

Анализ пределов применимости алгоритма уточнения параметров конечно-элементной модели на основе расчета коэффициентов чувствительности

© В.А. Жулев, И.А. Киселев, А.А. Пекарев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В настоящее время активно развиваются методы подбора параметров конечно-элементной (КЭ) модели таким образом, чтобы ее поведение соответствовало поведению реальной конструкции. Как правило, в качестве критерия соответствия модели и объекта принимается близость собственных частот. Однако даже при совпадении собственных частот разрабатываемой модели и реального изделия их поведение может существенно различаться. Показаны границы применимости алгоритма уточнения жесткости элементов КЭ-модели по экспериментальным значениям собственных частот на примере простой модели упругой системы, имеющей точное аналитическое решение для значений собственных частот и форм колебаний. Рассматриваемая тестовая модель позволяет проверить адекватность работы алгоритма уточнения по собственным частотам колебаний в зависимости от степени начального отклонения упругих параметров системы от эталонных значений, а также в зависимости от степени начального различия собственных форм колебаний. Результаты работы показывают необходимость дополнительного учета невязки по собственным формам колебаний для исключения грубых ошибок уточнения КЭ-моделей по собственным частотам.

Ключевые слова: уточнение конечно-элементных моделей, верификация конечно-элементных моделей, коэффициент чувствительности

Введение. Реальные изделия в машиностроительной отрасли представляют собой сложные сборные конструкции с множеством стыков и зазоров, что определяет сложность построения численных моделей динамики для таких объектов на основе метода конечных элементов. Многочисленные стыки составных частей и узлов крепления навесного оборудования обладают не известной заранее жесткостью, зависящей от ряда технологических факторов и конструктивных особенностей объекта. При создании конечно-элементных (КЭ) моделей таких изделий обычно отсутствует априорная информация о введенных жесткостях соединений, что приводит к существенным отличиям результатов расчета собственных частот (СЧ) и собственных форм (СФ) колебаний от практически наблюдаемых результатов, которые могут быть получены на основе методов экспериментального модального анализа. Тем не менее в целях дальнейшей оптимизации конструкции либо для построения системы управления объектом требуется повышение точности его КЭ-модели.

При рассмотрении вопросов, связанных с уточнением КЭ-моделей, принято выделять два типа методов — прямые и итерационные. Пря-

мые методы изменяют компоненты матриц, которые используются в КЭ-моделировании, причем уточнение происходит за одну итерацию [1, 2]. К недостаткам таких методов можно отнести то, что в результате уточнения параметры модели могут принимать значения, выходящие за физически обоснованные диапазоны.

Итерационные методы лишены этого недостатка. Их основная идея заключается в том, что вводится целевая функция, представляющая собой меру невязки между расчетными и экспериментальными значениями собственных частот, которая может быть минимизирована за несколько итераций методами теории оптимизации. С применением такого подхода можно ознакомиться в работе [3]. Наиболее широкое распространение получил итерационный метод, основанный на вычислении коэффициента чувствительности. В работе [4] приведены основные уравнения данного подхода.

В последнее десятилетие широкую популярность среди исследователей получили вероятностные алгоритмы. В работе [5] применяются алгоритм имитации отжига и генетический алгоритм для уточнения расчетной модели. В работе [6] рассмотрено множество подходов к уточнению КЭ-модели, один из которых — метод роя частиц, примененный для уточнения модуля упругости Н-образной конструкции, состоящей из 12 балочных элементов. Этот же метод оптимизации использовался в работе [7] для подбора параметров моста с целью. В качестве уточняемых параметров были выбраны жесткость в горизонтальной плоскости ездового полотна, жесткость пучков, жесткость опор и др.

В случае если результаты модальных испытаний имеют большой разброс собственных частот и форм колебаний от экземпляра к экземпляру изделия, то применяют особые статистические методы уточнения, которые учитывают разброс параметров системы [3, 6, 8–10]. Большое количество статей посвящено уточнению модели с использованием теоремы Байеса [11–13].

Для сложных сборных конструкций наиболее оправданным с физической точки зрения способом приведения расчетной модели в соответствие с результатами экспериментальных исследований является введение в расчетную модель дополнительных конечных элементов связи в местах конструкции с заранее не известной жесткостью. Подбирая жесткости введенных элементов связи, расчетчик получает возможность сблизить результаты эксперимента и моделирования, руководствуясь собственным практическим опытом и пониманием механики деформирования анализируемой конструкции. Для моделей реальных конструкций в машиностроительной области число связей с неизвестной жесткостью, требующей подбора, может достигать нескольких десятков и сотен, что существенно повышает трудоемкость их ручного

итерационного подбора и в ряде случаев может препятствовать достижению оптимального результата.

Упомянутые методы частично решают проблему подбора параметров модели таким образом, чтобы собственные частоты модели и реального объекта совпадали. Однако механическое поведение верифицированной модели, полученной в результате применения алгоритмов уточнения, может существенно отличаться от поведения реального изделия. Целью настоящей статьи является определение границ применимости алгоритма уточнения по собственным частотам и влияния степени начального различия собственных форм колебаний уточняемой и эталонной моделей на результаты работы алгоритма уточнения.

Вычисление коэффициента чувствительности. Приведем основные этапы вычисления коэффициента чувствительности (КЧ) собственных частот конструкции к изменению жесткости выбранного конечного элемента. Более детальное изложение вычисления КЧ приведено в работе [14].

Известно [15], что собственные частоты модели без учета демпфирования могут быть определены с использованием соотношения Релея:

$$\omega_i^2 = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{K} \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i}, \quad (1)$$

где ω_i — i -я собственная частота; \mathbf{x}_i — i -я собственная форма колебаний модели; \mathbf{K} — глобальная матрица жесткости системы; \mathbf{M} — глобальная матрица масс системы.

Для определения КЧ собственной частоты к изменению жесткости выбранного конечного элемента необходимо продифференцировать выражение (1) по его жесткости:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial k_j} = \frac{\mathbf{x}_i^T (\mathbf{K}^{,kj} - \omega_i^2 \mathbf{M}^{,kj}) \mathbf{x}_i}{2\omega_i M_i}, \quad (2)$$

где k_j — жесткость j -го элемента; $\mathbf{K}^{,kj}$, $\mathbf{M}^{,kj}$ — локальные производные глобальной матрицы жесткости и масс по жесткости j -го элемента; M_i — i -я модальная масса $\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i$.

Матрица масс не зависит от жесткости элементов системы, поэтому выражение (2) принимает вид

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial k_j} = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{K}^{,kj} \mathbf{x}_i}{2\omega_i M_i}. \quad (3)$$

Производная матрицы жесткости модели по жесткости отдельного конечного элемента может быть приближенно определена в виде относительного изменения матрицы жесткости модели при полном исключении выбранного конечного элемента:

$$\mathbf{K}^{,k_j} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial k_j} \approx \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta k_j} = \frac{\mathbf{K}' - \mathbf{K}}{0 - k_j} = \frac{\mathbf{K}'_j}{k_j},$$

где \mathbf{K}' — глобальная матрица жесткости системы с исключенным элементом; \mathbf{K}'_j — матрица жесткости j -го элемента, дополненная нулями до размерности глобальной матрицы жесткости.

Тогда числитель в выражении (3) представляет собой потенциальную энергию деформации выбранного элемента системы с номером j :

$$\underbrace{\mathbf{x}_i^T}_{1 \times n} \underbrace{\mathbf{K}'_j}_{n \times n} \underbrace{\mathbf{x}_i}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{x}_{j,i}^T}_{1 \times m} \underbrace{\mathbf{K}_j}_{m \times m} \underbrace{\mathbf{x}_{j,i}}_{m \times 1} = \Pi_j,$$

где $\mathbf{x}_{j,i}$ — компоненты вектора собственных форм для узлов, принадлежащих элементу с номером j при i -й собственной частоте.

При расчете собственных частот рационально выполнять М-орто-нормирование собственных форм колебаний таким образом, чтобы модальные массы для всех собственных частот были равны единице. В этом случае выражение для КЧ принимает вид

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial k_j} = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{K}^{,k_j} \mathbf{x}_i}{2\omega_i M_i} \approx \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{K}'_j \mathbf{x}_i}{2\omega_i M_i k_j} = \frac{\Pi_{ij}}{\omega_i k_j}. \quad (4)$$

В случае если требуется настройка модели по значениям N низших собственных частот и допускается варьирование жесткости в L конечных элементах, то КЧ, определяемые соотношением (2), рационально сгруппировать в матрицу КЧ (3) размерностью $L \times N$, где j -я строка представляет собой коэффициенты чувствительности учитываемых в расчете собственных форм к изменению жесткости j -го конечного элемента:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial k_1} & \frac{\partial \omega_2}{\partial k_1} & \dots \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial k_2} & \frac{\partial \omega_2}{\partial k_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Алгоритм уточнения элементов жесткости КЭ-модели. Рассмотрим вектор собственных частот как функцию от параметров жесткости некоторых элементов и разложим эту функцию в ряд Тейлора в окрестности некоторого значения жесткости \mathbf{k}_0 этих элементов:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) = & \omega(\mathbf{k}_0) + \frac{\omega'(\mathbf{k}_0)}{1!}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \\ & + \frac{\omega''(\mathbf{k}_0)}{2!}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 + \dots + \frac{\omega^{(n)}(\mathbf{k}_0)}{n!}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Линеаризация соотношения (6) по вектору жесткости \mathbf{k}_0 приводит к рекуррентному выражению для определения неизвестной жесткости элементов уточняемой модели:

$$\mathbf{k}_{i+1} = \mathbf{k}_i + (\mathbf{T}_i)^+ \cdot (\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_i)), \quad (7)$$

где i — номер итерации; \mathbf{k}_{i+1} — вектор жесткости, который будет использован на следующей итерации $i + 1$; \mathbf{k}_i — вектор жесткости, используемый в текущей итерации i ; $(\mathbf{T}_i)^+$ — псевдообратная матрица КЧ $\mathbf{T}_i^T (\mathbf{T}_i^T \mathbf{T}_i^T)^{-1}$; $\omega(\mathbf{k})$, $\omega(\mathbf{k}_i)$ — векторы экспериментальных и расчетных значений частот.

Оценка корреляции собственных форм с помощью МАС-матрицы. Для оценки корреляции собственных форм, полученных в результате эксперимента и расчета, используется так называемая МАС-матрица (матрица модальной достоверности) [16, 17], компоненты которой определяются соотношением (8) и характеризуют попарную М-ортогональность расчетных и экспериментальных собственных форм. Обычно хорошо коррелированными считаются собственные формы со значениями МАС-матрицы выше 0,75. В случае идеального совпадения расчетной и экспериментальной моделей диагональные элементы МАС-матрицы будут равны единице, недиагональные — нулю:

$$MAC(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{x}_{ej}) = \frac{(\mathbf{x}_{ai}^T \cdot \mathbf{x}_{ej})^2}{(\mathbf{x}_{ai}^T \cdot \mathbf{x}_{ai}) \cdot (\mathbf{x}_{ej}^T \cdot \mathbf{x}_{ej})}, \quad (8)$$

где \mathbf{x}_{ai} — i -й вектор собственных форм, полученный расчетом; \mathbf{x}_{ej} — j -й вектор собственных форм, полученный экспериментально.

Сопоставление собственных форм, полученных расчетом на разных итерациях, принято называть AutoMAC-матрицей, которая вычисляется аналогичным образом, но вместо экспериментальных собственных

форм используются расчетные собственные формы, полученные на одной из прошлых итераций алгоритма уточнения модели, т. е.

$$AutoMAC(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{x}_{aj}) = MAC(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{x}_{aj}).$$

Алгоритм уточнения жесткости элементов связи. Для минимизации разницы между собственными частотами расчетной модели и собственными частотами, полученными в ходе модальных испытаний, необходимо адекватно подбирать приведенные жесткости модели. Для корректного осуществления такого подбора используется итерационный алгоритм уточнения.

При неудовлетворительной разнице собственных частот модели и экспериментального объекта для модели вычисляются КЧ (4), после чего по формуле (7) проводится вычисление жесткости уточняемых элементов. Для модели с измененными свойствами вычисляются значения собственных частот. Процесс повторяется до тех пор, пока разница СЧ не достигнет приемлемого значения (рис. 1).

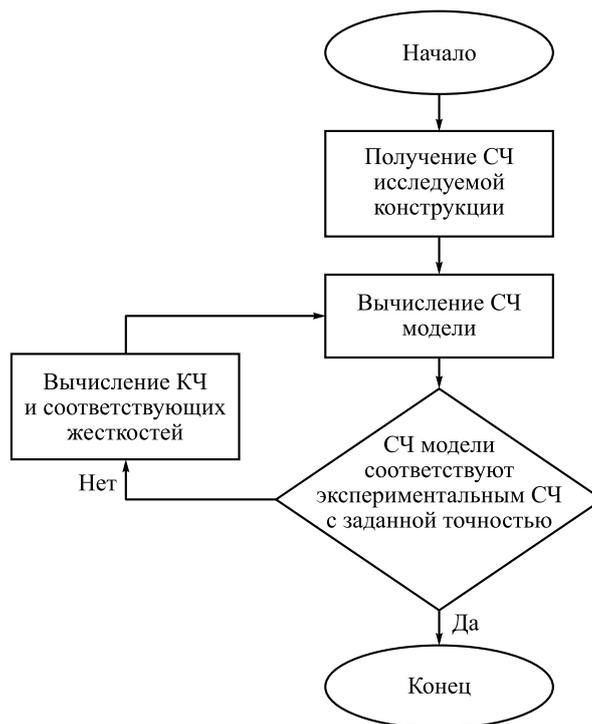


Рис. 1. Алгоритм уточнения КЭ-модели на основе КЧ

Описание исследуемой модели. Для проверки работы алгоритма уточнения КЭ-модели рассмотрим простейшую тестовую систему (рис. 2), состоящую из пяти пружин и массы в их общем узле. Для выбранной системы можно аналитически рассчитать значения собствен-

ных частот и форм колебаний. Для некоторых известных жесткостей элементов системы и масс получим СЧ и СФ, которые примем в качестве эталонных. На практике вместо эталонных значений СЧ и СФ используются экспериментальные, однако подход с применением эталонной модели в качестве условно экспериментальной обладает существенным преимуществом: параметры такого объекта известны априори. Следовательно, появляется возможность оценить параметры модели, полученные в результате применения алгоритма уточнения путем прямого сопоставления с исходными параметрами эталонной модели.

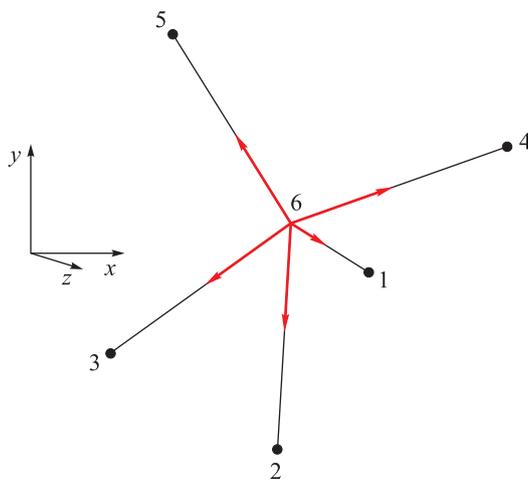


Рис. 2. Система из пяти пружин, расположенных в пространстве, с массой в их общем узле

Пусть жесткости пружин равны k_1 , k_2 , k_3 , k_4 и k_5 . В общем, для каждой пружины узла находится масса m . Свободные концы пружин заделаны. Направления пружин 61, 62, 63, 64 и 65 заданы векторами \mathbf{e}_i при $i = \overline{1, 5}$:

$$\mathbf{e}_1 = (2 \cos \alpha, -\sin \alpha, -\sin \beta);$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, -1, 0);$$

$$\mathbf{e}_3 = (-\cos \alpha, -2 \sin \alpha, -\sin \beta);$$

$$\mathbf{e}_4 = (\cos \alpha, \sin \alpha, \sin \beta);$$

$$\mathbf{e}_5 = (-\cos \alpha, 1, 0).$$

Собственные частоты и собственные формы эталонной модели.

В качестве эталонных примем значения СЧ и СФ, которые получаются при следующих параметрах: $k_1 = 900$ Н/м; $k_2 = 700$ Н/м; $k_3 = 250$ Н/м; $k_4 = 500$ Н/м; $k_5 = 600$ Н/м; $m = 1$ кг; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

Поиск СЧ был проведен с помощью метода Лагранжа, а СФ определялись из условия равенства единице соответствующих модельных масс. Необходимые вычисления выполнялись в среде Wolfram Alpha 9.

Получены следующие значения СЧ и СФ:

$$\omega_{1\text{exp}} = 18,77 \text{ Гц}; \quad A_{1\text{exp}} = (-0,05544; -0,3325; 0,9415);$$

$$\omega_{2\text{exp}} = 31,74 \text{ Гц}; \quad A_{2\text{exp}} = (0,7914; 0,5604; 0,2445);$$

$$\omega_{3\text{exp}} = 39,88 \text{ Гц}; \quad A_{3\text{exp}} = (-0,6088; 0,7586; 0,2321).$$

Результаты уточнения модели. Для прикладного использования алгоритм уточнения был реализован на языке программирования MATLAB (решатель — NX Nastran) и применен к исследуемой системе.

Рассматриваются два случая. В первом случае принимаются значения жесткости каждого элемента такими, что их значения на 10 % меньше, чем априори известных жесткостей эталонного объекта. Во втором случае значения жесткости принимаются одинаковыми. При этом они отличаются от априори известных значений не менее чем на 20 % и не более чем на 67 %.

Параметры модели для первого случая: $k_1 = 810 \text{ Н/м}$; $k_2 = 630 \text{ Н/м}$; $k_3 = 225 \text{ Н/м}$; $k_4 = 450 \text{ Н/м}$; $k_5 = 540 \text{ Н/м}$; $m = 1 \text{ кг}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

Результаты расчета приведены в табл. 1, графики сходимости СЧ — на рис. 3. Собственные формы после уточнения принимают значения:

$$A_1 = (7,9094; 5,5799; 2,5113);$$

$$A_2 = (-0,6287; -3,3413; 9,4043);$$

$$A_3 = (-6,0866; 7,5961; 2,2919).$$

Таблица 1

Результаты уточнения системы из пяти пружин в первом случае

Значения	Параметры модели							
	$k_1, \text{ Н/м}$	$k_2, \text{ Н/м}$	$k_3, \text{ Н/м}$	$k_4, \text{ Н/м}$	$k_5, \text{ Н/м}$	$\omega_1, \text{ Гц}$	$\omega_2, \text{ Гц}$	$\omega_3, \text{ Гц}$
Начальные	810,0	630,0	225,0	450,0	540,0	17,80	30,11	37,84
Конечные	890,9	696,0	246,2	507,6	609,2	18,77	31,74	39,88
Экспериментальные	900,0	700,0	250,0	500,0	600,0	18,77	31,74	39,88

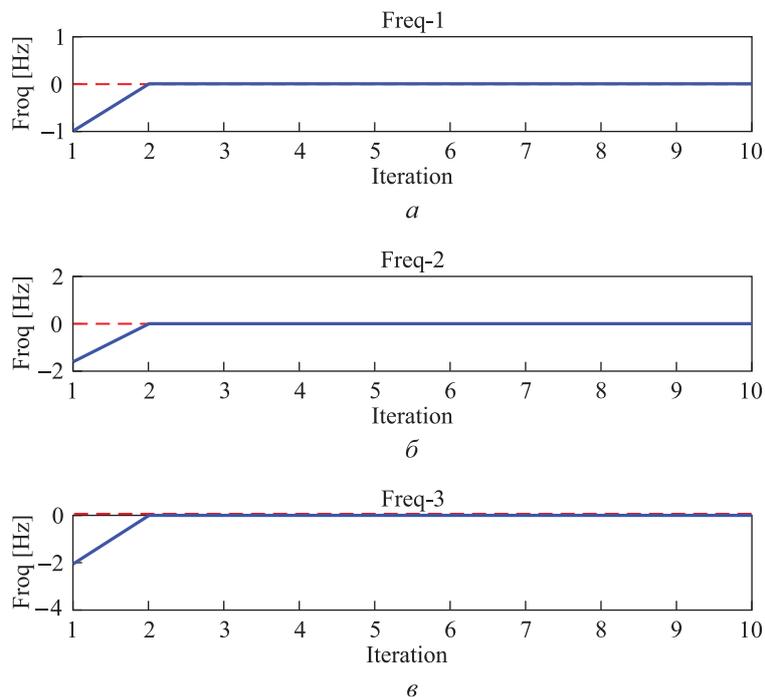


Рис. 3. Графики сходимости в первом случае, когда значения жесткости элементов модели отличаются не более чем на 10 % от эталонных, для первой (*а*), второй (*б*) и третьей (*в*) собственных частот

На рис. 4 представлены МАС-матрицы для эталонного и расчетного объектов на первой и последней итерации в первом случае, на рис. 5 показана AutoМАС-матрица для первой и последней СФ расчетной модели.

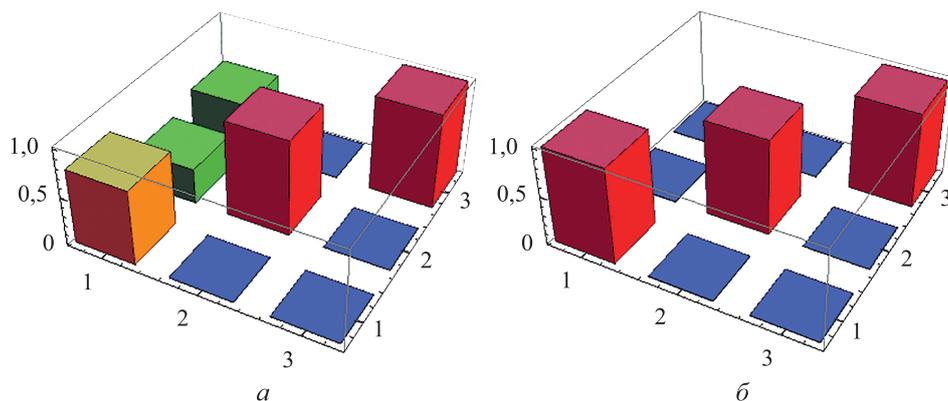


Рис. 4. МАС-матрица экспериментальной и аналитической собственных форм в первом случае до уточнения (*а*) и после уточнения (*б*)

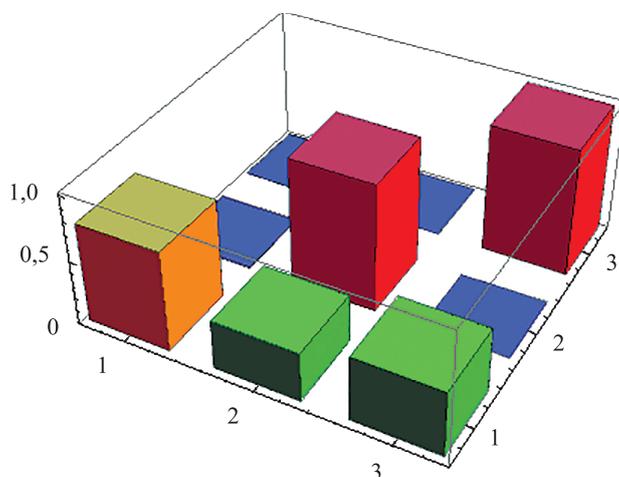


Рис. 5. AutoMAC-матрица собственных форм на первой и последней итерациях в первом случае

Рассмотрим второй случай с параметрами модели $k = 300$ Н/м для каждого элемента массой $m = 1$ кг при $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Результаты расчета приведены в табл. 2, а графики сходимости СЧ — на рис. 6. Собственные формы после уточнения принимают значения:

$$A_1 = (-1,4665; -3,0420; 9,4125);$$

$$A_2 = (9,8858; -7,8226; 1,2874);$$

$$A_3 = (3,4466; 9,4939; 3,1220).$$

Таблица 2

Результаты уточнения системы из пяти пружин во втором случае

Значения	Параметры модели							
	k_1 , Н/м	k_2 , Н/м	k_3 , Н/м	k_4 , Н/м	k_5 , Н/м	ω_1 , Гц	ω_2 , Гц	ω_3 , Гц
Начальные	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	12,31	24,51	27,35
Конечные	687,3	1004,6	468,8	498,5	300,0	18,76	31,82	39,91
Экспериментальные	900,0	700,0	250,0	500,0	600,0	18,77	31,74	39,88

На рис. 7 представлены MAC-матрицы для экспериментального и расчетного объектов на первой и последней итерации во втором случае, на рис. 8 показана AutoMAC-матрица для первой и последней СФ расчетной модели.

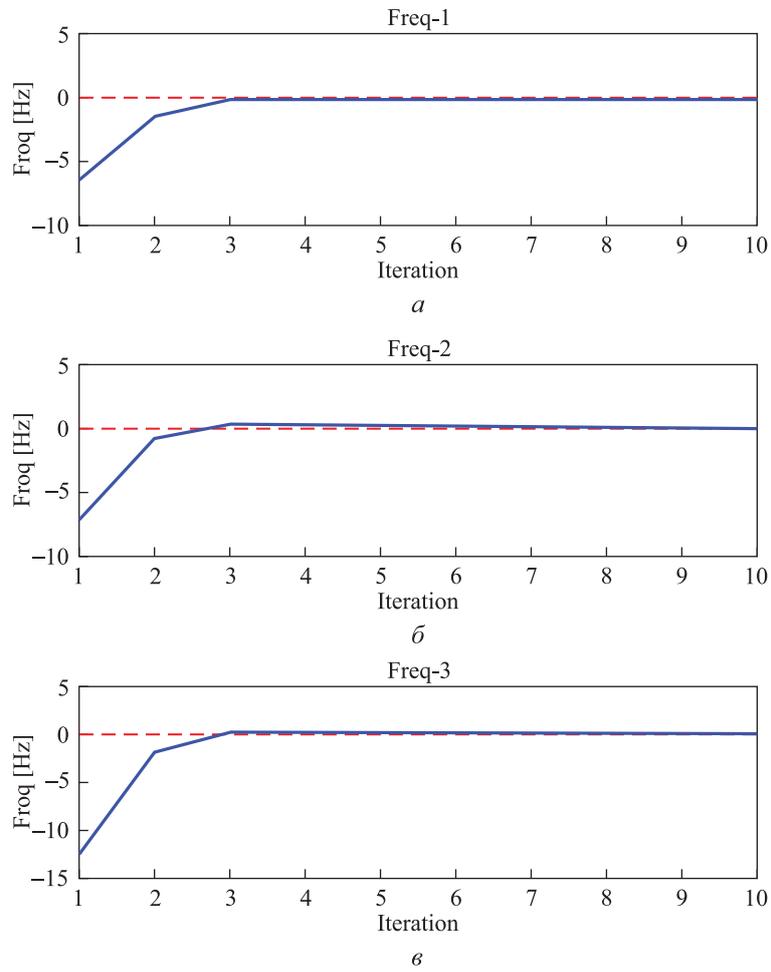


Рис. 6. Графики сходимости во втором случае, когда значения жесткости элементов модели отличаются не менее чем на 20 % от эталонных, для первой (*a*), второй (*б*) и третьей (*в*) собственных частот

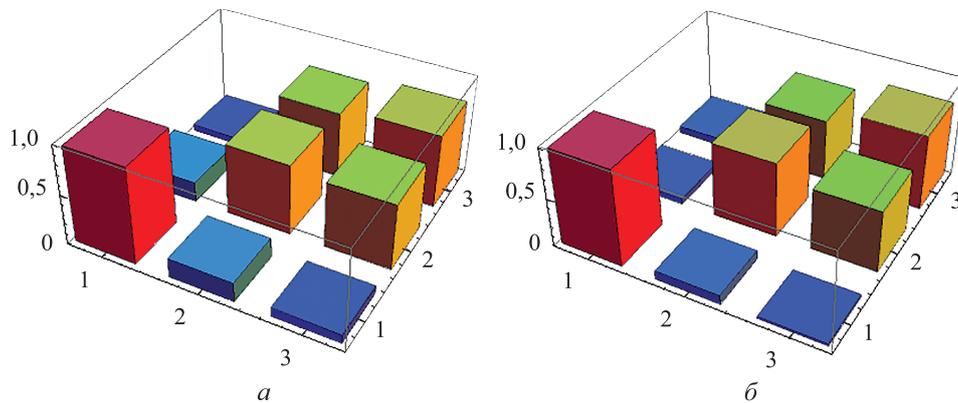


Рис. 7. MAC-матрица экспериментальной и аналитической собственных форм во втором случае до уточнения (*a*) и после уточнения (*б*)

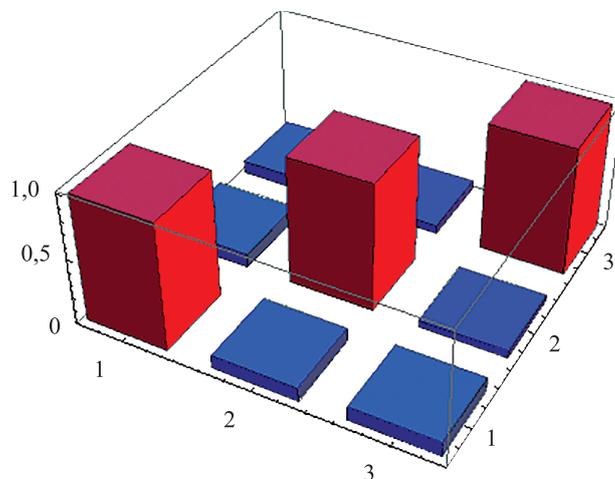


Рис. 8. AutoMAC-матрица собственных форм на первой и последней итерациях во втором случае

Анализ результатов. В первом случае, когда значения жесткости отличались не более чем на 10 % от априори известных, разница СЧ модели и эталонного объекта на первой итерации составляет 5,17, 5,14 и 5,12 % соответственно, при этом имеется незначительное различие СФ. В результате работы алгоритма уточнения удалось получить достоверную модель, СЧ и СФ которой приводятся с заданной точностью к эталонным СЧ и СФ за три итерации. При этом наибольшая разница между жесткостями модели и эталонного объекта после уточнения не превышает 1,5 %.

Во втором случае, когда значения жесткости отличались не менее чем на 20 % от априори известных, не удалось получить достоверную модель в результате уточнения. Разница СЧ модели на первой итерации и эталонного объекта составляет 34,42, 22,78 и 31,42 % соответственно. Несмотря на то что наибольшая разница значений СЧ модели и эталонного объекта после уточнения не превышает 0,25 %, значения жесткостей существенно различаются (наибольшая разница жесткостей составляет 43,5 %). Также существенно различаются значения СФ эталонной и уточненной аналитической моделей.

Описанная ситуация, приводящая к неоднозначному результату, характерна для уточнения КЭ-моделей реальных конструкций, когда число экспериментальных значений низших СЧ колебаний изделия не превышает нескольких десятков, в то время как число варьируемых параметров жесткости может составлять несколько сотен, т. е. имеет место некорректная постановка обратной задачи, приводящая к возможности неоднозначного решения. Таким образом, при существенном начальном различии расчетной и экспериментальной модели собственные формы должны использоваться для формулировки

расширенной целевой функции алгоритма уточнения, поскольку содержат дополнительную информацию о колебаниях системы.

Заключение. Рассмотрены границы применимости алгоритма уточнения КЭ-модели на основе вычисления коэффициента чувствительности по собственным частотам на примере простого объекта. В результате анализа полученных данных установлено, что применение алгоритма позволяет получить адекватную модель в случае изначальной близости собственных форм для аналитической модели и эталонного (условно экспериментального) объекта. Однако при существенном различии СФ возможно некорректное вычисление уточненных значений жесткостей конечных элементов. Ошибки алгоритма уточнения объясняются некорректной постановкой обратной задачи и возможностью множественного решения вследствие превышения числа уточняемых параметров над числом известных экспериментальных данных о собственных частотах объекта, которое обычно наблюдается в практических приложениях метода. В дальнейшем для таких случаев необходима модификация алгоритма уточнения в целях учета невязки по собственным формам колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Baruch M., BarItzhack I.Y. Optimal weighted orthogonalization of measured modes. *AIAA J.*, 1978, vol. 16 (4), pp. 346–351.
- [2] Berman A., Nagy E.J. Improvement of large analytical model using test data. *AIAA J.*, 1983, vol. 21 (7), pp. 1168–1173.
- [3] Khodaparast H.H. *Stochastic finite element model updating and its application in aeroelasticity*. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Liverpool, 2010, 228 p.
- [4] Friswell M.I., Mottershead J.E. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamic*. Berlin, Springer Science+Business Media, 1996, 286 p.
- [5] Levin R.I., Lieven N.I.J. Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1998, vol. 12 (1), pp. 91–120.
- [6] Marwala T. *Finite Element Model Updating Using Computational Intelligence Techniques: applications to structural dynamics*. Springer Verlag, 2010, pp. 67–82.
- [7] Shabbir F., Omenzetter P. Particle Swarm Optimization with Sequential Niche Technique for Dynamic Finite Element Model Updating. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2014, vol. 30 (5), pp. 359–375.
- [8] Cheung S.H., Beck J.L. Bayesian model updating using hybrid Monte Carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters. *J. Eng. Mech.*, 2009, vol. 135 (4), pp. 243–255.
- [9] Boulkaibet I., Marwala T., Mthembu L., Friswell M.I., Adhikari S. Sampling techniques in bayesian finite element model updating. *Proceedings of the Society for Experimental Mechanics*, 2012, vol. 29, pp. 75–83.
- [10] Yuen K.V. *Bayesian Methods for Structural Dynamics and Civil Engineering*. Wiley, 2010, pp. 11–24.
- [11] Straub D., Papaioannou I. Bayesian Updating with Structural Reliability Methods. *J. of Eng. Mech.*, 2015, vol. 141 (3), pp. 179–194.

- [12] Behmanesh I., Moaveni B. Probabilistic identification of simulated damage on the Dowling Hall footbridge through Bayesian finite element model updating. *Structural Control and Health Monitoring*, 2015, vol. 22 (3), pp. 463–483.
- [13] Miao D.D., Tarazaga P., Castellini P., ed. *Special Topics in Structural Dynamics. Proceedings of the 34th IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics 2016 (Conference Society for Experimental Mechanics Series)*, 2016, vol. 6, 289 p.
- [14] Gèradin M., Rixen D.L. *Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley, 2014, 520 p.
- [15] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, Высшая школа, 1980, 191 с.
- [16] Pástor M., Binda M., Harčarik T. Modal Assurance Criterion. *Procedia Engineering*, 2012, vol. 48, pp. 543–548.
- [17] Modak S.V., Kundra T.K., Nakra B.C. Comparative Study of Model Updating Methods Using Simulated Experimental Data. *Computers and Structures*, 2002, vol. 80 (5), pp. 437–447.

Статья поступила в редакцию 23.05.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Жулев В.А., Киселев И.А., Пекарев А.А. Анализ пределов применимости алгоритма уточнения параметров конечно-элементной модели на основе расчета коэффициентов чувствительности. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 9. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-9-1804>



Жулев Владимир Александрович — аспирант кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: коэффициент чувствительности, верификация КЭ-модели, модальный анализ.
e-mail: vlzh92@gmail.com



Киселев Игорь Алексеевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: численное моделирование, метод конечных элементов, моделирование динамики процессов резания.
e-mail: i.a.kiselev@yandex.ru



Пекарев Андрей Алексеевич — студент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: pekarev123andrey@gmail.com

Analysis of the finite-element model parameters refinement algorithm applicability limits on the basis of the sensitivity coefficients computation

© V.A. Zhulev, I.A. Kiselev, A.A. Pekarev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The methods for selecting the finite-element model (FE model) parameters are presently actively developing so that its behaviour could correspond with the behaviour of the real construction. Generally, the proximity of natural frequencies is accepted as the model and object fitting criterion. However, even when the natural frequencies of the developed model correspond with the actual product, their behaviour can vary significantly. The article shows the limits to the applicability of the FE model's elements rigidity refinement algorithm by the experimental values of natural frequencies as exemplified by the simple model of the elastic system having the precise analytical solution for the values of natural frequencies and vibrational modes. The test model considered allows checking the adequacy of the refinement algorithm by natural frequencies of vibration depending on the degree of the system's elastic parameters initial deviation from the calibrated values as well as the degree of the natural modes initial differences. The work results show the need for the additional accounting of discrepancies by natural modes to prevent the rough errors of refining the FE models by the natural frequencies from occurring.

Keywords: FE models refinement, FE models verification, sensitivity coefficient

REFERENCES

- [1] Baruch M., Bar-Itzhack I.Y. Optimal weighted orthogonalization of measured modes. *AIAA J.*, 1978, vol. 16 (4), pp. 346–351.
- [2] Berman A., Nagy E.J. Improvement of large analytical model using test data. *AIAA J.*, 1983, vol. 21 (7), pp. 1168–1173.
- [3] Khodaparast H.H. *Stochastic finite element model updating and its application in aeroelasticity*. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Liverpool, 2010, 228 p.
- [4] Friswell M.I., Mottershead J.E. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Berlin, Springer Science+Business Media, 1996, 286 p.
- [5] Levin R.I., Lieven N.I.J. Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1998, vol. 12 (1), pp. 91–120.
- [6] Marwala T. *Finite Element Model Updating Using Computational Intelligence Techniques: applications to structural dynamics*. Springer Verlag, 2010, pp. 67–82.
- [7] Shabbir F., Omenzetter P. Particle Swarm Optimization with Sequential Niche Technique for Dynamic Finite Element Model Updating. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2014, vol. 30 (5), pp. 359–375.
- [8] Cheung S.H., Beck J.L. Bayesian model updating using hybrid Monte Carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, vol. 135 (4), pp. 243–255.
- [9] Boulkaibet I., Marwala T., Mthembu L., Friswell M.I., Adhikari S. Sampling techniques in Bayesian finite element model updating. *Proceedings of the Society for Experimental Mechanics*, 2012, vol. 29, pp. 75–83.
- [10] Yuen K.V. *Bayesian Methods for Structural Dynamics and Civil Engineering*. Wiley, 2010, pp. 11–24.

- [11] Straub D., Papaioannou I. Bayesian Updating with Structural Reliability Methods. *Journal of Engineering Mechanics*, 2015, vol. 141 (3), pp. 179–194.
- [12] Behmanesh I., Moaveni B. Probabilistic identification of simulated damage on the Dowling Hall footbridge through Bayesian finite element model updating. *Structural Control and Health Monitoring*, 2015, vol. 22 (3), pp. 463–483.
- [13] Miao D.D., Tarazaga P., Castellini P., ed. Special Topics in Structural Dynamics. *Proceedings of the 34th IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics 2016 (Conference Society for Experimental Mechanics Series)*, 2016, vol. 6, 289 p.
- [14] Gèradin M., Rixen D.L. *Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley, 2014, 520 p.
- [15] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Mechanical oscillations theory]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1980, 191 p.
- [16] Pàstor M., Binda M., Harčarik T. Modal Assurance Criterion. *Procedia Engineering*, 2012, vol. 48, pp. 543–548.
- [17] Modak S.V., Kundra T.K., Nakra B.C. Comparative Study of Model Updating Methods Using Simulated Experimental Data. *Computers and Structures*, 2002, vol. 80 (5), pp. 437–447.

Zhulev V.A., post-graduate, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: sensitivity coefficient, FE model verification, modal analysis. e-mail: vlzh92@gmail.com

Kiselev I.A., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. Research interests include: numerical simulation, finite elements method, cutting process dynamic simulation. e-mail: i.a.kiselev@yandex.ru

Pekarev A.A., student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: pekarev123andrey@gmail.com