

## Управление с помощью магнитных моментов ориентацией спутника, движущегося по полярной орбите

© В.М. Морозов, В.И. Каленова

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 119192, Россия

*Рассмотрена задача управления с помощью магнитных моментов ориентацией спутника, движущегося по круговой полярной орбите. В качестве модели геомагнитного поля принят прямой магнитный диполь. Система уравнений движения линейнеаризуется в окрестности положения относительного равновесия. Система уравнений управляемого движения, которая относится к специальному классу линейных нестационарных систем, для которых существует преобразование, приводящее эти системы к стационарным системам большей размерности, указанное в явной форме. На основе приведенной стационарной системы исследована управляемость, построены работоспособные алгоритмы оптимальной стабилизации положения относительного равновесия спутника, для которых управляющее воздействие является функцией переменных стационарной системы более высокого порядка, чем исходная нестационарная система. Для синтеза управления непосредственно в исходной системе введены вспомогательные переменные так, чтобы осуществить переход от вектора состояния приведенной стационарной системы к вектору состояния исходной системы, дополненному вспомогательными переменными. Представлены результаты математического моделирования построенных алгоритмов, подтверждающие эффективность предложенной методики.*

**Ключевые слова:** спутник, ориентация, магнитные системы управления, линейные нестационарные системы, приводимость, управляемость, алгоритмы стабилизации

**Введение.** В системах ориентации спутников во многих случаях используется взаимодействие искусственного спутника Земли (ИСЗ) с гравитационным и магнитным полями Земли. В последнее время магнитные системы ориентации широко применяются в космических исследованиях, особенно для ориентации малых спутников. Различные аспекты управления и определения ориентации спутников с помощью магнитных катушек и магнитометров подробно рассмотрены в работах [1–11] и др. В этих работах авторы столкнулись с существенными трудностями, связанными с тем, что математические модели рассматриваемых задач вследствие периодического изменения геомагнитного поля вдоль орбиты представляют собой нестационарные линейные системы. Это обстоятельство приводит к тому, что вопросы управляемости, как правило, не рассматриваются, а алгоритмы управления строятся на основе усредненных моделей.

В данной статье рассмотрена задача стабилизации с помощью магнитных моментов положения относительного равновесия спутника, центр масс которого движется по круговой полярной орбите. Цель

работы — представить аналитический подход к исследованию этой задачи, основанный на приведении исходной нестационарной системы к стационарной. Факт приводимости эффективно используется при анализе управляемости и построении алгоритмов стабилизации. Эффективность предлагаемого подхода подтверждена результатами моделирования предложенных алгоритмов стабилизации.

**Постановка задачи.** Рассмотрим движение спутника около центра масс в гравитационном поле. Спутник оснащен магнитной системой ориентации. Используются две системы координат:  $OXYZ$  — орбитальная с началом в центре масс спутника (ось  $OZ$  направлена по радиус-вектору центра масс ИСЗ, ось  $OY$  — по нормали к плоскости орбиты, ось  $OX$  дополняет систему до правой тройки);  $Oxyz$  — подвижная, оси которой направлены по главным центральным осям инерции ИСЗ.

Ориентация связанной системы относительно орбитальной задается с помощью углов Эйлера  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Матрица  $[C]$  перехода от системы  $OXYZ$  к системе  $Oxyz$  имеет вид [12]

$$C = [c_{ij}];$$

$$c_{11} = \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3,$$

$$c_{12} = -\sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad c_{13} = \cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3,$$

$$c_{21} = \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, \quad c_{22} = \cos \theta_1 \cos \theta_2,$$

$$c_{23} = \sin \theta_1 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3,$$

$$c_{31} = -\cos \theta_3 \sin \theta_3, \quad c_{32} = \sin \theta_2, \quad c_{33} = \cos \theta_2 \cos \theta_3.$$

Обозначим через  $\bar{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T$  абсолютную угловую скорость вращения спутника в проекциях на оси системы координат  $Oxyz$ . Центр масс ИСЗ движется по круговой орбите. Введем величину орбитальной угловой скорости  $\omega_0$ .

Уравнения движения спутника около центра масс представляются кинематическими и динамическими уравнениями Эйлера [12]. Динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\mathbf{J} \frac{d\omega}{dt} + \omega \times \mathbf{J} \omega = 3\omega_0^2 (\bar{e}_r \times \mathbf{J} \bar{e}_r) + M. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{J}$  — тензор инерции;  $\bar{e}_r$  — единичный вектор оси  $OZ$ ,  $\bar{e}_r = C [0 \quad 0 \quad 1]^T$ . Механический момент  $\bar{M}$  формируется силами взаимодействия магнитных катушек, установленных на спутнике, с магнитным полем Земли [10]:

$$\bar{M} = \bar{m} \times \bar{b}.$$

Здесь  $\bar{m} = [m_1 \ m_2 \ m_3]^T$  — управляющий магнитный дипольный момент спутника;  $\bar{b}_0(\tau)$  — индукция геомагнитного поля в орбитальной системе координат,  $\bar{b}(\tau) = C\bar{b}_0(\tau)$ . Магнитное поле аппроксимируется прямым магнитным диполем в орбитальной системе координат [1, 8, 10]:

$$\bar{b}_0(\tau) = \begin{bmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \\ b_3(\tau) \end{bmatrix} = \frac{\mu_e}{a^3} \begin{bmatrix} \cos \tau \sin I \\ -\cos I \\ 2 \sin \tau \sin I \end{bmatrix},$$

где  $\tau = \omega_0 t$  — безразмерное время;  $\mu_e = 7,812 \cdot 10^{15} \text{ м}^3 \text{ кг} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$  — магнитная постоянная;  $a$  — радиус орбиты;  $I$  — угол наклона плоскости орбиты космического аппарата к плоскости экватора.

Предполагается, что центр масс спутника движется по полярной орбите  $\left(I = \frac{\pi}{2}\right)$ . Тогда  $\bar{b}_0(\tau) = \frac{\mu_e}{a^3} [\cos \tau \ 0 \ 2 \sin \tau]^T$ .

При использовании уравнений движения (1) допускаются стационарные решения, отвечающие положениям относительного равновесия, в которых оси инерции спутника  $Oxuz$  совпадают с осями орбитальной системы координат  $OXYZ$  [12].

При линеаризации уравнений движения (1) в окрестности относительного равновесия, в котором  $\theta_i = 0, \dot{\theta}_i = 0 \ (i = 1, 2, 3)$ , очевидно, что линеаризуется и выражение для механического момента, поэтому можно считать, что  $[C] = [E_3]$  (где  $[E_3]$  — единичная  $(3 \times 3)$ -матрица) и  $\bar{M} = \bar{m} \times \bar{b}_0(\tau)$ .

Тогда линеаризованные уравнения управляемого движения имеют вид

$$\ddot{x}^{(1)} + D_1 \dot{x}^{(1)} + R_1 x^{(1)} = B_1(\tau) u_2; \quad (2)$$

$$\ddot{x}^{(2)} + R_2 x^{(2)} = B_2(\tau) \tilde{u}, \quad (3)$$

где дифференцирование ведется по безразмерному времени  $\tau$ . Здесь также

$$x^{(1)} = [x_1 \ x_3]^T = [\theta_2 \ \theta_1]^T; \quad x^{(2)} = x_2 = \theta_3; \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & -g_1 \\ g_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_3 \end{bmatrix}; \quad R_2 = -\kappa_2, \quad u_2 = m_2; \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_3 \end{bmatrix};$$

$$g = J_2 - J_1 - J_3; \quad g_i = g / J_i \ (i = 1, 3);$$

$$\kappa_1 = 4(J_3 - J_2)/J_1; \quad \kappa_2 = 3(J_3 - J_1)/J_2; \quad \kappa_3 = (J_1 - J_2)/J_3;$$

$$B_1(\tau) = \delta \begin{bmatrix} 2\beta_1 \sin \tau \\ -\beta_3 \cos \tau \end{bmatrix}; \quad B_2(\tau) = \delta [-2\beta_2 \sin \tau \quad \beta_2 \cos \tau];$$

$$\delta = \frac{\mu_e}{a^3 \omega_0^2}; \quad \beta_j = 1/J_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

где  $x_1, x_2, x_3$  — малые углы рассогласования между осями орбитальной и подвижной системами координат;  $J_1, J_2, J_3$  — главные центральные моменты инерции спутника.

Для круговой орбиты  $\omega_0^2 = \frac{\mu}{a^3}$ , где  $\mu = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$  — гравитационный параметр Земли, поэтому параметр  $\delta = \frac{\mu_e}{\mu}$  не зависит от радиуса орбиты.

Представим систему (2)–(3) в виде системы первого порядка

$$\dot{\xi}^{(1)} = A^{(1)}\xi^{(1)} + B^{(1)}(\tau)u_2; \quad (4)$$

$$\dot{\xi}^{(2)} = A^{(2)}\xi^{(2)} + B^{(2)}(\tau)\tilde{u}, \quad (5)$$

$$\text{где } \xi^{(1)} = [x_1 \quad x_3 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_3]^T; \quad A_{4 \times 4}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \kappa_1 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & k_3 & -g_3 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{4 \times 1}^{(1)} = \begin{bmatrix} O_{21} \\ B_1(\tau) \end{bmatrix};$$

$$\xi^{(2)} = [x_2 \quad \dot{x}_2]^T; \quad A_{2 \times 2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{2 \times 2}^{(2)} = \begin{bmatrix} O_{12} \\ B_2(\tau) \end{bmatrix}.$$

Линеаризованные уравнения движения системы можно использовать в форме уравнений (2), (3) [1] или (4) [2, 10]. Уравнения в этих формах будут использованы далее при анализе управляемости и построении алгоритмов стабилизации.

Как известно, решение задачи стабилизации заключается в построении стабилизирующего управления для исходной системы в виде линейной обратной связи, обеспечивающей асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Аналитически построить стабилизирующее управление непосредственно для исходной нестационарной системы затруднительно, поэтому используется следующий способ решения задачи [13–15].

Сначала необходимо перейти от исходной нестационарной системы к стационарной системе, может быть, большей размерности.

Затем провести анализ управляемости стационарной системы. При наличии управляемости построить для стационарной системы оптимальный алгоритм управления на основе квадратичного критерия качества на бесконечном интервале времени, что позволит получить линейную обратную связь с постоянными коэффициентами. После этого осуществить обратный переход к исходным переменным нестационарной системы и получить выражение для закона управления в исходной системе.

Если размерность редуцированной стационарной системы больше размерности исходной нестационарной системы, следует ввести некоторые дополнительные переменные таким образом, чтобы существовала обратная матрица перехода от вектора состояния стационарной системы к вектору той же размерности, содержащему вектор состояния исходной системы и дополнительные переменные.

Описанная методика применялась ранее для решения ряда прикладных задач [13–16].

**Переход к стационарной системе.** Системы (2)–(3) и (4)–(5) относятся к классу линейных нестационарных систем, содержащих управление и допускающих приведение к стационарным системам в расширенном пространстве состояний [13–15].

Введем вектор

$$\bar{f}(\tau) = [\cos \tau \quad \sin \tau]^T. \quad (6)$$

Матрицы  $[B_1]$ ,  $[B_2]$  в системе (2)–(3) могут быть представлены в виде

$$B_1(\tau) = \sum_1^2 B_{i1} f_i(\tau), \quad B_2(\tau) = \sum_1^2 B_{i2} f_i(\tau), \quad (7)$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta_3 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 2\beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = [0 \quad \beta_2], \quad B_{22} = [-2\beta_2 \quad 0].$$

Вектор  $\bar{f}^T$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\bar{f}}(\tau) = S\bar{f}(\tau), \quad (8)$$

где  $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Выполним приведение системы (2)–(3). Введем следующие замены переменных [13–15]:

$$x^{(1)} = F_1^T(\tau)y^{(1)}, \quad F_1^T(\tau) = f^T(\tau) \otimes E_2, \quad y^{(1)}(4 \times 1); \quad (9)$$

(2×4)

$$x^{(2)} = F_2^T(\tau)y^{(2)}, \quad F_2^T(\tau) = f^T(\tau), \quad y^{(2)}(2 \times 1). \quad (10)$$

Здесь  $[E_2]$  — единичная  $(2 \times 2)$ -матрица. Символ  $\otimes$  означает кронекеровское произведение матриц. Напомним, что кронекеровским произведением матриц  $\Phi_{k \times l} = (\varphi_{ij})_{i=1, k}^{j=\bar{l}}$  и  $\Psi_{k' \times l'} = (\psi_{ij})_{i=1, k'}^{j=\bar{l}'}$  называется блочная матрица размерности  $kk' \times ll'$ , определяемая по формуле  $\Phi_{k \times l} \otimes \Psi_{k' \times l'} = (\varphi_{ij} \psi_{i'j'})_{i=1, k}^{j=\bar{l}, l} [17]$ . Матрицы  $[B_i(\tau)]$  представляются в виде  $B_i(\tau) = F_i^T(\tau)Q_i$  ( $i=1, 2$ ). Тогда преобразование (9), (10) приводит нестационарную систему (2)–(3) к стационарной системе

$$\dot{y}^{(1)} + G_1 y^{(1)} + N_1 y^{(1)} = Q_1 u_2; \quad (11)$$

$$\ddot{y}^{(2)} + D_2 \dot{y}^{(2)} + N_2 y^{(2)} = Q_2 \tilde{u}, \quad (12)$$

где  $G_1 = 2(S^T \otimes E_2) + E_2 \otimes D_1$ ;  $N_1 = E_2 \otimes R_1 + S^T \otimes D_1 + (S^T)^2 \otimes E_2$ ;

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta_3 \\ 2\beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D_2 = 2S^T; \quad N_2 = -(\kappa_2 + 1)E_2; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 \\ -2\beta_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Стационарная система (11)–(12) состоит из двух независимых подсистем относительно переменных  $y^{(1)}$  и  $y^{(2)}$ . Подсистема (11) содержит только компоненту управления  $u_2$ , а в подсистему (12) входят компоненты  $u_1, u_3$ .

Выполним приведение системы (4)–(5). Преобразование [13]

$$\xi^{(1)} = \Phi_1^T(\tau) \eta^{(1)}, \quad \xi^{(2)} = \Phi_2^T(\tau) \eta^{(2)}, \quad (13)$$

$$\Phi_1^T(\tau) = [cE_4 \quad sE_4], \quad \Phi_2^T(\tau) = [cE_2 \quad sE_2]$$

приводит систему (4)–(5) к стационарной системе

$$\dot{\eta}^{(1)} = G^{(1)} \eta^{(1)} + C^{(1)} u_2; \quad (14)$$

$$\dot{\eta}^{(2)} = G^{(2)} \eta^{(1)} + C^{(2)} \tilde{u}, \quad (15)$$

$$\text{где } G^{(1)} = E_2 \otimes A^{(1)} - S^T \otimes E_4 = \begin{bmatrix} A^{(1)} & -E_4 \\ E_4 & A^{(1)} \end{bmatrix}; \quad C^{(1)} = \begin{matrix} (8 \times 1) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= [0 \ 0 \ 0 \ -\beta_3 \ 0 \ 0 \ 2\beta_1 \ 0]^T; \quad G^{(2)} = E_2 \otimes A^{(2)} - S^T \otimes E_2 = \begin{bmatrix} A^{(2)} & -E_2 \\ E_2 & A^{(2)} \end{bmatrix};$$

$$C^{(2)} = \begin{matrix} (4 \times 2) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\beta_2 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \quad B^{(j)}(\tau) = \Phi_j^T(\tau) C^{(j)}.$$

*Замечание.* Представив систему (11)–(12) в виде системы 1-го порядка, нетрудно показать, что ее переменные будут связаны с переменными системы (14)–(15) невырожденным преобразованием с постоянными коэффициентами.

**Управляемость.** Этот параметр в данной задаче можно исследовать, исходя из анализа нестационарной системы (2)–(3) (или (4)–(5)) либо анализируя стационарную систему (11)–(12) (или (14)–(15)). Если стационарная система управляема, то исходная нестационарная система также управляема. Однако неуправляемость стационарной системы может и не повлечь неуправляемость исходной нестационарной системы, поскольку стационарные системы являются избыточными по отношению к исходным переменным.

Рассмотрим управляемость стационарной системы (11)–(12). Подсистемы (11) и (12) полностью независимы, поэтому управляемость каждой из них можно исследовать отдельно. Необходимым и достаточным условием управляемости системы (12) является условие [18]:

$$\text{rank } U_2 = 2 \quad \text{для } \forall \lambda, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 & 2\lambda & 0 & \beta_2 \\ -2\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_2 & -2\beta_2 & 0 \end{bmatrix},$$

которое выполнено, так как  $\det \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 \\ -2\beta_2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ .

Необходимым и достаточным условием управляемости системы (11) является условие

$$\text{rank } U_1 = 4 \quad \forall \lambda, \quad U_1 = \begin{bmatrix} \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -g_1\lambda & 2\lambda & -g_1 & 0 \\ g_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & g_3 & 2\lambda & -\beta_3 \\ -2\lambda & g_1 & \lambda^2 - \bar{\kappa}_1 & -g_1\lambda & 2\beta_1 \\ -g_3 & -2\lambda & g_3\lambda & \lambda^2 - \bar{\kappa}_3 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\bar{\kappa}_i = \kappa_i + 1$  ( $i = 1, 3$ ).

Можно показать, что это условие нарушается только при  $\lambda = 0$ , что имеет место, если  $J_2 = J_3$  либо  $J_2 = J_3 + J_1$  ( $g = 0$ ). В этих случа-

ях в подсистеме (11) существуют линейные интегралы, не зависящие от управления:

$$\text{при } J_2 = J_3 \quad \gamma \dot{y}_1^{(1)} + (\gamma - 2)y_2^{(1)} + \gamma y_3^{(1)} + \dot{y}_4^{(1)} = \text{const} \quad \left( \gamma = \frac{J_1}{J_3} \right);$$

$$\text{при } J_2 = J_1 + J_3 \quad 2y_2^{(1)} - \dot{y}_4^{(1)} = \text{const}.$$

Наличие этих интегралов свидетельствует о неуправляемости стационарной системы (11) [13].

Исследуем управляемость нестационарной системы (4). Ее удобно исследовать, приведя к системе

$$\dot{z} = A_{11}z + d(\tau)u_2. \quad (16)$$

$$\text{Здесь } A_{11}^{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g_3 & \kappa_3 & 0 \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}; \quad d(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\beta_1 s \\ 0 \\ -\beta_3 c \end{bmatrix}.$$

Переменные  $\xi_i^{(1)}$  и  $z_i$  связаны соотношениями:  $\xi_1^{(1)} = z_1$ ,  $\xi_2^{(1)} = z_3$ ,  $\xi_3^{(1)} = z_2$ ,  $\xi_4^{(1)} = z_4$ .

Согласно критерию [13], исследование управляемости сводится к проверке условия  $\text{rank} U_4(\tau) = 4$  для некоторого  $\tau_*$ , где матрица  $[U_4]$  имеет вид

$$U_4(\tau) = [L_1(\tau) \quad \dots \quad L_4(\tau)], \quad L_1(\tau) = d(\tau), \quad L_k(\tau) = A_{11}(\tau)L_{k-1}(\tau) - \dot{L}_{k-1}(\tau) \quad (k = 2, 3, 4);$$

$$\det U_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2\beta_1 s & \varphi_1 c & \psi_1 s \\ 2\beta_1 s & -\alpha_2 c & \varphi_2 s & \psi_2 c \\ 0 & -\beta_3 c & \varphi_3 s & \psi_3 c \\ -\beta_3 c & -\alpha_4 s & \varphi_4 c & \psi_4 s \end{vmatrix}.$$

Здесь  $s = \sin \tau$ ;  $c = \cos \tau$ ;  $\alpha_2 = \frac{g + 2J_3}{J_1 J_3}$ ;  $\alpha_4 = \frac{2g + J_1}{J_1 J_3}$ ;  $\varphi_1 = -(\alpha_2 + 2\beta_1)$ ;

$\varphi_2 = 2\beta_1 \kappa_1 - \alpha_4 g_1 - \alpha_2$ ;  $\varphi_3 = -(\alpha_4 + \beta_3)$ ;  $\varphi_4 = -\beta_3 \kappa_3 + \alpha_2 g_3 + \alpha_4$ ;  $\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ ;  $\psi_2 = \kappa_1 \varphi_1 - \varphi_2 + g_1 \varphi_4$ ;  $\psi_3 = \varphi_4 - \varphi_3$ ;  $\psi_4 = \kappa_3 \varphi_3 + \varphi_4 - g_3 \varphi_2$ .

Определитель матрицы  $[U_4]$  можно представить в виде

$$\det U_4 = M_1 \sin^4 \tau + M_2 \sin^2 \tau \cos^2 \tau + M_3 \cos^4 \tau,$$

где  $M_1 = -2\beta_1 \varphi_3 (2\beta_1 \psi_4 + \alpha_4 \psi_1)$ ;  $M_3 = \beta_3 \varphi_1 (\beta_3 \psi_2 - \alpha_2 \psi_3)$ .



Выражение для  $M_2$  громоздкое, поэтому здесь не приводится. Условие неуправляемости системы (16) заключается в том, что  $\det U_4(\tau) \equiv 0$  для любого значения  $\tau$ . Это условие выполнено тогда и только тогда, когда все коэффициенты  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) равны нулю. Одновременное выполнение условий  $M_1 = 0$  и  $M_3 = 0$  невозможно, поэтому нет необходимости рассматривать условие  $M_2 = 0$ . Это означает, что система (16) управляема, в том числе и при условиях неуправляемости соответствующей стационарной подсистемы (11) (или (14)):

$$J_2 = J_3, \quad J_2 = J_1 + J_3.$$

**Алгоритм стабилизирующего управления.** Стабилизирующее управление для исходной нестационарной системы (2) – (3) (или (4)) можно строить на основе приведенных стационарных систем (11)–(12) (или (14)–(15) соответственно).

Рассмотрим алгоритм стабилизации, построенный на основании стационарной системы (14) – (15). Эта система расщепляется на две независимые подсистемы: первая — относительно переменных  $\eta_i^{(1)}$  ( $i = 1, \dots, 8$ ), в которую входит только управление  $u_2$ , вторая — относительно  $\eta_j^{(2)}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ), куда входят управления  $u_1, u_3$ .

Из формул для замены переменных (13) следует

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1^{(1)} = \eta_1^{(1)}c + \eta_5^{(1)}s, & x_3 &= \xi_2^{(1)} = \eta_2^{(1)}c + \eta_6^{(1)}s, \\ \dot{x}_1 &= \xi_3^{(1)} = \eta_3^{(1)}c + \eta_7^{(1)}s, & \dot{x}_3 &= \xi_4^{(1)} = \eta_4^{(1)}c + \eta_8^{(1)}s, \\ x_2 &= \xi_1^{(2)} = \eta_1^{(2)}c + \eta_3^{(2)}s, & \dot{x}_2 &= \xi_2^{(2)} = \eta_2^{(2)}c + \eta_4^{(2)}s \end{aligned} \quad (17)$$

т. е. все компоненты исходного вектора состояния  $\bar{x}$  ( $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ ) выражаются через величины  $\eta_i^{(1)}(\tau)$  ( $i = 1, \dots, 8$ ),  $\eta_j^{(2)}(\tau)$  ( $j = 1, \dots, 4$ ).

Алгоритм стабилизации строится независимо для двух стационарных подсистем (14) (8-го порядка) и (15) (4-го порядка), которые являются управляемыми. Стабилизирующее управление имеет вид  $u^{(1)} = u_2 = -K_\eta^{(1)}\eta^{(1)}$ ,  $u^{(2)} = \tilde{u} = -K_\eta^{(2)}\eta^{(2)}$  ( $K_\eta^{(1)} = \text{const}$ ,  $K_\eta^{(2)} = \text{const}$ ). При этом соответствующие замкнутые системы будут асимптотически устойчивыми. Матрицы коэффициентов управления  $[K_\eta^{(1)}](1 \times 8)$ ,  $[K_\eta^{(2)}](2 \times 4)$  можно выбрать из условия минимума квадратичных функционалов

$$J_j = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ \eta^{(j)T}(\tau) \Theta^{(j)} \eta^{(j)}(\tau) + u^{(j)T}(\tau) \Gamma^{(j)} u^{(j)}(\tau) \right] d\tau \quad (j = 1, 2),$$

где  $[\Theta^{(j)}]$ ,  $[\Gamma^{(j)}]$  — положительно определенные постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Оптимальное управление имеет вид [13]:

$$u^{(j)}(\tau) = -K_{\eta}^{(j)} \eta^{(j)}(\tau), \quad K_{\eta}^{(j)} = -\Gamma^{(j)-1} C_{\eta}^{(j)} L^{(j)}. \quad (18)$$

Матрицы  $[L^{(j)}]$  являются положительно определенными решениями матричных алгебраических уравнений Риккати:

$$L^{(j)} G_{\eta}^{(j)} + G_{\eta}^{(j)T} L^{(j)} - L^{(j)} C_{\eta}^{(j)} \Gamma^{(j)-1} C_{\eta}^{(j)T} L^{(j)} + \Theta^{(j)} = 0.$$

Синтезированное на основе расширенной стационарной системы управляющее воздействие является функцией переменных у стационарной системы более высокого порядка, чем исходная нестационарная система.

Для введения управления непосредственно в исходную систему (4)–(5) следует выразить векторы  $\eta^{(j)}$  через векторы той же размерности, которые содержат векторы состояния  $\xi^{(1)}$ ,  $\xi^{(2)}$  исходной системы (4)–(5).

Введем векторы

$$\tilde{\xi}_{(8 \times 1)}^{(1)} = \left[ \xi^{(1)T} \quad \xi_{д}^{(1)T} \right]^T, \quad \tilde{\xi}_{(4 \times 1)}^{(2)} = \left[ \xi^{(2)T} \quad \xi_{д}^{(2)T} \right]^T,$$

где  $\xi_{д}^{(j)} = P_j^T(\tau) \eta^{(j)}$  — дополнительные векторы;  $P_1^T(\tau) = \Phi_1^T(\tau) (S^T \otimes E_4)$ ,  $P_2^T(\tau) = \Phi_2^T(\tau) (S^T \otimes E_2)$ . При этом матрицы преобразования  $[T_j]$  имеют вид

$$T_1(\tau) = \begin{bmatrix} \Phi_1^T(\tau) \\ P_1^T(\tau) \end{bmatrix}, \quad T_2(\tau) = \begin{bmatrix} \Phi_2^T(\tau) \\ P_2^T(\tau) \end{bmatrix},$$

$$P_1^T(\tau) = \begin{bmatrix} -s\tau E_4 & c\tau E_4 \end{bmatrix}_{(4 \times 8)}, \quad T_1^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} c\tau E_4 & -s\tau E_4 \\ s\tau E_4 & c\tau E_4 \end{bmatrix},$$

$$P_2^T(\tau) = \begin{bmatrix} -s\tau E_2 & c\tau E_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}, \quad T_2^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & -s\tau E_2 \\ s\tau E_2 & c\tau E_2 \end{bmatrix}.$$

Введенные векторы  $\tilde{\xi}^{(j)}$  и векторы состояния стационарной системы  $\eta^{(j)}$  связаны невырожденным преобразованием

$$\tilde{\xi}^{(j)} = T_j(\tau)\eta^{(j)}, \quad \eta^{(j)} = T_j^{-1}(\tau)\tilde{\xi}^{(j)}. \quad (19)$$

Уравнения для дополнительных векторов  $\xi_{\text{д}}^{(j)}$  имеют вид

$$\dot{\xi}_{\text{д}}^{(j)} = A^{(j)}\xi_{\text{д}}^{(j)} + B_{\text{д}}^{(j)}(\tau)u^{(j)}, \quad B_{\text{д}}^{(j)}(\tau) = P_j^T(\tau)C^{(j)}.$$

Тогда уравнения для векторов  $\tilde{\xi}^{(j)}$  можно записать так:

$$\dot{\tilde{\xi}}^{(j)} = \tilde{A}_{\xi}^{(j)}\tilde{\xi}^{(j)} + \tilde{B}_{\xi}^{(j)}(\tau)u^{(j)}, \quad \tilde{A}_{\xi}^{(j)} = \text{diag}(A^{(j)} \quad A^{(j)}), \quad \tilde{B}_{\xi} = \begin{bmatrix} B^{(j)}(\tau) \\ B_{\text{д}}^{(j)}(\tau) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Нестационарные системы (20) включают в себя исходные системы (4), (5). Управления (18), построенные для стационарных систем (14), (15), вводятся в системы (20) с помощью выражений (19).

Замкнутые указанным управлением системы имеют вид

$$\dot{\tilde{\xi}}^{(j)} = \left( \tilde{A}_{\xi}^{(j)} - \tilde{B}_{\xi}^{(j)}(\tau)K_{\eta}^j T_j^{-1}(\tau) \right) \tilde{\xi}^{(j)}. \quad (21)$$

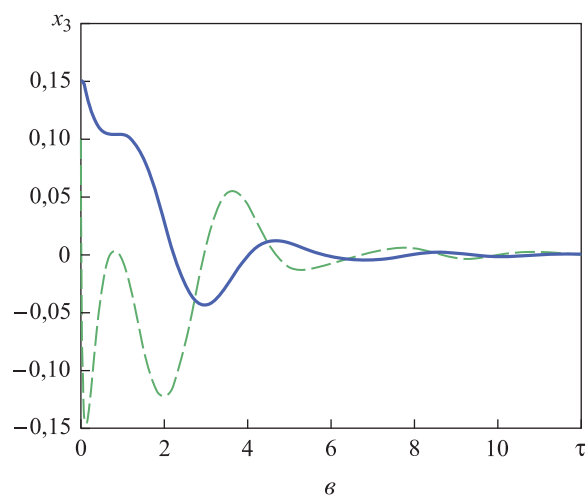
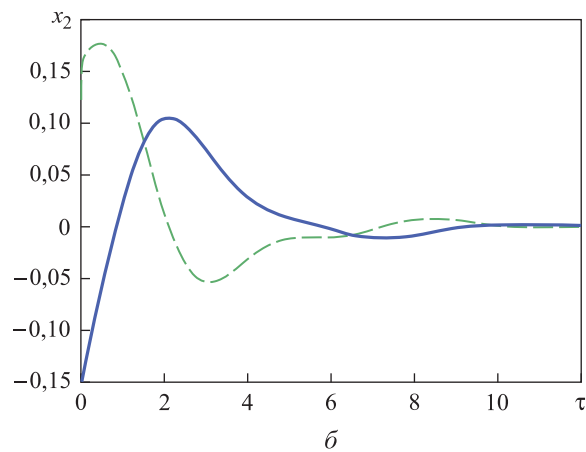
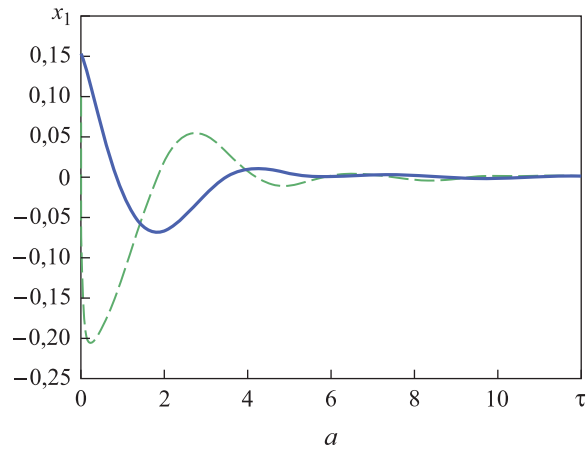
Решения системы (21), включающие в себя компоненты исходного вектора  $\xi$ , стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$  в силу выбора матриц  $\left[ K_{\eta}^j \right]$ , так как компоненты векторов  $\tilde{\xi}^{(j)}$  связаны с компонентами векторов  $\eta^{(j)}$  ограниченным преобразованием (19).

*Замечание.* В тех случаях, когда стационарная система неуправляема (выполнены условия  $J_2 = J_3$  или  $J_2 = J_1 + J_3$ ), следует перейти к управляемой подсистеме, построить управление в этой редуцированной системе, а затем, как это сделано выше, вернуться к исходным переменным.

**Моделирование алгоритмов управления.** Моделирование проводилось в пакете MATLAB 7.1. Коэффициенты вычислялись с использованием стандартной программы LQR для стационарных систем 4-го и 8-го порядка. Характеристики квадратичного функционала  $\left[ \Theta^{(j)} \right]$  и  $\left[ \Gamma^{(j)} \right]$ :  $\Theta^{(1)} = \gamma E_8$ ,  $\Theta^{(2)} = \gamma E_4$ ,  $\Gamma^{(1)} = \beta$ ,  $\Gamma^{(2)} = \beta E_2$  ( $\gamma = 1, 0$ ,  $\beta = 0, 0001$ ). Параметры ИСЗ:  $J_1 = 3, 6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2 = 5, 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_3 = 2, 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  (устойчивое положение относительного равновесия [10]). Угол наклона орбиты  $I = \pi / 2$ . На рисунке представлено поведение переменных  $x_i$ ,  $dx_i/d\tau$  ( $i = 1, 2, 3$ ) с течением времени. Начальные отклонения по углам  $x_i = 0, 15$ , по скоростям  $dx_i/d\tau = 0, 1$ .

В случае когда имеет место неустойчивость положения относительного равновесия ( $J_1 = 3, 6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2 = 2, 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_3 = 5, 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ) [10],

графики поведения всех переменных практически не отличаются от приведенных выше. Для значений моментов инерции  $J_1 = 1,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2 = 1,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_3 = 1,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  графики аналогичны.



Поведение переменных  $x_1, dx_1/d\tau$  (а),  $x_2, dx_2/d\tau$  (б),  $x_3, dx_3/d\tau$  (в)

Изменение значений моментов инерции на 10 % и изменение угла наклона орбиты в пределах  $18^\circ \leq I \leq 72^\circ$  не влияют на качество работы алгоритма.

Аналогичные графики получены при моделировании для движения ИСЗ с параметрами  $J_1 = 8,7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2 = 10,0 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_3 = 6,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  [3]. Изменение значений  $\gamma$ ,  $\beta$  слабо влияет на характер переходных процессов. По результатам моделирования можно заключить, что предложенная методика построения алгоритмов управления эффективна.

**Заключение.** Проведено строгое аналитическое исследование задачи стабилизации с помощью магнитных моментов положения относительного равновесия спутника, центр масс которого движется по круговой полярной орбите. Это исследование основано на приведении исходной нестационарной системы к стационарной системе большей размерности при последующем анализе и построении оптимального стабилизирующего управления. В ходе математического моделирования построенных алгоритмов подтверждена эффективность предложенного подхода. Результаты работы могут быть использованы при разработке алгоритмов управления для космических аппаратов различного назначения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Psiaki M.L. Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, vol. 24, no. 2, pp. 386–304.
- [2] Lovera M., Astolfi A. Global magnetic attitude control of spacecraft in the presence of gravity gradient. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, vol. 42, no. 3, pp. 796–805.
- [3] Lovera M., Astolfi A. Spacecraft attitude control using magnetic actuators. *ELSEVIER, Automatica*, 2004, vol. 40, iss. 8, pp. 1405–1414.
- [4] Silani E., Lovera M. Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results. *Control Engineering Practice*, 2005, vol. 13, no. 3, pp. 357–371.
- [5] Giulietti F., Quarta A.A., Tortora P. Optimal control laws for momentum-wheel desaturation using magnetorquers. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2006, vol. 29, no. 6, pp. 1464–1468.
- [6] Cubas J., Farrahi A., Pindado S. Magnetic attitude control for satellites in polar or sun-synchronous orbits. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2015, vol. 38, no. 10, pp. 1947–1958.
- [7] De Angelis E., Giulietti F., de Ruiter A.H.J., Avanzini G. Spacecraft attitude control using magnetic and mechanical actuation. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2016, vol. 39, no. 3, pp. 564–573.
- [8] Yaguang Yang. Controllability of spacecraft using only magnetic torques. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 955–962.
- [9] Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Ivanov D.S., Penkov V.I. Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame. *Acta Astronautica*, 2015, vol. 116, pp. 74–77.

- [10] Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Иванов Д.С. *Магнитные системы ориентации малых спутников*. Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, 366 с.
- [11] Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Yu., Penkov V.I., Ovchinnikov A.V. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties. *Acta Astronautica*, 2016, vol. 132, pp. 103–110.
- [12] Белецкий В.В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1975, 308 с.
- [13] Каленова В.И., Морозов В.М. *Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2010, 208 с.
- [14] Каленова В.И., Морозов В.М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением. *Прикладная математика и механика*, 2012, т. 76, вып. 4, с. 576–588.
- [15] Каленова В.И., Морозов В.М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2013, № 3, с. 6–15.
- [16] Morozov V.M., Kalenova V.I. Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, pp. 020–003.
- [17] Беллман Р. *Введение в теорию матриц*. Москва, Наука, 1969, 368 с.
- [18] Laub A.J., Arnold W.F. Controllability and observability criteria for multivariable linear second order models. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1984, vol. AC-29, no. 2, pp. 163–165.

Статья поступила в редакцию 08.05.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Морозов В.М., Каленова В.И. Управление с помощью магнитных моментов ориентацией спутника, движущегося по полярной орбите. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 9. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-9-1798>

**Морозов Виктор Михайлович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова.  
e-mail: moroz@imec.msu.ru

**Каленова Вера Ильинична** — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова. e-mail: kalen@imec.msu.ru

## **Controlling the orientation of a polar-orbiting satellite by means of magnetic moments**

© V.M. Morozov, V.I. Kalenova

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, 119192, Russia

*The article considers the problem of controlling the orientation of a polar-orbiting satellite in a circular orbit by means of magnetic moments. A direct magnetic dipole has been adopted as a model of the geomagnetic field. The system of equations of motion is linearized in a neighborhood of the relative equilibrium position. A system of equations of controlled motion belonging to a special class of linear nonstationary systems, for which there exists a transformation leading these systems to stationary systems of higher dimension, is explicitly indicated. On the basis of the given stationary system, controllability is investigated; efficient algorithms for optimal stabilization of the satellite relative equilibrium position are constructed. For these algorithms the control action is a function of the stationary system variables of a higher order than the initial nonstationary system. To synthesize control directly in the initial system, auxiliary variables are introduced, so as to make the transition from the state vector of the reduced stationary system to the state vector of the initial system, supplemented by auxiliary variables. The results of mathematical simulation of the constructed algorithms confirming the effectiveness of the proposed methodology are presented.*

**Keywords:** *satellite, orientation, magnetic control systems, linear non-stationary systems, reducibility, controllability, stabilization algorithms*

### REFERENCES

- [1] Psiaki M.L. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, vol. 24, no. 2, pp. 386–304.
- [2] Lovera M., Astolfi A. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, vol. 42, no. 3, pp. 796–805.
- [3] Lovera M., Astolfi A. *ELSEVIER, Automatica*, 2004, vol. 40, no. 8, pp. 1405–1414.
- [4] Silani E., Lovera M. *Control Engineering Practice*, 2005, vol. 13, no. 3, pp. 357–371.
- [5] Giulietti F., Quarta A.A., Tortora P. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, vol. 29, no. 6, pp. 1464–1468.
- [6] Cubas J., Farrahi A., Pindado S. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, vol. 38, no. 10, pp. 1947–1958.
- [7] De Angelis E., Giulietti F., de Ruiter A.H.J., Avanzini G. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, vol. 39, no. 3, pp. 564–573.
- [8] Yaguang Yang. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 955–962.
- [9] Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Ivanov D.S., Penkov V.I. *Acta Astronautica*, 2015, vol. 116, pp. 74–77.
- [10] Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Roldugin D.S., Ivanov D.S. *Magnitnye sistemy orientatsii malykh sputnikov* [Magnetic systems for small satellite orientation]. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics Publ., 2016, 366 p.
- [11] Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Yu., Penkov V.I., Ovchinnikov A.V. *Acta Astronautica*, 2016, vol. 132, pp. 103–110.

- [12] Beletsky V.V. *Dvizhenie sputnika otnositelno tsentra mass v gravitatsionnom pole* [The satellite motion relative to the center of mass in the gravitational field]. Moscow, MSU Publ., 1975, 308 p.
- [13] Kalenova V.I., Morozov V.M. *Lineynye nestatsionarnye sistemy i ikh prilozheniya k zadacham mekhaniki* [Linear nonstationary systems and their applications to problems of mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 208 p.
- [14] Kalenova V.I., Morozov V.M. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 576–588.
- [15] Kalenova V.I., Morozov V.M. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, no 3, pp. 6–15.
- [16] Morozov V.M., Kalenova V.I. Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, pp. 020–003.
- [17] Bellman R. *Introduction to matrix analysis*. NY, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, Inc. Publ., 1960, 348 p. [In Russ.: Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrix*. Moscow, Nauka Publ., 1969, 368 p.].
- [18] Laub A.J., Arnold W.F. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1984, vol. AC-29, no. 2, pp. 163–165.

**Morozov V.M.**, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Senior Research Fellow, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University. e-mail: moroz@imec.msu.ru

**Kalenova V.I.**, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Leading Research Fellow, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University. e-mail: kalen@imec.msu.ru