой системе переменные параметры представлены в безразмерной форме и имеют вид

$$\tilde{r} = \frac{r}{c}, \quad \tilde{u} = \frac{c\eta}{h^2} u, \quad \tilde{N}_{(r \leftrightarrow \theta)} = \frac{\eta c^2}{Eh^3} N_{(r \leftrightarrow \theta)}, \quad (7)$$

$$\tilde{q}_r = \frac{\eta c^4}{Eh^2} \rho \omega_r^2; \quad \eta = 12(1 - \mu^2).$$

Здесь  $N_r$ ,  $N_\theta$  — радиальная и окружная силы в сечениях, отнесенные к единице длины сечения (см. рис. 3);  $u$  — перемещения точек вдоль радиуса  $r$ ;  $h$  — толщина диска;  $\rho$  — плотность материала диска;  $E$  — модуль упругости;  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

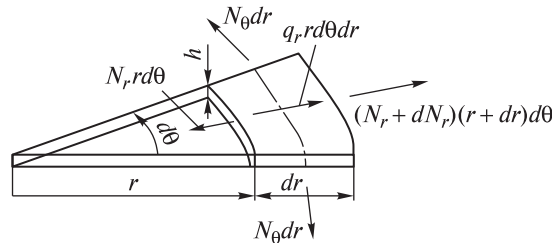


Рис. 3. Система сил, приводящая к растяжению диска

При защемлении внутреннего контура диска фланцем решение дифференциальных уравнений должно быть подчинено двум условиям на границах интервала интегрирования:

$$\tilde{r} = \tilde{k}, \quad \tilde{r} = 1, \quad (8)$$

где  $\tilde{k} = b/c$  ( $b$  — радиус зажимных фланцев диска).

Система (5), (6) может быть решена аналитически, при этом выражения радиальных и окружных сил [3] с учетом (7) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{N}_r &= \frac{\tilde{q}_r}{8} \left\{ (1+\mu)\tilde{k}^2 - (3+\mu)\tilde{r}^2 - \tilde{r}^{-2} \left[ (1+\mu)\tilde{r}^2 + (1-\mu)\tilde{k}^2 \right] \right\} \left[ (1+\mu)\tilde{k}^2 - \right. \\ &\quad \left. - (3+\mu) \right] \left[ (1+\mu) + (1-\mu)\tilde{k}^2 \right]^{-1}, \\ \tilde{N}_\theta &= \frac{\tilde{q}_r}{8} \left\{ (1+\mu)\tilde{k}^2 - (1+3\mu)\tilde{r}^2 - \tilde{r}^{-2} \left[ (1+\mu)\tilde{r}^2 + (1-\mu)\tilde{k}^2 \right] \right\} \left[ (1+\mu)\tilde{k}^2 - \right. \\ &\quad \left. - (3+\mu) \right] \left[ (1+\mu) + (1-\mu)\tilde{k}^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Линеаризованные дифференциальные уравнения, описывающие движения элемента пластины при ее изгибе, примем в следующем виде [11, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rM_{r\theta})}{\partial r} + M_{r\theta} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta &= 0, \\ \frac{\partial(rM_r)}{\partial r} + M_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - Q_r r &= 0, \\ \frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + q_n r + N_{r,r} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + N_\theta r \left( \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial W}{r \partial r} \right) - q_r h r \frac{\partial W}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

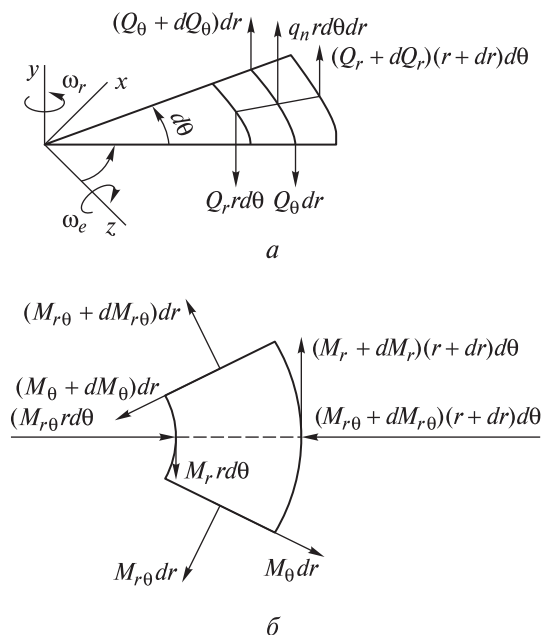
Здесь  $M_{r\theta}$  — распределенный момент кручения;  $M_r, M_\theta$  — распределенные изгибающие моменты;  $Q_r, Q_\theta$  — распределенные перерезывающие силы;  $W = W(r, \theta)$ .

Уравнения (10) получены добавлением в уравнения равновесия элемента пластины [6] распределенной инерционной силы (рис. 4)

$$q_n = 2\rho h \omega_e \omega_r r \cos \theta. \quad (11)$$

Первые два уравнения (10) соответствуют уравнениям моментов, причем изгибающие моменты ( $M_r, M_\theta$ ) и момент кручения ( $M_{r\theta}$ ) в сечениях пластины связаны с ее осевым перемещением  $W$  соотношениями упругости [12]:

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{Eh^3}{\eta} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right], \\ M_\theta &= -\frac{Eh^3}{\eta} \left[ \mu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right], \\ M_{r\theta} &= -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \left( \frac{\partial^2 W}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial W}{r^2 \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (12)$$



**Рис. 4.** Силовые факторы, связанные с изгибом диска:  
*a* — система распределенных перерезывающих сил;  
*б* — то же внутренних моментов

Приведенную поперечную силу в кольцевом сечении определим по формуле

$$Q = Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta}. \quad (13)$$

Третье уравнение в (10) соответствует уравнению проекций поперечных перерезывающих сил ( $Q_r$ ,  $Q_\theta$ ) на нормаль к деформированному элементу пластины.

При деформации диска наблюдается его перегиб или образование формы деформирования с одним узловым диаметром, перемещения точек которого  $W = 0$ . В связи с этим переменные, входящие в уравнения (10), представим в следующем виде [5]:

$$\begin{aligned} W &= w \cos \theta, \quad M_{r\theta} = H \sin \theta, \\ M_r &= M \cos \theta, \quad Q_r = V_r \cos \theta, \\ M_\theta &= L \cos \theta, \quad Q_\theta = V_\theta \sin \theta, \\ Q &= V \cos \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \sqrt{\eta} \frac{w}{h}, \quad \tilde{\mathfrak{G}} = \sqrt{\eta} \frac{c}{h} \mathfrak{G}, \quad \tilde{M} = \frac{c^2 \eta^{3/2}}{Eh^4} M \quad (M \leftrightarrow H, L), \\ \tilde{Q} &= \frac{c^3 \eta^{3/2}}{Eh^4} Q \quad (Q \leftrightarrow V_r, V_\theta),\end{aligned}\tag{15}$$

где

$$\tilde{\mathfrak{G}} = \frac{d\tilde{w}}{d\tilde{r}}\tag{16}$$

есть поворот нормали к срединной плоскости.

Соотношения (12) с учетом (14)–(15) примут вид

$$\frac{d\tilde{\mathfrak{G}}}{d\tilde{r}} = -\tilde{M} - \mu(\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{w}\tilde{r}^{-1})\tilde{r}^{-1},\tag{17}$$

$$\tilde{L} = -\mu \frac{d\tilde{\mathfrak{G}}}{d\tilde{r}} - (\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{w}\tilde{r}^{-1})\tilde{r}^{-1},$$

$$\tilde{H} = (1 - \mu)(\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{w}\tilde{r}^{-1})\tilde{r}^{-1},\tag{18}$$

а уравнения равновесия элемента пластины будут записаны в форме

$$\begin{aligned}\frac{d(\tilde{r}\tilde{H})}{d\tilde{r}} + \tilde{H} - \tilde{L} - \tilde{V}_\theta\tilde{r} &= 0, \\ \frac{d(\tilde{r}\tilde{M})}{d\tilde{r}} - \tilde{L} + \tilde{H} - \tilde{V}_r\tilde{r} &= 0,\end{aligned}\tag{19}$$

$$\frac{d(\tilde{r}\tilde{V}_r)}{d\tilde{r}} + \tilde{V}_\theta + \tilde{q}_k\tilde{r}^2 + \tilde{N}_r \frac{d\tilde{\mathfrak{G}}}{d\tilde{r}} + \tilde{N}_\theta(\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{w}\tilde{r}^{-1}) - \tilde{q}_r\tilde{r}^2\tilde{\mathfrak{G}} = 0,$$

где

$$\tilde{q}_k = \frac{c^5 \eta^{3/2}}{Eh^3} 2\rho\omega_e\omega_r.\tag{20}$$

Исключив из (19)  $\tilde{V}_\theta$  и введя  $\tilde{V} = \tilde{V}_r + \tilde{H}\tilde{r}^{-1}$ , с учетом (16)–(18) получим

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{M}}{d\tilde{r}} &= \tilde{V} - (1 - \mu)\tilde{M}\tilde{r}^{-1} - (1 - \mu)(3 - \mu)(\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{w}\tilde{r}^{-1})\tilde{r}^{-2}, \\ \frac{d\tilde{V}}{d\tilde{r}} &= -(1 - \mu)(3 - \mu)(\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{w}\tilde{r}^{-1})\tilde{r}^{-3} + (\mu\tilde{r}^{-2} + \tilde{N}_r)\tilde{M} + \\ &+ (\mu\tilde{N}_r - \tilde{N}_\theta)(\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{w}\tilde{r}^{-1})\tilde{r}^{-1} - \tilde{V}\tilde{r}^{-1} + (\tilde{q}_r\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{q}_k)\tilde{r}.\end{aligned}\tag{21}$$



Систему уравнений (16), (17), (21) представим в виде одного уравнения

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\{Y\} = [B]\{Y\} + \{D\}, \quad (22)$$

где

$$\{Y\} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T, \quad y_1 = \tilde{w}, \quad y_2 = \tilde{\mathfrak{G}}, \quad y_3 = \tilde{M}, \quad y_4 = \tilde{V};$$

$[B]$  — матрица  $(4 \times 4)$  переменных коэффициентов:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0, \quad b_{12} = 1, \quad b_{13} = 0, \quad b_{21} = \mu\tilde{r}^{-2}, \quad b_{22} = -\mu/\tilde{r}, \quad b_{23} = -1, \\ b_{24} &= 0, \quad b_{31} = (3+\mu)(1-\mu)\tilde{r}^{-3}, \quad b_{32} = -(3+\mu)(1-\mu)\tilde{r}^{-2}, \\ b_{33} &= -(1-\mu)\tilde{r}^{-1}, \quad b_{34} = 1, \\ b_{41} &= \left[ (3+\mu)(1-\mu)\tilde{r}^{-2} - (\mu\tilde{N}_r - \tilde{N}_\theta) \right] \tilde{r}^{-2}, \\ b_{42} &= \tilde{q}_r\tilde{r} + (\mu\tilde{N}_r - \tilde{N}_\theta)\tilde{r}^{-1} - (3+\mu)(1-\mu)\tilde{r}^{-3}, \\ b_{43} &= \mu\tilde{r}^{-2} + \tilde{N}_r, \quad b_{44} = -\tilde{r}^{-1}; \\ \{D\} &= (0, 0, 0, -\tilde{q}_k\tilde{r})^T. \end{aligned}$$

Для принятого закрепления диска на внутреннем контуре решение уравнения (22) должно удовлетворять граничным условиям

$$\tilde{w} = 0, \quad \tilde{\mathfrak{G}} = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{r} = \tilde{k} = b/c; \quad \tilde{M} = 0, \quad \tilde{V} = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{r} = 1. \quad (23)$$

**Метод решения.** Сформулированную задачу целесообразно решать численными методами. Использован метод начальных параметров [9].

Алгоритм проведения расчета основан на решении краевой задачи, построенной на уравнении (22) с граничными условиями (23). Его общее решение складывается из частного решения неоднородного уравнения  $\{Z\}$  и решения однородного уравнения:

$$\{Y\} = \{Z\} + [y]\{C\}, \quad (24)$$

где  $\{C\}$  — вектор констант;  $[y]$  — матрица общих решений.

С учетом граничных условий на внутреннем контуре диска решение можно записать в форме

$$\{Y\} = C_3 \{y^3\} + C_4 \{y^4\} + \{Z\}, \quad (25)$$

где  $\{y^3\}$ ,  $\{y^4\}$  — частные решения.

Для их определения необходимо, принимая  $\{D\} = (0, 0, 0, 0)^T$ , дважды интегрировать (22) с граничными условиями вида

$$\{Y\}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{Y\}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Третье интегрирование, учитывая в (22)  $\{D\} = (0, 0, 0, -\tilde{q}_k \tilde{r})^T$ , следует проводить при граничном условии  $\{Y\}_0 = (0, 0, 0, 0)^T$ . После определения вектора констант из уравнения, составленного с учетом граничных условий на внешнем контуре диска, путем еще одного (четвертого) интегрирования неоднородного дифференциального уравнения (22) можно построить решение вида (24). В ходе проведения указанной процедуры решения искомые силовые факторы на внутреннем контуре диска равны найденным константам  $C_3, C_4$ :

$$\tilde{M} = C_3 = \frac{d_1}{d}, \quad \tilde{V} = C_4 = \frac{d_2}{d}, \quad (27)$$

где

$$d = \begin{vmatrix} y_3^1 & y_3^2 \\ y_4^1 & y_4^2 \end{vmatrix} = y_3^1 y_4^2 - y_4^1 y_3^2, \quad (28)$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} -y_3^3 & y_3^2 \\ -y_4^3 & y_4^2 \end{vmatrix} = -y_3^3 y_4^2 + y_4^3 y_3^2, \quad (29)$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} y_3^1 & -y_3^3 \\ y_4^1 & -y_4^3 \end{vmatrix} = -y_3^1 y_4^3 + y_4^1 y_3^3 \quad (30)$$

являются определителями, составленными из компонент вектора состояния  $\{Y\}_1$  на внешнем контуре диска. Они получены в результате последовательных процедур интегрирования и отмечены верхним индексом.

При численных расчетах для интегрирования системы дифференциальных уравнений целесообразно использовать стандартные

алгоритмы и программы, позволяющие реализовать методы Рунге — Кутты или Кутты — Мерсона на алгоритмических языках [14, 15].

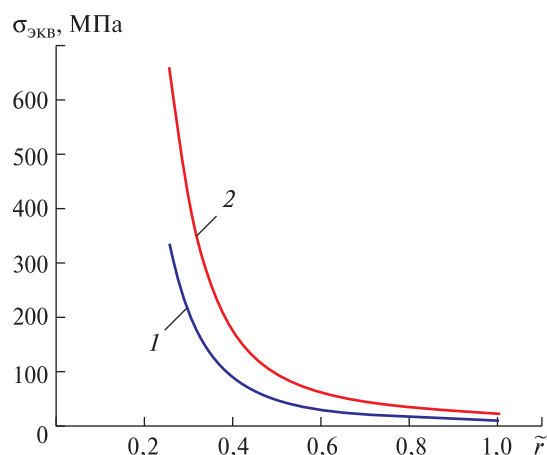
**Пример расчета.** Изложенный метод применим к анализу допустимых переносных частот вращения одной из круглых пил, используемых в ОЦ Uniteam Ultra.

Для этого принято:  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,3$ ,  $\rho = 7811$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 0,315$  м,  $h = 0,003$  м,  $\tilde{k} = 0,254$ ,  $\omega_r = 377$  с<sup>-1</sup> для случаев  $\omega_e = 2\pi$  с<sup>-1</sup> и  $\omega_e = 4\pi$  с<sup>-1</sup>.

Если допустить, что изменения во времени напряжений в пиле имеют циклический и симметричный характер, то амплитуды напряжений, приведенных к виду эквивалентных напряжений, определяются формулой

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{6Eh^2}{\eta^{3/2}c^2} \sqrt{\tilde{M}_r^2 + \tilde{M}_\theta^2 - \tilde{M}_r\tilde{M}_\theta + 3\tilde{M}_{r\theta}^2}. \quad (31)$$

На рис. 5 показаны результаты расчета указанных напряжений вдоль радиуса диска. Максимальные их значения соответствуют контуру закрепления диска.

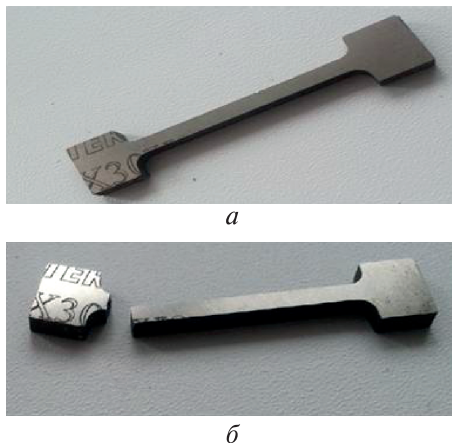


**Рис. 5.** Распределение эквивалентных переменных напряжений вдоль радиуса пильного диска при переносной частоте вращения:

$$1 — \omega_e = 2\pi \text{ с}^{-1}; \quad 2 — \omega_e = 4\pi \text{ с}^{-1}$$

Запас по усталостной прочности представляет собой отношение предела выносливости  $\sigma_{-1}$  к эквивалентным переменным напряжениям  $\sigma_{\text{экв}}$ . Для оценки  $\sigma_{-1}$  материала рассматриваемой пилы экспе-

риментально на испытательной машине Zwick/Roell Z050 (Германия) найден предел прочности  $\sigma_b$  стали, из которой изготовлена пила. Испытания проводились на плоских образцах (рис. 6).



**Рис. 6.** Вид образца при испытании на растяжение до разрушения:  
*a* — до испытания; *б* — после испытания до разрушения при растяжении

Установлено, что  $\sigma_b = 1580$  МПа, а при испытаниях на изгиб образцов из инструментальных сталей  $\sigma_{-1}$  составляет около 40...50 %  $\sigma_b$  [16]. Принимая для рассматриваемой стали  $\sigma_{-1} = 630$  МПа и сопоставляя это значение с данными, представленными на рис. 5, можно заключить, что вращение пилы с частотой  $\omega_e$ , превышающей  $2\pi \text{ с}^{-1}$ , становится опасным при ее эксплуатации вследствие возможного малоциклового разрушения.

Для уточнения усталостной прочности диска можно использовать предложенную Гудманом линейную аппроксимацию предельных напряжений [16]. Это позволяет установить связь между амплитудой напряжения цикла при отличном от нуля среднем значении и эквивалентной амплитудой напряжения цикла при нулевом среднем значении. В качестве среднего значения напряжения цикла следует принять напряжение растяжения диска

$$\sigma_0 = \frac{Eh^2}{\eta c^2} \sqrt{\tilde{N}_r^2 + \tilde{N}_\theta^2 - \tilde{N}_r \tilde{N}_\theta} . \quad (32)$$

Зависимости распределения сил  $\tilde{N}_r$  и  $\tilde{N}_\theta$  от радиуса диска, полученные по формулам (9), для рассмотренного примера представлены на рис. 7.

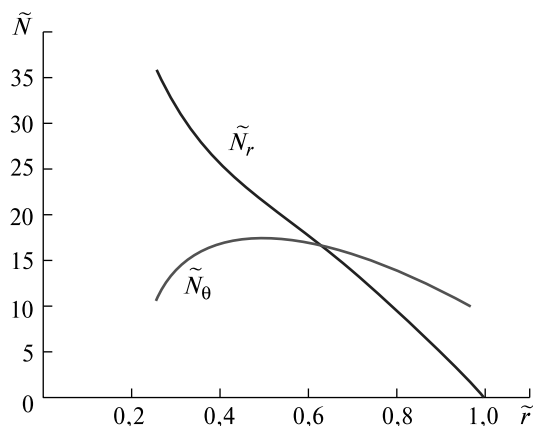


Рис. 7. Эпюра радиальных ( $\tilde{N}_r$ ) и тангенциальных  $\tilde{N}_\theta$  внутренних распределенных сил

По результатам расчетов установлено, что значения напряжений напряженно-деформированного состояния растяжения диска на порядок меньше значений изгибных напряжений и поэтому не учитываются в формуле (31). Однако пренебрежение ими в (22) приводит к двукратному увеличению максимального значения  $\sigma_{\text{экв}}$  и трехкратному увеличению значения максимального осевого перемещения диска.

**Выводы.** 1. Разработан метод расчета напряженно-деформированного состояния диска, совершающего сферическое движение.

2. Проведен анализ входящих в ускорение частиц диска пилы при сложном вращении составляющих, в наибольшей степени влияющих на ее напряженно-деформированное состояние.

3. Предложен эффективный инженерный численный метод, который позволяет определить допустимые кинематические режимы использования круглых пил по критерию усталостной прочности в роботизированных деревообрабатывающих центрах и приведен пример его применения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Никитин Н.Н. *Курс теоретической механики*. Москва, Высшая школа, 1990, 607 с.
- [2] Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. Москва, Наука, 1979, 744 с.
- [3] Стахийев Ю.М. *Работоспособность плоских круглых пил*. Москва, Лесная промышленность, 1989, 384 с.
- [4] Коваленко А.Д. *Круглые пластины переменной толщины*. Москва, Физматгиз, 1959, 295 с.
- [5] Карпачев А.Ю. О деформации упругого тонкого диска при сферическом движении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 7 (7). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-294

- [6] Карпачев А.Ю., Небесный М.В., Овчинников В.А. К исследованию динамического поведения систем с распределенными параметрами на ЭВМ. *Известия вузов. Машиностроение*, 2007, № 5, с. 3–12.
- [7] Карпачев А.Ю. Поведение одномерных и двумерных моделей при сферическом движении. *Тез. докл. International scientific conference Fundamental and applied problems of mechanics (FAPM–2017), Москва, 24–27 октября 2017 г.* Москва, 2017, с. 19–20.
- [8] Демьянушко И.В., Биргер И.А. *Расчет на прочность вращающихся дисков.* Москва, Машиностроение, 1978, 247 с.
- [9] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика.* Москва, Машиностроение, 1977, 488 с.
- [10] Карпачев А.Ю. Собственные динамические характеристики вращающихся круглых пил при неравномерном нагреве. *Вестник машиностроения*, 2006, № 5, с. 32–36.
- [11] Карпачев А.Ю. *Создание расчетных методов повышения эксплуатационных характеристик дисков режущих инструментов.* Дис. ... д-ра техн. наук. Москва, 2015, 277 с.
- [12] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний.* Москва, Высшая школа, 1980, 408 с.
- [13] Карпачев А.Ю. Проблема собственных значений в прогрессивных технологиях проектирования режущих полотен. *Научно-технические технологии*, 2001, т. 2, № 3, с. 52–57.
- [14] Мак-Кракен Д., Дорн У. *Численные методы и программирование на фортране.* Москва, Мир, 1977, 584 с.
- [15] Дьяконов В.П. *Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ.* Москва, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987, 240 с.
- [16] Коллинз Дж. *Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение.* Москва, Мир, 1984, 624 с.

Статья поступила в редакцию 24.09.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Карпачев А.Ю., Букеткин Б.В., Воякин А.С. Кинематика и прочность круглой пилы роботизированного узла для деревообработки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 10. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-10-1817>

**Карпачев Андрей Юрьевич** — д-р техн. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: a-karpachev@mail.ru

**Букеткин Борис Васильевич** — ст. преподаватель кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: buketkin-boris@yandex.ru

**Воякин Анатолий Степанович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Станки и инструменты» Мытищинского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: asvoyakin@yandex.ru

## **Kinematics and durability of a circular saw of a robotic unit for woodworking**

© A.Yu. Karpachev<sup>1</sup>, B.V. Buketkin<sup>1</sup>, A.S. Voyakin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Mytishi branch,  
Mytishi, Moscow region, 141005, Russia

*Effective development and subsequent use of robotic systems are inextricably linked with the study of the dynamics of their elements. The necessity of the study when designing such systems is due to the difficulties in justifying the choice of permissible parameters that ensure a given working capacity and the operating conditions of the components of these systems. For woodworking machines equipped with robotic units, a crucial task is to determine the allowable kinematic modes of using circular saws that perform complex rotational movements during operation. It is important to take into account the analysis of the stress-strain state arising in them. The solution of this problem was carried out on the basis of the developed mathematical model of a thin disk (thin plate), whose relative and transportable rotation occurs around intersecting axes. The formulated boundary value problem was calculated using numerical methods. The stresses in the disk and its deformation were determined according to the kinematic characteristics of its movement. The calculation of the allowable frequencies of rotation of the saw blade was carried out through the example of a circular saw from the Uniteam Ultra robotic machining center (Italy). In order to obtain the necessary initial data for strength analysis, experiments were conducted to determine the strength characteristics of the steel from which the saws of this machining center are made. The results of the calculations make it possible to impose restrictions on the rotational speeds of a circular saw when the machining center operates taking into account its geometrical parameters and the mechanical characteristics of the material. The proposed method for studying the spatial movement and behavior of a cutting disk tool is necessary for the selection of technological modes of operation of modern woodworking equipment.*

**Keywords:** circular saw, disc, rotational speed, deformation, Coriolis acceleration

### REFERENCES

- [1] Nikitin N.N. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [The course of theoretical mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1990, 607 p.
- [2] Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 744 p.
- [3] Stakhiev Yu.M. *Rabotosposobnost ploskikh kruglykh pil* [Efficiency of flat circular saws]. Moscow, Lesnaya promyshlennost Publ., 1989, 384 p.
- [4] Kovalenko A.D. *Kruglye plastiny peremennoy tolshhiny* [Round plates of variable thickness]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 295 p.
- [5] Karpachev A.Yu. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, issue 7 (7).  
DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-294
- [6] Karpachev A.Yu., Nebesny M.V., Ovchinnikov V.A. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2007, no. 5, pp. 3–12.
- [7] Karpachev A.Yu. *Povedenie odnomernykh i dvumernykh modeley pri sfericheskom dvizhenii* [The behavior of one-dimensional and two-dimensional

- models at spherical motion]. *Tez. dokl. Mezhdunarodnoy konferentsii «Fundamentalnye i prikladnye zadachi mehaniki»*, Moskva, 24–27 oktyabrya 2017 [Abstracts of reports of International scientific conference Fundamental and applied problems of mechanics (FAPM–2017), Moscow, October 24–27]. Moscow, 2017, pp. 19–20.
- [8] Demyanushko I.V., Birger I.A. *Raschet na prochnost vraschayuschikhsya diskov* [Stress calculation of rotating disks]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978, 247 p.
- [9] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksiy. Statika* [Mechanics of thin-walled structures. Statics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 488 p.
- [10] Karpachev A.Yu. *Vestnik mashinostroeniya — Russian Engineering Research*, 2006, no. 5, pp. 32–36.
- [11] Karpachev A.Yu. *Sozdanie raschetnykh metodov povysheniya ekspluatatsionnykh kharakteristik diskov rezhushchikh instrumentov*. Diss. Dr. tekhn. nauk [Creation of calculation methods for improving the performance characteristics of cutting tool disks. Dr. eng. sc. diss.]. Moscow, 2015, 277 p.
- [12] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical oscillations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1980, 408 p.
- [13] Karpachev A.Yu. *Naukoemkie tekhnologii — Science Intensive Technologies*, 2001, vol. 2, no. 3, pp. 52–57.
- [14] McCracken D.D., Dorn W.S. *Numerical methods and FORTRAN programming*. John Wiley & Sons Ltd., 1964, 457 p. [In Russ.: McCracken D.D., Dorn W.S. Chislennyye metody i programmirovaniye na Fortrane. Moscow, Mir Publ., 1977, 584 p.].
- [15] Dyakonov V.P. *Spravochnik po algoritmam i programmam na yazyke beysik dlya personalnykh EVM* [Handbook of algorithms and programs in the BASIC language for personal computers]. Moscow, Nauka Publ., Gl. red. fiz.-mat. lit. Publ., 1987, 240 p.
- [16] Collins J.A. *Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention*. 2<sup>nd</sup> ed. 1993, 672 p. [In Russ.: Collins J.A. Povrezhdeniye materialov v konstruksiyakh. Analiz, predskazaniye, predotvrashcheniye. Moscow, Mir Publ., 1984, 624 p.].

**Karpachev A.Yu.**, Dr. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: a-karpachev@mail.ru

**Buketkin B.V.**, Assist. Professor, Department of Applied Mechanics Bauman Moscow State Technical University. e-mail: buketkin-boris@yandex.ru

**Voyakin A.S.**, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Machines and Tools, Bauman Moscow State Technical University, Mytischki branch. e-mail: asvoyakin@yandex.ru