

**Применение метода Бубнова — Галеркина для расчета
нелинейных колебаний математического маятника
переменной длины при конечном передвижении
из одного состояния покоя в другое**

© С.В. Русских, Ф.Н. Шклярчук

МАИ (НИУ), Москва, 125993, Россия
ИПРИМ РАН, Москва, 125040, Россия

Для оценки эффективности метода Бубнова — Галеркина и его точности по сравнению с численным методом рассмотрены нелинейные колебания математического маятника переменной длины на подвижном подвесе. Поставлена следующая задача: переместить точку крепления маятника за заданное время на заданное расстояние с одновременным гашением собственных форм колебаний в момент останова. Управляющая функция при кинематическом управлении конечным передвижением задана в виде ряда по синусам. Неизвестная искомая функция, представляющая собой угол поворота маятника в соответствии с методом Бубнова — Галеркина записана в виде разложения с неизвестными коэффициентами по заданным функциям времени. Сформирована система линейных алгебраических уравнений, порядок которой зависит от числа аппроксимирующих функций. Рассмотрены примеры расчета при различных исходных постановках задачи.

Ключевые слова: математический маятник, конечное передвижение, гашение колебаний, метод Бубнова — Галеркина, нелинейные колебания, система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующие функции

Введение. При выполнении различных операций многие механические системы (механизмы, краны, манипуляционные роботы [1, 2], космические аппараты [3, 4] и конструкции) и их элементы совершают конечные перемещения и повороты, при которых возникают нестационарные упругие колебания. Такие колебания нарушают и ограничивают точность выполнения операций. Ряд проблем теории управления большими механическими конструкциями, задачи и методы управления колебаниями рассмотрены в работах [5, 6].

В ряде работ [2, 7] управляющие функции для гашения упругих колебаний определены в виде функций или рядов, записываемых через частоты собственных колебаний системы. В этом случае искомые управляющие воздействия получают в виде сложно реализуемых на практике высокочастотных рядов, в связи с чем воспроизвести такие воздействия с необходимой точностью практически невозможно.

В работах [8–10] решение задачи управления строится в нормальных координатах с разложением управляющей функции в ряд по синусам или косинусам с неизвестными коэффициентами, для которых получают алгебраические уравнения путем удовлетворения начальных и конечных условий для нормальных координат.

В данной работе на основании этого подхода с использованием метода Бубнова — Галеркина приведено решение задачи о конечном передвижении за заданное время точки подвеса математического маятника переменной длины с гашением его колебаний в момент остановки. При этом управляющая функция задана в виде ряда по синусам с неизвестными коэффициентами, которые вместе с коэффициентами из разложения искомой функции, представляющей собой угол поворота маятника, по методу Бубнова — Галеркина образуют единую систему линейных алгебраических уравнений.

Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, представляющую собой математический маятник переменной длины, расположенный на подвижном подвесе (рис. 1).

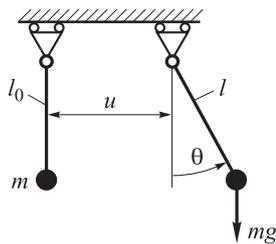


Рис. 1. Общий вид рассматриваемой системы

Движение маятника будем характеризовать углом его поворота $\theta(t)$ относительно невозмущенного положения и перемещением $u(t)$ его точки подвеса, причем колебания маятника будут нелинейными, если $|\theta(t)| > 0,5$ рад. Длина маятника определяется начальным значением l_0 и функцией $l(t)$ изменения во времени.

Нелинейное дифференциальное уравнение колебаний маятника на подвижном подвесе запишем в виде

$$\frac{l}{l_0} \ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{l}}{l_0} \dot{\theta} + \frac{1}{l_0} \ddot{u} \cos \theta + \frac{g}{l_0} \sin \theta = 0$$

или с использованием безразмерного времени $\tau = t/T$:

$$\frac{l}{l_0} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{l_0} \frac{dl}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{l_0} \frac{d^2 u}{d\tau^2} \cos \theta + T^2 \frac{g}{l_0} \sin \theta = 0, \quad (1)$$

где T — заданное время конечного передвижения подвеса на заданное расстояние u_T .

Начальные и конечные условия для угла поворота θ и перемещения точки подвеса u маятника с учетом гашения колебаний в момент остановки:

$$\begin{aligned} \theta(0) = \frac{d\theta}{d\tau}(0) = \theta(1) = \frac{d\theta}{d\tau}(1) = 0; \\ u(0) = \frac{du}{d\tau}(0) = \frac{du}{d\tau}(1) = 0; \quad u(1) = u_T. \end{aligned} \quad (2)$$

Управляющую функцию $\frac{1}{l_0} \frac{d^2 u}{d\tau^2}$ при кинематическом управлении конечным передвижением при $0 \leq \tau \leq 1$ зададим в виде ряда [8–10]:

$$\frac{1}{l_0} \frac{d^2 u}{d\tau^2} = \mu(\tau) = \sum_{k=1}^r b_k \sin(k2\pi\tau), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где b_k — неизвестные коэффициенты.

С учетом выражений (2) и (3) можно записать

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{k} b_k = \frac{2\pi}{l_0} u_T. \quad (4)$$

Неизвестную функцию $\theta(\tau)$ по методу Бубнова — Галеркина будем находить в виде ряда

$$\theta(\tau) = \sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(\tau), \quad (5)$$

где C_r — коэффициенты, подлежащие определению; $\varphi_r(\tau)$ — заданные функции безразмерного времени, которые могут лишь частично удовлетворять начальным и граничным условиям (2) по $\theta(\tau)$.

Например, если $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$, $r = 0, 1, \dots, s$, то эта функция удовлетворяет условиям $\varphi_r(0) = \frac{d\varphi_r}{d\tau}(0) = \frac{d\varphi_r}{d\tau}(1) = 0$, $\varphi_r(1) = 2\cos(r\pi)$. При этом $\theta(0) = \frac{d\theta}{d\tau}(0) = \frac{d\theta}{d\tau}(1) = 0$, а для выполнения условия $\theta(1) = 0$ необходимо записать дополнительное уравнение:

$$\sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(1) = 0. \quad (6)$$

Вместо предложенной выше функции $\varphi_r(\tau)$ можно взять более простые тригонометрические функции. Например, функцию $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$, $r = 0, 1, \dots, s$, которая удовлетворяет условиям $\frac{d\varphi_r}{d\tau} = 0$ при $\tau = 0$ и $\tau = 1$. Для выполнения всех условий (2) на основании уравнения (5) в данном случае запишем два дополнительных уравнения:

$$\sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(0) = 0; \quad \sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(1) = 0. \quad (7)$$

Если представить $\varphi_r(\tau) = \sin(r\pi\tau)$, $r = 1, 2, \dots, s$, для которой выполняются условия $\varphi_r(0) = \varphi_r(1) = 0$, то для выполнения всех условий (2) на основании уравнения (5), так же как и в предыдущем случае, запишем два дополнительных уравнения:

$$\sum_{r=1}^s C_r \frac{d\varphi_r}{d\tau}(0) = 0; \quad \sum_{r=1}^s C_r \frac{d\varphi_r}{d\tau}(1) = 0. \quad (8)$$

Во всех случаях полученное решение задачи по методу Бубнова — Галеркина сравнивается с численным решением по методу Адамса с использованием стандартной программы расчета. Метод Адамса является наиболее устойчивым и точным для интегрирования различных нелинейных дифференциальных уравнений.

Линейная задача для маятника постоянной длины. Рассмотрим уравнение (1) для маятника постоянной длины $l(t) = l_0$ при малых углах $\theta(\tau)$ ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, $|\theta| < 0,5$ рад):

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + v^2\theta + \mu(\tau) = 0; \quad v^2 = T^2 \frac{g}{l_0}. \quad (9)$$

В соответствии с методом Бубнова — Галеркина уравнение (9) на интервале $0 \leq \tau \leq 1$ следует умножить на $\varphi_p(\tau)$, $p = 0, 1, \dots, s$, и проинтегрировать от 0 до 1. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов C_r и b_k :

$$\sum_{r=0}^s A_{pr} C_r + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k = 0, \quad (10)$$

где

$$A_{pr} = \alpha_{pr} + v^2 \beta_{pr};$$

$$\alpha_{pr} = \int_0^1 \varphi_p \frac{d^2\varphi_r}{d\tau^2} d\tau; \quad \beta_{pr} = \int_0^1 \varphi_p \varphi_r d\tau; \quad \gamma_{pk} = \int_0^1 \varphi_p \sin(2k\pi\tau) d\tau.$$

К уравнениям (10) необходимо добавить условие (4) и одну из групп уравнений (6), (7) или (8), в зависимости от выбранной аппроксимирующей функции.

Для разрешимости полученной системы уравнений порядка $(s+1)+1+1$ для $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$ необходимо взять $k = 1, 2$. Для $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$ порядок полученной системы составит $(s+1)+1+2$, поэтому $k = 1, 2, 3$, а для $\varphi_r(\tau) = \sin(r\pi\tau)$ порядок будет $s+1+2$ ($r = 1, 2, \dots, s$) и $k = 1, 2, 3$. Во всех этих случаях значение s числа аппроксимирующих функций может быть любым.

Нелинейная задача для маятника постоянной длины. Рассмотрим уравнение (1) для маятника постоянной длины $l(t) = l_0$ при произвольных углах $\theta(\tau)$:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + v^2 \sin \theta + \mu(\tau) \cos \theta = 0. \quad (11)$$

Для того чтобы выделить решение линейной задачи, решить нелинейную задачу по методу итераций, используя линейное решение в качестве «нулевого» приближения, представим $\sin \theta = \theta + (\sin \theta - \theta)$, $\cos \theta = 1 + (\cos \theta - 1)$ и запишем уравнение (11) в следующем виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + v^2\theta + \mu(\tau) = v^2(\theta - \sin \theta) + \mu(\tau)(1 - \cos \theta). \quad (12)$$

В соответствии с методом Бубнова — Галеркина при $\theta(\tau) = \sum_{r=0}^s C_r \varphi_r(\tau)$ и $\mu(\tau) = \sum_{k=1}^r b_k \sin(2k\pi\tau)$ уравнение (12) при $p = 0, 1, \dots, s$ запишем в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{r=0}^s A_{pr} C_r + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k = v^2 \int_0^1 (\theta - \sin \theta) \varphi_p d\tau + \int_0^1 \mu(\tau) (1 - \cos \theta) \varphi_p d\tau. \quad (13)$$

При решении по методу итераций в «нулевом» приближении используем линейное решение с найденными $\theta^{(0)}(\tau)$ и $\mu^{(0)}(\tau)$. Подставляя эти найденные значения в систему (13), получаем новую систему алгебраических уравнений для нахождения первого приближения нелинейной задачи $\theta^{(1)}(\tau)$ и $\mu^{(1)}(\tau)$, которые определяются из коэффициентов $C_r^{(1)}$ и $b_k^{(1)}$ соответственно:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^s A_{pr} C_r^{(1)} + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k^{(1)} = v^2 \int_0^1 (\theta^{(0)} - \sin \theta^{(0)}) \varphi_p d\tau + \\ + \int_0^1 \mu^{(0)} (1 - \cos \theta^{(0)}) \varphi_p d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Процесс последовательного решения по методу итераций системы уравнений (14), к которой добавляются условие (4) и одна из групп уравнений (6)–(8), повторяется до достижения сходимости с заданной точностью.

Линейная задача для маятника переменной длины. На основании уравнения (1) линейное дифференциальное уравнение для маятника переменной длины запишем в виде

$$\frac{l}{l_0} \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{l_0} \frac{dl}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + v^2\theta + \mu(\tau) = 0. \quad (15)$$

Пусть изменение длины маятника происходит по закону

$$\frac{l}{l_0} = 1 + \delta \frac{1}{2}(1 - \cos \pi \tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

где δ — относительное приращение длины при $\tau = 1$.

Следуя методу Бубнова — Галеркина, запишем уравнение (15) в виде системы линейных алгебраических уравнений ($p = 0, 1, \dots, s$):

$$\sum_{r=0}^s B_{pr} C_r + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k = 0, \quad (16)$$

где

$$B_{pr} = \varepsilon_{pr} + v^2 \beta_{pr}; \quad \varepsilon_{pr} = \int_0^1 \varphi_p \left(\frac{l}{l_0} \frac{d^2 \varphi_r}{d\tau^2} + \frac{2}{l_0} \frac{dl}{d\tau} \frac{d\varphi_r}{d\tau} \right) d\tau.$$

Система уравнений (16) дополняется уравнением (4) и одной из групп уравнений (6)–(8) в зависимости от вида принятой аппроксимирующей функции $\varphi_r(\tau)$.

Нелинейная задача для маятника переменной длины. Для решения нелинейной задачи по методу итераций вновь в качестве «нулевого» приближения используем линейное решение. В этом случае с использованием представлений $\sin \theta = \theta + (\sin \theta - \theta)$ и $\cos \theta = 1 + (\cos \theta - 1)$ уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{l}{l_0} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{l_0} \frac{dl}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + v^2 \theta + \mu(\tau) = v^2 (\theta - \sin \theta) + \mu(\tau) (1 - \cos \theta). \quad (17)$$

По аналогии с определением системы (13) для данного случая маятника переменной длины получаем

$$\sum_{r=0}^s B_{pr} C_r + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k = v^2 \int_0^1 (\theta - \sin \theta) \varphi_p d\tau + \int_0^1 \mu(\tau) (1 - \cos \theta) \varphi_p d\tau. \quad (18)$$

При решении по методу итераций в «нулевом» приближении используем линейное решение с найденными $\theta^{(0)}(\tau)$ и $\mu^{(0)}(\tau)$. Подставляя эти значения в систему уравнений (18), получаем новую систему алгебраических уравнений для нахождения первого приближения нелинейной задачи $\theta^{(1)}(\tau)$ и $\mu^{(1)}(\tau)$, которые определяются из коэффициентов $C_r^{(1)}$ и $b_k^{(1)}$ соответственно:

$$\sum_{r=0}^s B_{pr} C_r^{(1)} + \sum_{k=1}^r \gamma_{pk} b_k^{(1)} = v^2 \int_0^1 (\theta^{(0)} - \sin \theta^{(0)}) \varphi_p d\tau + \int_0^1 \mu^{(0)} (1 - \cos \theta^{(0)}) \varphi_p d\tau. \quad (19)$$

Процесс последовательного решения по методу итераций системы уравнений (19), к которой добавляются условие (4) и одна из групп уравнений (6)–(8), повторяется до достижения сходимости с заданной точностью.

Ниже приведены примеры расчета нелинейных колебаний математического маятника.

1. Линейная задача для маятника постоянной длины. Рассмотрим маятник со следующими параметрами: $l_0 = 1$ м; $u_T = 1$ м; $T = 2$ с.

При $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$ для $s = 2$ значения коэффициентов C_r и b_k соответственно составят: $C_0 = -5,359 \cdot 10^{-16}$; $C_1 = -0,150$; $C_2 = -0,150$; $b_1 = 0,854$; $b_2 = 10,858$. На рис. 2 представлены результаты решения в случае, когда значение $|\theta(1) - \theta_a(1)|$, которое показывает сходимость решения по методу Бубнова — Галеркина, равно 0,072 рад и $s = 2$. Здесь и далее a — управляющая функция $\mu(\tau)$; b — угол поворота маятника $\theta(\tau)$ по сравнению с численным решением по методу Адамса $\theta_a(\tau)$. Сплошной линией на графиках угла поворота обозначено решение по методу Бубнова — Галеркина, штрихпунктирной — решение по методу Адамса.

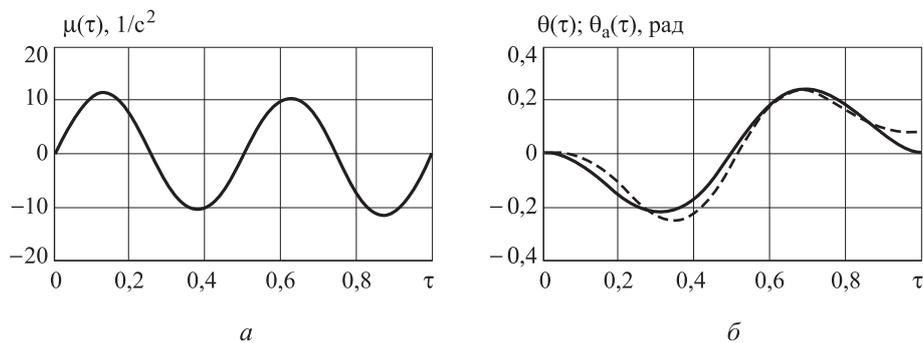


Рис. 2. Результаты решения линейной задачи для маятника постоянной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$, $s = 2$

При $s = 6$ значения коэффициентов C_r и b_k : $C_0 = -1,402 \cdot 10^{-16}$; $C_1 = -0,145$; $C_2 = -0,145$; $C_3 = -0,039$; $C_4 = -0,039$; $C_5 = -0,004$; $C_6 = -0,004$; $b_1 = 0,003$; $b_2 = 12,560$. На рис. 3 приведены результаты решения при $|\theta(1) - \theta_a(1)| = 4,973 \cdot 10^{-3}$ рад и $s = 6$.

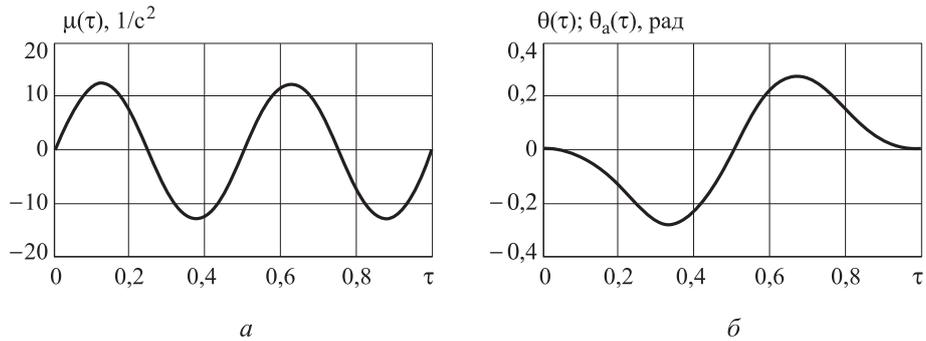


Рис. 3. Результаты решения линейной задачи для маятника постоянной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$, $s = 6$

При $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau]$ для $s = 5$ значения коэффициентов C_r и b_k : $C_0 = 9,614 \cdot 10^{-17}$; $C_1 = -0,149$; $C_2 = 8,882 \cdot 10^{-16}$; $C_3 = 0,388$; $C_4 = -1,081 \cdot 10^{-15}$; $C_5 = -0,239$; $b_1 = -1,187$; $b_2 = 40,576$; $b_3 = -38,453$. На рис. 4 представлены результаты решения при $|\theta(1) - \theta_a(1)| = 0,088$ рад и $s = 5$.

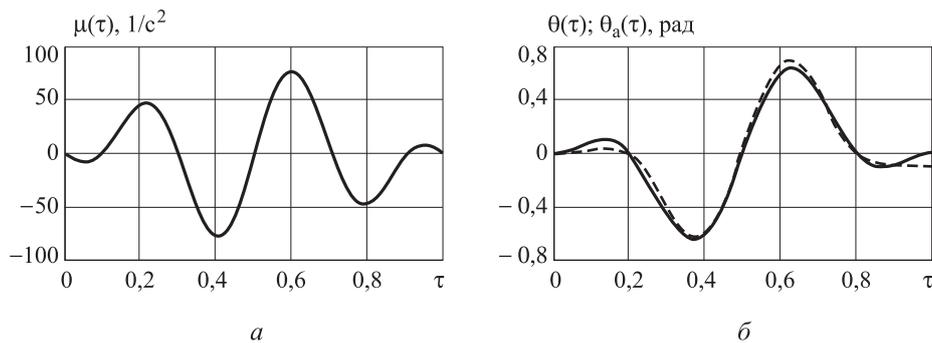


Рис. 4. Результаты решения линейной задачи для маятника постоянной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$, $s = 5$

При $s = 7$ значения коэффициентов C_r и b_k : $C_0 = 6,171 \cdot 10^{-17}$; $C_1 = -0,151$; $C_2 = 2,330 \cdot 10^{-16}$; $C_3 = 0,278$; $C_4 = -5,661 \cdot 10^{-16}$; $C_5 =$

$= -0,147$; $C_6 = 1,958 \cdot 10^{-16}$; $C_7 = -0,019$; $b_1 = -0,146$; $b_2 = 27,261$; $b_3 = -21,604$. На рис. 5 приведены результаты решения при $|\theta(1) - \theta_a(1)| = 6,028 \cdot 10^{-3}$ рад и $s = 7$.

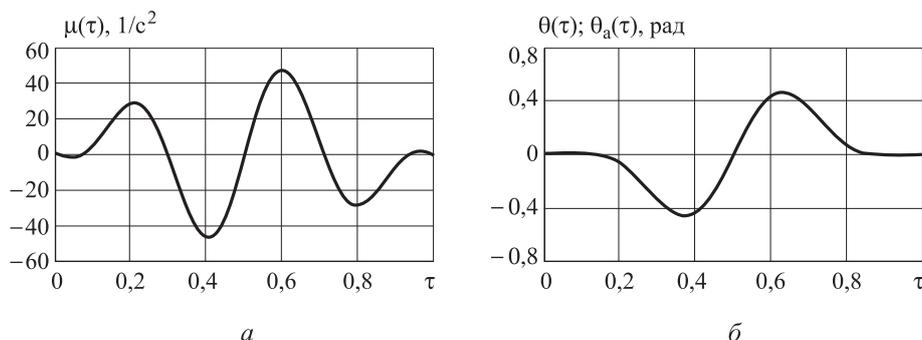


Рис. 5. Результаты решения линейной задачи для маятника постоянной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$, $s = 7$

При $\varphi_r(\tau) = \sin[r\pi\tau]$ для $s = 6$ значения коэффициентов C_r и b_k : $C_1 = 6,654 \cdot 10^{-16}$; $C_2 = -0,162$; $C_3 = -1,930 \cdot 10^{-16}$; $C_4 = -0,057$; $C_5 = -2,135 \cdot 10^{-16}$; $C_6 = 0,092$; $b_1 = -0,045$; $b_2 = -6,812$; $b_3 = 29,204$. На рис. 6 представлены результаты решения при $|\theta(1) - \theta_a(1)| = 4,908 \cdot 10^{-6}$ рад и $s = 6$.

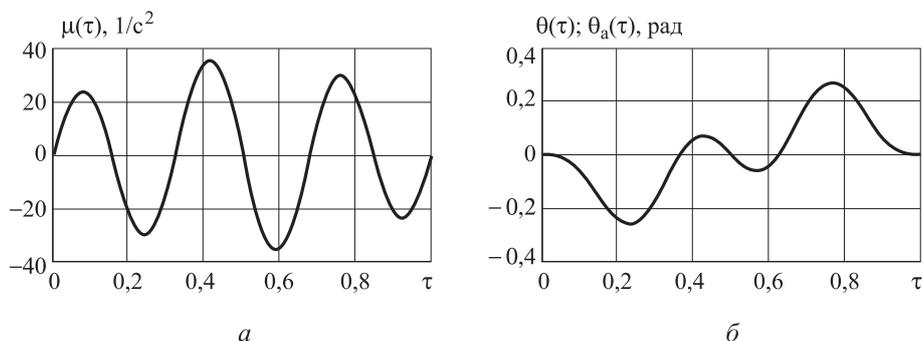


Рис. 6. Результаты решения линейной задачи для маятника постоянной длины при $\varphi_r(\tau) = \sin(r\pi\tau)$, $s = 6$

2. Нелинейная задача для маятника постоянной длины. Рассмотрим маятник со следующими параметрами: $l_0 = 1$ м; $u_T = 2,5$ м; $T = 2$ с. Аппроксимирующая функция задана в виде $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$ при $s = 7$.

Задачу решаем методом последовательных приближений, число которых равно семи. При этом на каждом шаге для проверки сходимости решения определяем значение $|\theta(1) - \theta_a(1)|$: 1 — 0,103 рад; 2 — 0,066 рад; 3 — 0,048 рад; 4 — 0,037 рад; 5 — 0,031 рад; 6 — 0,026 рад; 7 — 0,023 рад. На рис. 7 приведены изменения управляющей функции (а) и угла поворота маятника (б) на 1, 3, 5 и 7 шагах решения задачи.

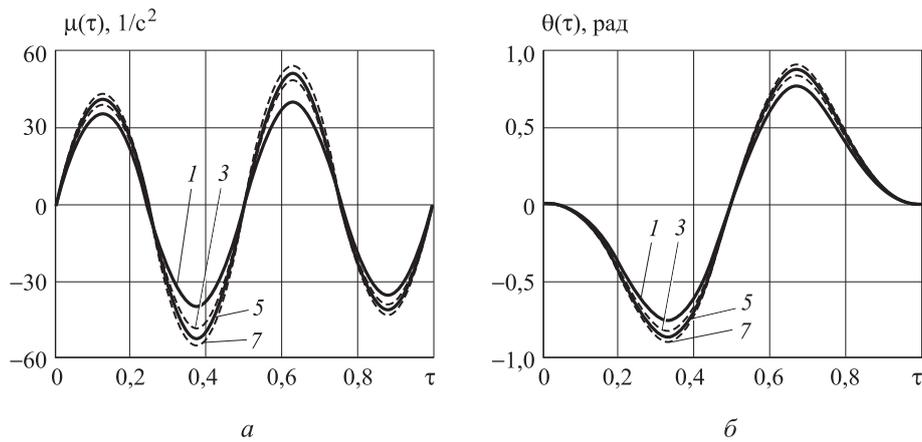


Рис. 7. Последовательные приближения при решении нелинейной задачи для маятника постоянной длины

Приведем значения коэффициентов C_r и b_k на шаге 7 приближения: $C_0 = 6,381 \cdot 10^{-15}$; $C_1 = -0,497$; $C_2 = -0,497$; $C_3 = 0,109$; $C_4 = 0,109$; $C_5 = 0,012$; $C_6 = 0,012$; $C_7 = 2,372 \cdot 10^{-13}$; $b_1 = -8,475$; $b_2 = 48,366$. На рис. 8 приведены результаты решения нелинейной задачи для маятника постоянной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$ и $s = 7$.

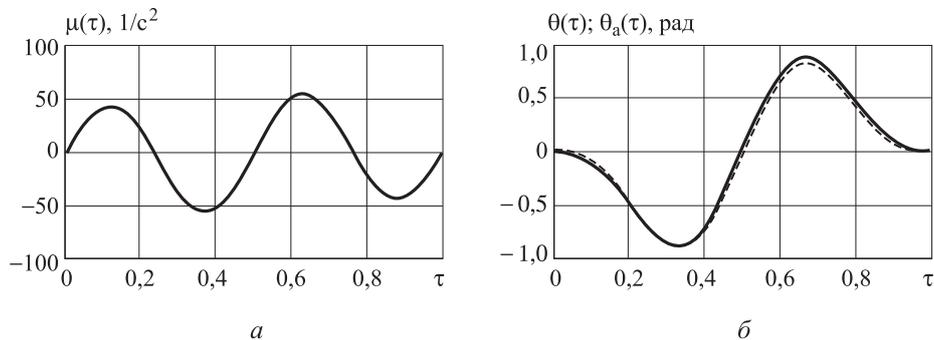


Рис. 8. Результаты решения нелинейной задачи для маятника постоянной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$, $s = 7$

3. Линейная задача для маятника переменной длины. Рассмотрим маятник со следующими параметрами: $l_0 = 1$ м; $u_T = 1$ м; $T = 2$ с, $\delta = 0,5$. Аппроксимирующая функция задана в виде $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$ при $s = 7$.

Значения коэффициентов C_r и b_k : $C_0 = -1,453 \cdot 10^{-3}$; $C_1 = -0,140$; $C_2 = -0,148$; $C_3 = 0,029$; $C_4 = 0,044$; $C_5 = 0,011$; $C_6 = 6,102 \cdot 10^{-3}$; $C_7 = 8,475 \cdot 10^{-4}$; $b_1 = -1,893$; $b_2 = 16,352$. На рис. 9 представлены результаты решения линейной задачи для маятника переменной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos[r\pi\tau] - \cos[(r+1)\pi\tau]$ и $s = 7$.

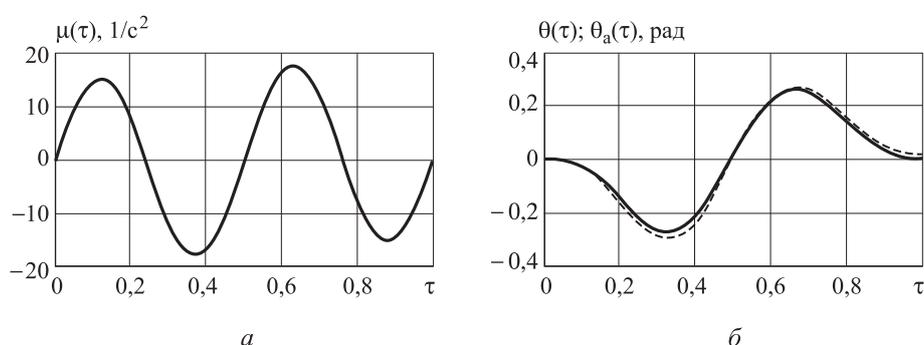


Рис. 9. Результаты решения линейной задачи для маятника переменной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$, $s = 7$

4. Нелинейная задача для маятника переменной длины. Рассмотрим маятник со следующими параметрами: $l_0 = 1$ м; $u_T = 7,3$ м; $T = 2,8$ с, $\delta = 0,5$. Аппроксимирующая функция задана в виде $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$ при $s = 7$.

Задачу решаем методом последовательных приближений, число которых равно семи. При этом на каждом шаге для проверки сходимости решения определяем значение $|\theta(1) - \theta_a(1)|$: 1 — 0,187 рад; 2 — 0,141 рад; 3 — 0,117 рад; 4 — 0,103 рад; 5 — 0,095 рад; 6 — 0,092 рад; 7 — 0,091 рад. На рис. 10 показаны изменения управляющей функции (*а*) и угла поворота маятника (*б*) на 1, 3, 5 и 7 шагах решения задачи.

Приведем значения коэффициентов C_r и b_k на шаге 7 приближения: $C_0 = 4,180 \cdot 10^{-3}$; $C_1 = -0,689$; $C_2 = -0,772$; $C_3 = 0,048$; $C_4 = 0,137$; $C_5 = 0,027$; $C_6 = 0,015$; $C_7 = -1,267 \cdot 10^{-3}$; $b_1 = 4,363$; $b_2 = 83,008$. На рис. 11 приведены результаты решения нелинейной

задачи для маятника переменной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$ и $s = 7$.

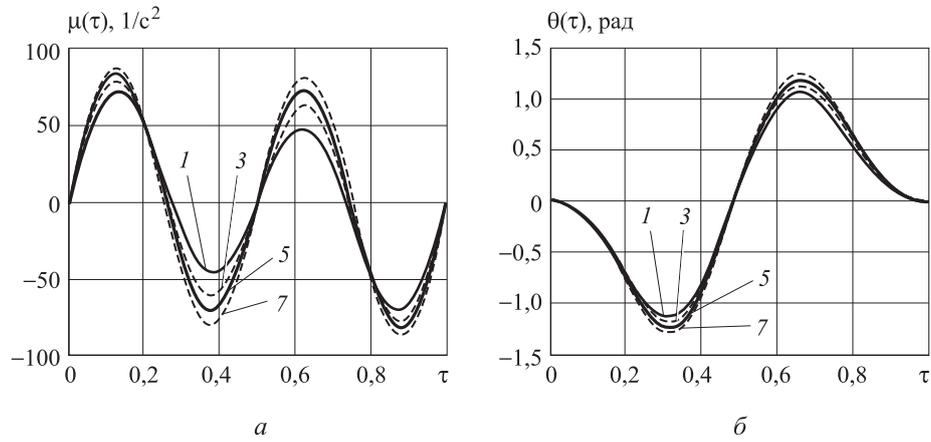


Рис. 10. Последовательные приближения при решении нелинейной задачи для маятника переменной длины

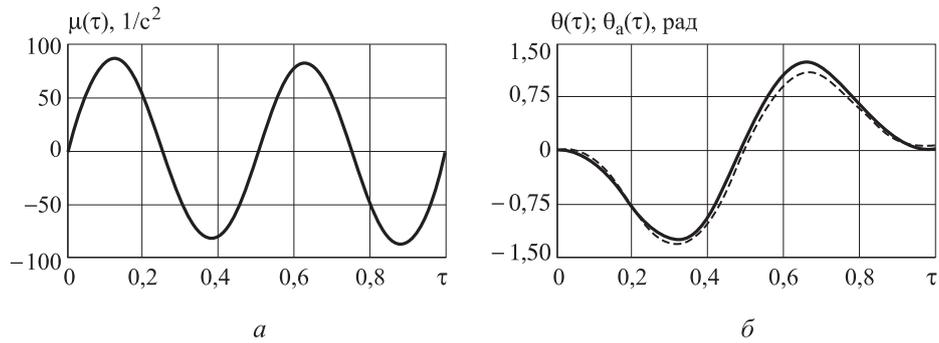


Рис. 11. Результаты решения нелинейной задачи для маятника переменной длины при $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau) - \cos[(r+1)\pi\tau]$, $s = 7$

Заключение. Решена задача о гашении колебаний в момент остановки при конечном передвижении за заданное время математического маятника переменной длины. Решение получено по методу Бубнова — Галеркина, управляющая функция представлена в виде ряда по синусам. Приведены виды систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов, к которым сводятся решения при различных постановках задачи — линейные и нелинейные колебания, постоянная и переменная длина маятника.

Рассмотрены примеры расчета с оценками сходимости решений при различных числах аппроксимирующих функций и последовательных приближениях при решении нелинейной задачи.

Работа выполнена в рамках государственного задания (номер государственной регистрации темы АААА-А17-117032010144-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-08-00778а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация*. Москва, Наука, 1989, 363 с.
- [2] Бербюк В.Б. *Динамика и оптимизация робототехнических систем*. Киев, Наукова Думка, 1989, 187 с.
- [3] Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. *Механика больших космических конструкций*. Москва, Факториал, 1997, 302 с.
- [4] Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами*. Москва, Машиностроение, 1987, 232 с.
- [5] Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. *Управление колебаниями*. Москва, Наука, 1976, 383 с.
- [6] Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. *Методы управления нелинейными механическими системами*. Москва, Физматлит, 2006, 326 с.
- [7] Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем. *ПММ*, 2014, т. 78, вып. 5, с. 656–670.
- [8] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. Москва, Изд-во МАИ, 2007, 328 с.
- [9] Русских С.В. Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2016, № 12, с. 97–105.
- [10] Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Управление конечным поворотом упругой системы из одного состояния в другое с гашением колебаний в момент окончания операции. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*, 2017, т. 159, кн. 4, с. 429–443.

Статья поступила в редакцию 30.05.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода Бубнова — Галеркина для расчета нелинейных колебаний математического маятника переменной длины при конечном передвижении из одного состояния покоя в другое. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 10.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-10-1809>

Русских Сергей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» МАИ (НИУ), старший научный сотрудник ИПРИМ РАН. Автор 35 научных работ. Область научных исследований: механика и динамика деформируемого твердого тела, динамика упругих управляемых конструкций, динамика космических систем.
e-mail: sergey.russkih@ Rambler.ru

Шклярчук Федор Николаевич — д-р техн. наук, заслуженный деятель науки Российской Федерации, главный научный сотрудник ИПРИМ РАН, профессор кафедры «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» МАИ (НИУ). Автор 215 научных работ. Область научных исследований: механика и динамика деформируемого твердого тела, динамика упругих управляемых конструкций, динамика космических систем.
e-mail: shklyarchuk@list.ru

Using the Bubnov—Galerkin method to calculate the nonlinear oscillations of the variable-length mathematical pendulum at final movement from one state of rest into another

© S.V. Russkikh, F.N. Shklyarchuk

Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, 125993, Russia
Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences,
Moscow, 125040, Russia

To assess the efficiency of the Bubnov — Galerkin method and its precision compared to the numerical technique, we consider the nonlinear oscillations of the variable-length mathematical pendulum at the moving suspension. The authors have set the following task: to move the pendulum attachment point for defined time at given distance with the simultaneous suppression of natural modes at the moment of stopping. The control function with the kinematic control of final movement is specified as a series of sines. The unknown required function representing the pendulum rotational angle in accordance with the Bubnov — Galerkin method is written as the resolution with the unknown coefficients by given time functions. The work forms a system of linear algebraic equations, the order of which depends on the number of approximating functions. We consider the calculation examples at various initial settings of the problem.

Keywords: *mathematical pendulum, final movement, suppression of oscillations, Bubnov — Galerkin method, nonlinear oscillations, a system of linear algebraic equations, approximating functions*

REFERENCES

- [1] Chernousko F.L., Bolotnik N.N., Gradetskiy V.G. *Manipulyatsionnye roboty: dinamika, upravlenie, optimizatsiya* [Manipulating robots: dynamics, control, optimization]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 363 p.
- [2] Berbyuk V.B. *Dinamika i optimizatsiya robototekhnicheskikh system* [Dynamics and optimization of robotic systems]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1989, 187 p.
- [3] Banichuk N.V., Karpov I.I., Klimov D.M. *Mekhanika bolshikh kosmicheskikh konstruksiy* [Mechanics of large space structures]. Moscow, Faktorial Publ., 1997, 302 p.
- [4] Dokuchaev L.V. *Nelineynaya dinamika letatelnykh apparatov s deformiruemyimi elementami* [Nonlinear dynamics of flying vehicles with crash elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987, 232 p.
- [5] Chernousko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. *Upravlenie kolebaniyami* [Oscillations control]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 383 p.
- [6] Chernousko F.L., Ananevskiy I.M., Reshmin S.A. *Metody upravleniya nelineynymi mekhanicheskimi sistemami* [The methods of controlling the nonlinear mechanical systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 326 p.
- [7] Kubyshkin E.P. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 656–670.
- [8] Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravlyaemykh konstruksiy* [Dynamics of elastic controlled structures]. Moscow, Moscow Aviation Institute Publ., 2007, 328 p.

- [9] Russkikh S.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2016, no. 12, pp. 97–105.
- [10] Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki — Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 429–443.

Russkikh S.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Design and Strength of Aviation-Rocket and Space Products, Moscow Aviation Institute (National Research University). Senior Research Scientist of the Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences. Author of over 35 scientific works. Research interests include: mechanics and dynamics of the deformable solid, dynamics of elastic controlled structures, dynamics of space systems. e-mail: sergey.russkih@rambler.ru

Shklyarchuk F.N., Dr. Sc. (Eng.), Honored Scientist of the Russian Federation, Chief Research Scientist of the Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences. Professor of the Department of Design and Strength of Aviation-Rocket and Space Products, Moscow Aviation Institute (National Research University). Author of over 215 scientific works. Research interests include: mechanics and dynamics of the deformable solid, dynamics of elastic controlled structures, dynamics of space systems. e-mail: shklyarchuk@list.ru