УДК 539.3 DOI: 10.18698/2308-6033-2018-8-1794

Математическая модель расчета продольно-гофрированной конической оболочки, подкрепленной шпангоутами

© А.А. Дудченко, В.Н. Сергеев

МАИ, Москва, 125993, Россия

В основу исследования напряженно-деформированного состояния тонкой оболочки положена математическая модель, в соответствии с которой продольно-гофрированную оболочку можно интерпретировать как непрерывный набор стрингеров, ориентированных по образующим конической поверхности. Стрингеры связаны между собой только в продольном направлении, и каждый из них работает лишь на растяжение-сжатие и изгиб в плоскости осевого сечения оболочки вращения. Коническая оболочка, подкрепленная дискретным набором шпангоутов, представляет собой дискретно-континуальную систему и рассматривается с помощью аппарата обобщенных функций. Полученные авторами статьи интегродифференциальные уравнения равновесия конической оболочки в обобщенных перемещениях представляют интерес для специалистов, занимающихся расчетами тонкостенных конструкций.

Ключевые слова: *математическая модель, коническая оболочка, дискретный набор шпангоутов, аппарат обобщенных функций*

Введение. В данной работе рассматривается математическая модель дискретно подкрепленной конической оболочки. Дискретность подкрепляющего набора предлагается учитывать, фиксируя переменную жесткость системы с помощью дельта-функции Дирака [1–7]. Такой подход позволяет избежать «склейки». Задача исследования сводится к уравнениям с коэффициентами, содержащими особенности дельта-функции.

Общий метод построения решения уравнений с коэффициентами, содержащими особенности типа дельта-функции и их производных, представлен в работах [8–10]. Данный метод может быть использован в качестве основы исследования всевозможных объектов, сочетающих непрерывные элементы с дискретными.

Расчетная модель. Основные допущения. Вместо гофрированной оболочки из однородного изотропного материала рассматривается гладкая коническая оболочка вращения из эквивалентного однородного ортотропного материала. Соотношения упругости для оболочки с «размазанным» гофром имеют вид в форме [11–13]:

$$N_{11}^{\text{об}} = \frac{Eh}{1-\mu^{*2}} k_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{\mu}{k_1 k_2} \varepsilon_2 \right), \; N_{22}^{\text{об}} = \frac{Eh}{1-\mu^{*2}} \frac{1}{k_2} \left(\mu \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right), \; N_{12}^{\text{об}} = \frac{Gh}{k_1} \gamma_{12}, \quad (1)$$

$$M_{11}^{\text{об}} = D\frac{1-\mu^2}{1-\mu^{*2}}k_2\left(\chi_1 + \frac{\mu}{k_1 k_2}\chi_2\right), \quad M_{22}^{\text{об}} = D\frac{1-\mu^2}{1-\mu^{*2}}\frac{1}{k_1}(\mu\chi_1 + \chi_2), \tag{1}$$

$$M_{21}^{\text{об}} = M_{21}^{\text{об}} = \frac{D(1-\mu)}{k_3}\chi_{12}.$$

Здесь

$$k_1 = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{dy}{\cos\theta};\ k_2 = \frac{12}{h^2 l}\int_0^l \frac{z^2 dy}{\cos\theta} + \frac{1}{l}\int_0^l \cos^2\theta dy;\ k_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{l}\int_0^l \cos\theta\, dy\right), \tag{2}$$

где k_1, k_2, k_3 — безразмерные коэффициенты гофра; D — цилиндрическая жесткость, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; E, G, μ, h — физические константы материала и толщина гофрированной оболочки соответственно; $\mu^{*2} = \mu^2 / (k_1 k_2)$.

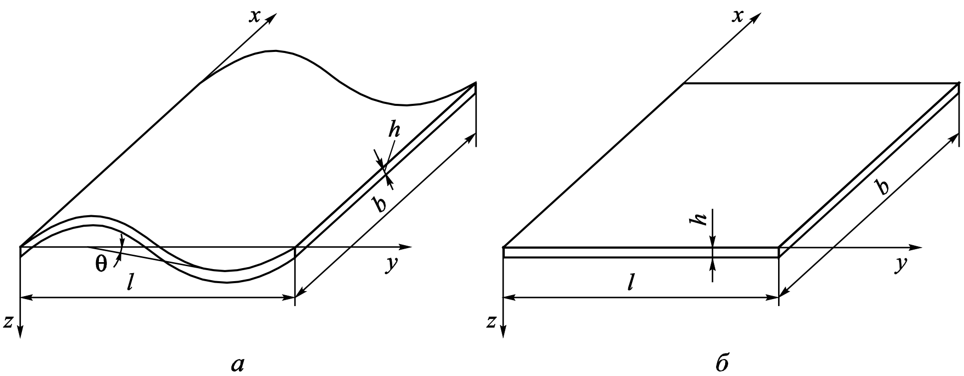

Рис. 1. Гофрированная (*а*) и гладкая (*б*) панели

Однородному ортотропному материалу гладкой конической оболочки вращения, эквивалентной гофрированной оболочке, свойственна сильная анизотропия. Безразмерные коэффициенты (2) любого гофра, как правило, удовлетворяют условию $k_2 \gg k_1, k_3$. Расчеты показывают, что обычно $k_1 \approx k_3 \approx 1\ldots3$, $k_2 / k_1 \geq 10^2 ... 10^3$.

Из формул (1) следует, что $N_{11}^{\text{об}}, N_{12}^{\text{об}} \gg N_{22}^{\text{об}}$, $M_{11}^{\text{об}} \gg M_{22}^{\text{об}}, M_{12}^{\text{об}}$, поэтому будем использовать вместо (1) упрощенные соотношения упругости эквивалентной ортотропной оболочки:

$$N_{11}^{\text{об}} = k_1 E h \varepsilon_1,\ N_{22}^{\text{об}} = 0,\ N_{12}^{\text{об}} = \frac{1}{k_1} G h \gamma_{12}; \tag{3}$$

$$M_{11}^{\text{об}} = k_2 \frac{Eh}{12}\chi_1, \quad M_{22}^{\text{об}} = 0, \quad M_{12}^{\text{об}} = M_{21}^{\text{об}} = 0. \tag{3}$$

Соотношения упругости (3) соответствуют расчетной модели, в которой гофрированную оболочку можно интерпретировать как непрерывный набор стрингеров, ориентированных по образующим конической поверхности, причем стрингеры связаны между собой только в продольном направлении и каждый из них работает лишь на растяжение-сжатие и изгиб в плоскости осевого сечения оболочки вращения. Применимость подобной модели гофрированной оболочки показана, например, в работе [13].

Запишем уравнения равновесия гофрированной конической оболочки, отбрасывая нелинейные члены в системе нелинейных уравнений равновесия (см. (69) [14]):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[N_1 B\right] + A\frac{\partial}{\partial\beta}S_2 - N_2\left(A\sin\gamma - \cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + p_1 AB + p_3 B\frac{\partial w}{\partial\alpha} = 0;\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[S_1 B\right] + A\frac{\partial}{\partial\beta}N_2 + A\sin\gamma\, S_2^R + S_2^S\left(A\sin\gamma - \cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) -\\
- Q_2 AB\left(\frac{\cos\gamma}{B} - \chi_2\right) + p_2 AB\left(1+\varepsilon_2\right) + p_3 A\left(\frac{\partial w}{\partial\beta} + \cos\gamma\,\vartheta\right) = 0;\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[Q_1 B\left(1+\varepsilon_2\right)\right] + A\frac{\partial}{\partial\beta}Q_2 - N_1 AB\chi_1 + N_2 A\left(\cos\gamma - B\chi_2\right) -\\
-\left(S_1 + S_2\right)AB\tau_\beta + p_3 AB\left(1+\varepsilon_2\right) - p_1 B\frac{\partial w}{\partial\alpha} - p_2 A\left(\frac{\partial w}{\partial\beta} + \cos\gamma\,\vartheta\right) = 0;\\
A\frac{\partial}{\partial\beta}M_2 + H_2\left(A\sin\gamma - \cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) - M_3 AB\tau_\beta - Q_2 AB\left(1+\varepsilon_2\right) = 0;\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[M_1 B\left(1+\varepsilon_2\right)\right] + A\frac{\partial}{\partial\beta}H_2 - M_3 A\left(\cos\gamma - B\chi_2\right) - M_2\left(A\sin\gamma - \cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) -\\
- Q_1 AB\left(1+\varepsilon_2\right) = 0;\\
\left(M_2 - M_1\right)AB\tau_\beta + H_2 A\left(\cos\gamma - B\chi_2\right) + A\frac{\partial}{\partial\beta}M_3 - \left(S_2 - S_1\right)AB\left(1+\varepsilon_1\right) = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь N_1, S_1, S_2, Q_1, M_1 — силовые факторы в собственно оболочке; $N_2, S_2, Q_2, M_2, M_3, H_2$ — силовые факторы в собственно шпангоуте.

Обобщенные силовые факторы в оболочке при переходе через шпангоут $(\alpha = \alpha_j - 0, \quad \alpha = \alpha_j + 0)$ имеют особенности: N_1, S_1, S_2, Q_1, M_1 — конечные скачки; $N_2, S_2, Q_2, M_2, M_3, H_2$ — особенности типа дельта-функции.

Система дифференциальных уравнений равновесия подкрепленной шпангоутом оболочки. При построении уравнений равновесия в перемещениях из уравнений равновесия (4) следует исключить неизвестные силовые факторы, для которых согласно гипотезе Кирхгофа — Лява — Клебша соотношения упругости отсутствуют. Из выражения (1) [14] и соотношений упругости для конической оболочки (3) и шпангоута (см. (80)–(82) [14]) соотношения упругости существуют лишь для $N_1, N_2, S_1, M_1, M_2, M_3, H_1$, в то время как S_2, Q_1, Q_2 могут быть найдены из уравнений равновесия и поэтому подлежат исключению из последних. Промежуточное положение в этом отношении занимает момент H_2 (см. (1) и (83) [14], а также (3)), поскольку этот момент зависит от перерезывающих сил в поперечном сечении шпангоута, если последний прикреплен к эквивалентной оболочке эксцентрично. Тогда для момента H_2 не располагаем полноценным соотношением упругости. При этом дифференциальные уравнения равновесия «единой» оболочки можно свести к трем уравнениям относительно перемещений u, ϑ, w, однако соответствующее преобразование нетривиально.

Предварительно решим, как обычно, моментные уравнения равновесия относительно S_2, Q_1, Q_2, игнорируя пока зависимость H_2 от перерезывающих сил в шпангоуте:

$$S_2 = S_1 + \left(M_2 - M_1\right)\tau_\beta + H_2\left[\frac{\cos\gamma}{B}\left(1-\varepsilon_2\right) - \chi_2\right] + \frac{1}{B}\left(1-\varepsilon_2\right)\frac{\partial}{\partial\beta}M_3; \qquad (5)$$

$$Q_1 = \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(M_1 B\right) + \frac{1}{A}M_1\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha} - M_3\left[\frac{\cos\gamma}{B}\left(1-\varepsilon_2\right) - \chi_2\right] +$$

$$\frac{1}{B}\left(1-\varepsilon_2\right)\frac{\partial}{\partial\beta}H_2 - \frac{1}{AB}M_2\left[A\,\sin\gamma\left(1-\varepsilon_2\right) - \cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]; \qquad (6)$$

$$Q_2 = \frac{1}{B}\left(1-\varepsilon_2\right)\frac{\partial}{\partial\beta}M_2 + \frac{1}{AB}H_2\left[A\,\sin\gamma\left(1-\varepsilon_2\right) - \cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right] - M_3\tau_\beta. \qquad (7)$$

Уравнения (5), (7) проинтегрируем по α в окрестности линии контакта *j*-го шпангоута $\alpha = \alpha_j$. Учитывая выражения (1) [14], запишем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j+\varepsilon} S_2 A\, d\alpha = Q_{n1j}^{\text{ш}} =$$

$$=\left\{M^{\text{ш}}_{n1j}\tau_\beta+M^{\text{ш}}_{n2j}\left[\frac{\cos\gamma}{B}(1-\varepsilon_2)-\chi_2\right]+\frac{1}{B}(1-\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial\beta}M^{\text{ш}}_{n3j}\right\}_{|\alpha=\alpha_j};$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j+\varepsilon}Q_2A\,d\alpha=Q^{\text{ш}}_{n3j}=$$

$$=\left\{\frac{1}{B}(1-\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial\beta}M^{\text{ш}}_{n1j}+\frac{1}{AB}M^{\text{ш}}_{n2j}\left[A\sin\gamma(1-\varepsilon_2)-\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]-M^{\text{ш}}_{n3j}\tau_\beta\right\}_{\alpha=\alpha_j}.$$

Внесем в полученные выражения «неполноценное» соотношение упругости (83) [14] и получим систему уравнений относительно перерезывающих сил $Q^{\text{ш}}_{n1j}$, $Q^{\text{ш}}_{n3j}$:

$$Q^{\text{ш}}_{n1j}\left(1-\frac{\cos\gamma}{B}\Delta^*_{3j}\right)+Q^{\text{ш}}_{n3j}\frac{\cos\gamma}{B}\Delta^*_{1j}=$$

$$=\left\{M^{\text{ш}}_{n1j}\tau_\beta+\frac{1}{B}(1-\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial\beta}M^{\text{ш}}_{n3j}+GJ_k\tau_\beta\left[\frac{\cos\gamma}{B}(1-\varepsilon_2)-\chi_2\right]\right\}_{\alpha=\alpha_j};$$

$$-Q^{\text{ш}}_{n1j}\frac{\sin\gamma}{B}\Delta^*_{3j}+Q^{\text{ш}}_{n3j}\left(1+\frac{\sin\gamma}{B}\Delta^*_{1j}\right)=$$

$$=\left\{\frac{1}{B}(1-\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial\beta}M^{\text{ш}}_{n1j}-M^{\text{ш}}_{n3j}\tau_{\beta+}+GJ_k\tau_\beta\left[\frac{\sin\gamma}{B}(1-\varepsilon_2)-\frac{\cos\gamma}{AB}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]\right\}_{\alpha=\alpha_j},$$

откуда, пренебрегая произведениями безразмерных эксцентриситетов вида $\dfrac{\Delta}{B}$, которые считаем малыми, и деформаций по сравнению с единицей, нетрудно определить

$$Q^{\text{ш}}_{n1j}=\left\{\begin{aligned}&M^{\text{ш}}_{n1j}\tau_\beta+\frac{1}{B}\left(1-\varepsilon_2+\frac{\cos\gamma}{B}\Delta^*_{3j}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}M^{\text{ш}}_{n3j}-\\&-\frac{\cos\gamma}{B^2}\Delta^*_{1j}\frac{\partial}{\partial\beta}M^{\text{ш}}_{n1j}+GJ_k\tau_\beta\left[\frac{\cos\gamma}{B}\left(\frac{r_j}{r^*_j}-\varepsilon_2\right)-\chi_2\right]\end{aligned}\right\}_{\alpha=\alpha_j};\qquad(8)$$

$$Q^{\text{ш}}_{n3j} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{B}\left(1-\varepsilon_2-\frac{\sin\gamma}{B}\Delta^*_{1j}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}M^{\text{ш}}_{n1j}-M^{\text{ш}}_{n3j}\tau_\beta+ \\ &+\frac{\sin\gamma}{B^2}\Delta^*_{3j}\frac{\partial}{\partial\beta}M^{\text{ш}}_{n3j}+GJ_k\tau_\beta\left[\frac{\sin\gamma}{B}\left(\frac{r_j}{r^*_j}-\varepsilon_2\right)-\frac{\cos\gamma}{AB}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]\end{aligned}\right\}_{\alpha=\alpha_j}, \quad (9)$$

где r^*_j — радиус линии центров изгиба j-го шпангоута.

Внесем полученные выражения в «неполноценное» соотношение упругости (83) [14] и, пренебрегая произведениями тех же малых величин, запишем

$$M^{\text{ш}}_{n2j} = GJ_k\frac{r_j}{r^*_j}\tau_\beta\Big|_{\alpha=\alpha_j}+\frac{1}{r_j}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\Delta^*_{3j}M^{\text{ш}}_{n3j}-\Delta^*_{1j}M^{\text{ш}}_{n1j}\right). \quad (10)$$

Далее, используя (9) и (10), получим с той же точностью «полноценное» соотношение:

$$\begin{gathered} M^{\text{ш}}_{n2j} = GJ_k\tau_\beta\Big|_{\alpha=\alpha_j}+ \\ +\frac{E_j}{R^3_j}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\left[\left(\Delta^*_1J^{11}-\Delta^*_3J^{13}\right)_j w-\left(\Delta^*_3J^{33}-\Delta^*_1J^{13}\right)_j u\right]_{\alpha=\alpha_j}. \end{gathered} \quad (11)$$

Таким образом, для момента H_2 в конической оболочке (см. (1) [14]) имеем с учетом выражения (11) соотношение упругости, что позволяет, исключив по обычной схеме усилия S_2, Q_1, Q_2 из дифференциальных уравнений равновесия «единой» оболочки, получить три дифференциальных уравнения равновесия «единой» оболочки относительно перемещений u, ϑ, w.

Рассмотрим упрощенный вариант нелинейных дифференциальных уравнений равновесия оболочки в форме (4). Внося в эти уравнения выражения (5)–(7) и удерживая, как и всюду выше, лишь квадратичные нелинейные члены, представим окончательно уравнения равновесия оболочки в форме

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[N_1B(1+\varepsilon_2)\right]+A\frac{\partial}{\partial\beta}\left[(M_2-M_1)\tau_\beta\right]-N_2\left(A\sin\gamma-\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+ \\ +\chi_1\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(M_1B)-A\sin\gamma M_2+A\frac{\partial}{\partial\beta}H_2-A\cos\gamma M_3\right]+ \\ +\tau_\beta\left(A\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+A\sin\gamma H_2\right)+A\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{H_2\left[\frac{\cos\gamma}{B}(1-\varepsilon_2)-\chi_2\right]\right\}+ \end{gathered}$$

$$+\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[(1-\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial\beta}M_3\right]+p_1AB(1+\varepsilon_2)+p_3B\frac{\partial w}{\partial\alpha}=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[S_1B(1+\varepsilon_2)\right]+A\frac{\partial}{\partial\beta}N_2+A\sin\gamma\,S_1\left[1+\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha\varepsilon_2)\right]+$$
$$+AB\tau_\beta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}M_1+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}H_2\right)+\left[A\sin\gamma(1-\varepsilon_2)-\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}M_3-$$
$$-A\left[\frac{\cos\gamma}{B}(1-\varepsilon_2)-\chi_2\right]\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+p_2AB(1+\varepsilon_2)+p_3A\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}+\cos\gamma\,\vartheta\right)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(Q_1B)+\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(M_1B)-A\sin\gamma\,M_2+A\frac{\partial}{\partial\beta}H_2-A\cos\gamma\,M_3\right]+$$
$$+A\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{B}(1-\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+\frac{1}{AB}H_2\left[A\sin\gamma(1-\varepsilon_2)-\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]-M_3\tau_\beta\right\}-$$
$$-A\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+\frac{\sin\gamma}{B}H_2\right)-N_1AB\chi_1+N_2AB\left[\frac{\cos\gamma}{B}(1-\varepsilon_2)-\chi_2\right]-$$
$$-\tau_\beta\left(2ABS_1+A\cos\gamma\,H_2+A\frac{\partial}{\partial\beta}M_3\right)+p_3AB(1+\varepsilon_2)-p_1B\frac{\partial w}{\partial\alpha}-$$
$$-p_2A\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}+\cos\gamma\,\vartheta\right)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(M_1B)+M_1B\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha}-ABM_3\left[\frac{\cos\gamma}{B}(1-\varepsilon_2)-\chi_2\right]+A(1-\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial\beta}H_2-$$
$$-M_2\left[A\sin\gamma(1-\varepsilon_2)-\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]-Q_1AB=0. \qquad (12)$$

Исключив с помощью соотношений упругости и деформационных соотношений из (12) силовые и деформационные неизвестные и перерезывающую силу Q_1 с помощью последнего уравнения, получим систему из трех дифференциальных уравнений равновесия «единой» оболочки в перемещениях. Однако эти уравнения в настоящей работе ввиду их громоздкости не приводятся.

Выделение линейных операторов эквивалентной оболочки. Представим полученные дифференциальные уравнения «единой» оболочки (12) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(N_1 B\right)+A\frac{\partial}{\partial\beta}S_1+ABq_1=0;\\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(S_1 B\right)+A\sin\gamma\, S_1+ABq_2=0;\\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(Q_1 B\right)+ABq_3=0;\\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(M_1 B\right)-ABQ_1+ABq_4=0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где q_1, q_2, q_3, q_4 — «фиктивная» нагрузка.

Запишем систему уравнений (13) в векторном виде, используя соотношения упругости для силовых факторов оболочки и соответствующие деформационные соотношения:

$$
ABq_i=\left(L_i+T_i\right)\mathbb{U},\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,
\tag{14}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&L_1\mathbb{U}=\frac{A}{B}\cos\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}H_2+\frac{A}{B}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}M_3-A\sin\gamma\, N_2;\\
&L_2\mathbb{U}=A\frac{\partial}{\partial\beta}N_2+\frac{A}{B}\sin\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}M_3-\frac{A}{B}\cos\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}M_2;\\
&L_3\mathbb{U}=\frac{A}{B}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}M_2+\frac{A}{B}\sin\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}H_2+A\cos\gamma\, N_2;\\
&L_4\mathbb{U}=A\frac{\partial}{\partial\beta}H_2-A\cos\gamma\, M_3-A\sin\gamma\, M_2;
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
T_1\mathbb{U}={}&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(N_1 B\varepsilon_2\right)+A\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(M_2-M_1\right)\right]\tau_\beta+\cos\gamma\, N_2\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\\
&+\chi_1\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(M_1 B\right)-A\sin\gamma\, M_2+A\frac{\partial}{\partial\beta}H_2-A\cos\gamma\, M_3\right]+\\
&+\tau_\beta\left(A\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+A\sin\gamma\, H_2\right)-A\frac{\partial}{\partial\beta}\left[H_2\left(\frac{\cos\gamma}{B}\varepsilon_2+\chi_2\right)\right]-\\
&-\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial\beta}M_3\right)+ABp_1\left(1+\varepsilon_2\right)+Bp_3\frac{\partial w}{\partial\alpha};
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
T_2\mathbb{U}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(S_1 B\varepsilon_2\right)+A\sin\gamma\, S_1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\varepsilon_2\right)+AB\tau_\beta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}M_1+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}H_2\right)-
$$

$$-\frac{1}{B}\left(A\sin\gamma\,\varepsilon_2+\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}M_3+A\left(\frac{\cos\gamma}{B}\varepsilon_2+\chi_2\right)\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+$$

$$+ABp_2\left(1+\varepsilon_2\right)+Ap_3\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}+\cos\gamma\,\vartheta\right);$$

$$T_3\mathbb{U}=\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(M_1B\right)-A\sin\gamma\,M_2+A\frac{\partial}{\partial\beta}H_2-A\cos\gamma\,M_3\right]-$$

$$-\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+H_2\left(\sin\gamma\,\varepsilon_2+\frac{\cos\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+M_3B\tau_\beta\right]-$$

$$-\frac{A}{B}\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}M_2+\sin\gamma\,H_2\right)-N_1AB\chi_1-N_2AB\left(\frac{\cos\gamma}{B}\varepsilon_2+\chi_2\right)- \quad (16)$$

$$-\tau_\beta\left(2ABS_1+A\cos\gamma\,H_2+A\frac{\partial}{\partial\beta}M_3\right)+ABp_3\left(1+\varepsilon_2\right)-$$

$$-Bp_1\frac{\partial w}{\partial\alpha}-Ap_2\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\cos\gamma\,\vartheta\right);$$

$$T_4\mathbb{U}=M_1B\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha}+ABM_3\left(\frac{\cos\gamma}{B}\varepsilon_2+\chi_2\right)-A\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial\beta}H_2+$$

$$+M_2\left(A\sin\gamma\,\varepsilon_2+\cos\gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right).$$

Поскольку в конической оболочке в силу принятых допущений (3) силовые факторы $N_{22}^{\text{об}}=M_{22}^{\text{об}}=M_{12}^{\text{об}}=M_{21}^{\text{об}}=0$ и $N_{12}^{\text{об}}=N_{21}^{\text{об}}$, то нелинейные дифференциальные уравнения равновесия «единой» оболочки (13) совпадают по виду с линейными дифференциальными уравнениями равновесия эквивалентной оболочки, если члены $q_i\;(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ трактовать как некоторую «фиктивную» нагрузку на эквивалентную оболочку. Это обстоятельство позволяет перейти от системы дифференциальных уравнений (13) с сингулярными коэффициентами к системе интегродифференциальных уравнений с регулярными внеинтегральными операторами, поскольку эквивалентная оболочка статически определима в малом.

Интегродифференциальные уравнения равновесия и соотношения упругости эквивалентной оболочки. Трактуя в уравнениях (13) члены $ABq_i\;(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ как некоторую «фиктивную» нагрузку на эквивалентную оболочку, запишем общий интеграл этих уравнений. Проинтегрируем второе и третье уравнения системы (13) относительно S_1 и Q_1 соответственно как обыкновенные дифференциальные уравнения, считая переменную β параметром. Далее, по-прежнему считая β параметром, проинтегрируем первое уравнение относительно N_1, исключив из него предварительно S_1, и четвертое уравнение относительно M_1, исключив из него предварительно Q_1.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\begin{gathered}
N_1(\alpha,\beta)=N_1(\alpha_0,\beta)\frac{\alpha_0}{\alpha}+\frac{\partial S_1(\alpha_0,\beta)}{\partial\beta}\frac{A\alpha_0}{r}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}-1\right)-A\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\xi}{\alpha}q_1(\xi,\beta)\,d\xi+\\
+\frac{A}{\sin\gamma}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left(1-\frac{\xi}{\alpha}\right)\frac{\xi}{\alpha}\frac{\partial q_2(\xi,\beta)}{\partial\beta}\,d\xi;\\
S_1(\alpha,\beta)=S_1(\alpha_0,\beta)\frac{\alpha_0^2}{\alpha^2}-A\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\xi^2}{\alpha^2}q_2(\xi,\beta)\,d\xi;\\
Q_1(\alpha,\beta)=Q_1(\alpha_0,\beta)\frac{\alpha_0}{\alpha}-A\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\xi}{\alpha}q_3(\xi,\beta)\,d\xi;\\
M_1(\alpha,\beta)=M_1(\alpha_0,\beta)\frac{\alpha_0}{\alpha}+Q_1(\alpha_0,\beta)\frac{A\alpha_0}{\alpha}(\alpha-\alpha_0)-\\
-A^2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\xi}{\alpha}(\alpha-\xi)q_3(\xi,\beta)\,d\xi-A\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\xi}{\alpha}q_4(\xi,\beta)\,d\xi,
\end{gathered}\tag{17}$$

(здесь α отсчитывается от вершин конуса).

Выражения (17) представляют собой нелинейные интегродифференциальные уравнения равновесия оболочки. Под «фиктивной» нагрузкой q_1, q_2, q_3, q_4 здесь следует понимать выражения (14), где линейные операторы L_1, L_2, L_3, L_4 и нелинейные операторы T_1, T_2, T_3, T_4 определяются выражениями (15), (16).

Из формулы (1) [14] следует, что регулярные соотношения упругости конической оболочки совпадают с соотношениями упругости для эквивалентной оболочки. На основании (3), (59) [13] запишем

$$N_1=\frac{k_1Eh}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha};\quad S_1=\frac{Gh}{k_1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{r}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\vartheta}{r}\right)\right];\ M_1=-\frac{k_2Eh^3}{12A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}.\tag{18}$$

Коническая оболочка геометрически неизменяема в малом, что позволяет разрешить соотношения упругости (18) относительно перемещений u, ϑ, w, т. е. перейти к соотношениям упругости в интегродифференциальной форме.

Построим общий интеграл системы (18). Первое и третье уравнения можно проинтегрировать относительно u и w соответственно как обыкновенные дифференциальные уравнения, считая переменную β параметром. Затем, по-прежнему считая β параметром, проинтегрировать второе уравнение относительно ϑ, исключив из него предварительно u.

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательный результат:

$$u(\alpha,\beta)=u(\alpha_0,\beta)+A\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{N_1(\xi,\beta)}{k_1Eh}d\xi;$$

$$\vartheta(\alpha,\beta)=\vartheta(\alpha_0,\beta)\frac{r}{r_0}+\frac{1}{\sin\gamma}\frac{\partial u(\alpha_0,\beta)}{\partial\beta}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)+$$
$$+\frac{A}{\sin\gamma}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{\xi}\right)\frac{1}{k_1Eh}\frac{\partial N_1(\xi,\beta)}{\partial\beta}d\xi+Ar\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{k_1}{r(\xi)Gh}S_1(\xi,\beta)d\xi; \qquad (19)$$

$$w(\alpha,\beta)=w(\alpha_0,\beta)+\frac{\partial w(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}_{|\alpha=\alpha_0}+(\alpha-\alpha_0)-12A^2\int_{\alpha_0}^{\alpha}(\alpha-\xi)\frac{M_1(\xi,\beta)}{k_2Eh^3}d\xi.$$

Таким образом, из (19) вытекают не только регулярные соотношения упругости конической оболочки (18), но и геометрические граничные условия на краю оболочки $\alpha=\alpha_0$.

Матричная интерпретация интегродифференциальных уравнений равновесия и соотношений упругости. Рассмотрим четырехмерную вектор-функцию силовых факторов в поперечном сечении оболочки $\alpha=\text{const}$ и запишем

$$\mathbb{T}(\alpha,\beta)=\big(N_1(\alpha,\beta),\ S_1(\alpha,\beta),\ Q_1(\alpha,\beta),\ M_1(\alpha,\beta)\big). \qquad (20)$$

Тогда интегродифференциальные уравнения равновесия «единой» оболочки (17) могут быть представлены в виде

$$\mathbb{T}(\alpha,\beta)=\Gamma_\beta^T(\alpha)\mathbb{T}(\alpha_0,\beta)+\int_{\alpha_0}^{\alpha}\mathrm{K}_\beta^T(\alpha,\xi)\mathbb{Q}(\xi,\beta)d\xi, \qquad (21)$$

где

$$\Gamma_\beta^T(\alpha)=\begin{pmatrix} -A\dfrac{\xi}{\alpha} & \dfrac{A}{\sin\gamma}\dfrac{\xi}{\alpha}\left(1-\dfrac{\xi}{\alpha}\right)\dfrac{\partial}{\partial\beta} & 0 & 0\\ 0 & A\dfrac{\xi^2}{\alpha^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -A\dfrac{\xi}{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & -A^2\dfrac{\xi}{\alpha}(\alpha-\xi) & -A\dfrac{\xi}{\alpha}\end{pmatrix};$$

4×4 — матрицы линейных дифференциальных операторов по координате β, $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ — четырехмерный вектор «фиктивных» нагрузок,

$$\mathbb{Q}(\alpha,\beta)=\left(q_1(\alpha,\beta),q_2(\alpha,\beta),q_3(\alpha,\beta),q_4(\alpha,\beta)\right). \qquad (22)$$

Наряду с четырехмерным силовым вектором $\mathbb{T}$ (20), «расширенный» четырехмерный вектор перемещений

$$\mathbb{U}^*(\alpha,\beta)=\left(u(\alpha,\beta),\vartheta(\alpha,\beta),w(\alpha,\beta),\frac{\partial w(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right). \qquad (23)$$

Тогда интегродифференциальные соотношения упругости (21) могут быть представлены в виде

$$\mathbb{U}^*(\alpha,\beta)=\Gamma_\beta^U(\alpha)\mathbb{U}^*(\alpha_0,\beta)+\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Lambda_\beta(\alpha,\beta)\mathbb{T}(\xi,\beta)\,d\xi,$$

где

$$\Gamma_\beta^U(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sin\gamma}\left(1-\frac{\propto}{\propto_0}\right) & \frac{\propto}{\propto_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \propto-\propto_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_\beta(\propto,\beta)=\begin{pmatrix} \frac{A}{k_1(\xi)E(\xi)h(\xi)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{k_1(\xi)E(\xi)h(\xi)}\left(1-\frac{\alpha}{\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\beta} & \frac{Ak_1(\xi)}{G(\xi)h(\xi)\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12A^2}{k_2(\xi)E(\xi)h^3(\xi)}(\propto-\xi) \end{pmatrix}.$$

Здесь также 4×4 — матрицы линейных дифференциальных операторов по координате β.

Как было отмечено ранее, из интегродифференциальных уравнений равновесия (17) и регулярных соотношений упругости в интегродифференциальной форме (19) вытекают дифференциальные уравнения равновесия (13) и регулярные соотношения упругости (3). Поэтому, присоединяя к (17) и (19) сингулярные соотношения упругости для остальных сингулярных силовых факторов, получим замкнутую систему уравнений конической оболочки.

Исключив из уравнений конической оболочки силовые факторы с помощью соотношений упругости и геометрических соотношений, из нелинейных членов получим уравнения равновесия конической оболочки в перемещениях.

Воспользовавшись матричной формой записи, сначала внесем (20) в (23). Опуская промежуточные выкладки, приведем сразу окончательный результат:

$$\mathbb{U}^*(\alpha,\beta)=\Gamma_\beta^U(\alpha)\mathbb{U}^*(\alpha_0,\beta)+\Lambda_\beta(\alpha)\mathbb{T}(\alpha_0,\beta)+\int_{\alpha_0}^{\alpha}\mathbb{K}_\beta^U(\alpha,\xi)\mathbb{Q}(\xi,\beta)\,\mathrm{d}\xi, \quad (24)$$

где 4×4 — матрицы линейных дифференциальных операторов по координате β;

$$\Lambda_\beta(\alpha)=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Lambda_\beta(\alpha,\xi)\Gamma_\beta^T(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad (25)$$

$$\mathbb{K}_\beta^U(\alpha,\xi)=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Lambda_\beta(\alpha,\eta)\mathbb{K}_\beta^T(\eta,\xi)\,\mathrm{d}\eta. \quad (26)$$

Далее на основании выражения (14) определим вектор «фиктивных» нагрузок:

$$\mathbb{Q}=\frac{1}{AB}\left(\mathbb{Q}_L+\mathbb{Q}_T\right), \quad (27)$$

где составляющие $L_i\mathbb{U}, T_i\mathbb{U}$ четырехмерных векторов $\mathbb{Q}_L, \mathbb{Q}_T$, представляющие собой значения некоторых операторов на вектор-функциях перемещений $\mathbb{U}$, выразим через (15) и (16) соответственно.

Как следует из представлений (1) [14] обобщенных силовых факторов в оболочке, векторы

$$\mathbb{Q}_L=\mathbb{Q}_L^S\,,\ \mathbb{Q}_T=\mathbb{Q}_T^R+\mathbb{Q}_T^S, \quad (28)$$

где индекс R соответствует дифференциальным операторам с регулярными коэффициентами, а индекс S — операторам с сингулярными коэффициентами, содержащими особенности типа дельта-функции.

Векторы операторов с сингулярными коэффициентами на основании формулы (1) [14] запишем в следующем виде:

$$\mathbb{Q}_L^S=\sum_j \mathbb{Q}_L^{ш}\Big|_{\alpha=\alpha_j}\delta\left(\alpha-\alpha_j\right); \quad (29)$$

$$\mathbb{Q}_T^S=\sum_j \mathbb{Q}_T^{ш}\Big|_{\alpha=\alpha_j}\delta\left(\alpha-\alpha_j\right), \quad (30)$$

где векторы операторов $\mathbb{Q}_L^{ш}, \mathbb{Q}_T^{ш}$ имеют соответственно указанные ниже составляющие:

$$
\begin{aligned}
&L_1^{ш}\mathbb{U} = -\sin\gamma\, N_{n2}^{ш} - \frac{\cos\gamma}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n2}^{ш} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}M_{n3};\\
&L_2^{ш}\mathbb{U} = \frac{\partial}{\partial\beta}N_{n2}^{ш} - \frac{\cos\gamma}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n1}^{ш} + \frac{\sin\gamma}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n3};\\
&L_3^{ш}\mathbb{U} = \cos\gamma\, N_{n2}^{ш} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}M_{n1}^{ш} + \frac{\sin\gamma}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n2};\\
&L_4^{ш}\mathbb{U} = -\sin\gamma\, M_{n1}^{ш} + \frac{\partial}{\partial\beta}M_{n2}^{ш} - \cos\gamma\, M_{n3};
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
T_1^{ш}\mathbb{U} = &\frac{\cos\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}N_{n2}^{ш} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\tau_\beta M_{n1}^{ш}\right) + \tau_\beta\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n1}^{ш} - \sin\gamma\,\chi_1 M_{n1}^{ш} +\\
&+\chi_1\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n2}^{ш} + \sin\gamma\,\tau_\beta M_{n2}^{ш} - \frac{\partial}{\partial\beta}\left[M_{n2}^{ш}\left(\frac{\cos\gamma}{r}\varepsilon_2 + \chi_2\right)\right] -\\
&-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n3}^{ш}\right) - \cos\gamma\,\chi_1 M_{n3}^{ш};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&T_2^{ш}\mathbb{U} = \left(\frac{\cos\gamma}{r}\varepsilon_2 + \chi_2\right)\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n1}^{ш} + \tau_\beta\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n2}^{ш} - \frac{1}{r}\left(\sin\gamma\,\varepsilon_2 + \frac{\cos\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n3}^{ш},\\
&T_3^{ш}\mathbb{U} = -\left(\cos\gamma\,\varepsilon_2 + r\chi_2\right)N_{n2}^{ш} - \frac{\sin\gamma}{A}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha}M_{n1}^{ш} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n1}^{ш}\right) -\\
&-\frac{\varepsilon_2}{r}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}M_{n1}^{ш} + \frac{r}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\varepsilon_2}{r}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n2}^{ш} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[M_{n1}^{ш}\left(\sin\gamma\,\varepsilon_2 + \frac{\cos\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\right] -\\
&\quad -\cos\gamma\,\tau_\beta M_{n2}^{ш} - \left(\frac{\cos\gamma}{A}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tau_\beta}{\partial\beta}\right)M_{n3}^{ш} - 2\tau_\beta\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n3}^{ш};\\
&T_4^{ш}\mathbb{U} = \left(\sin\gamma\,\varepsilon_2 + \frac{\cos\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)M_{n1}^{ш} - \varepsilon_2\frac{\partial}{\partial\beta}M_{n2}^{ш} + \left(\cos\gamma\,\varepsilon_2 + r\chi_2\right)M_{n3}^{ш}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

На основании деформационных соотношений (59) и (84), представленных в работе [13], соотношений упругости для шпангоута (80)–(83), приведенных в работе [14], а также соотношений (11) правых частей выражений (31), (32) запишем следующие операторы:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\beta} + u\sin\gamma - w\cos\gamma\right);\ \ \tau_\beta = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) - \frac{\cos\gamma}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\beta}; \tag{33}$$

$$\chi_1 = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2};$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{r}{A}\sin\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)w + \cos\gamma\frac{\partial\vartheta}{\partial\beta}\right];$$

$$N_{n2}^{\text{ш}} = \frac{EF}{r}\left|\begin{array}{c}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\beta} + u\ \sin\gamma - w\ \cos\gamma - \left(\dfrac{1}{\cos\gamma}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \dfrac{R\sin\gamma}{A}\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\dfrac{\Delta_3}{R} - \\ -\left(\dfrac{1}{\cos\gamma}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \dfrac{R\cos\gamma}{A}\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\dfrac{\Delta_1}{R}\end{array}\right|; \tag{34}$$

$$M_{n1}^{\text{ш}} = \frac{E}{\cos\gamma}\left|\begin{array}{c}\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\beta} + \sin\gamma\, u - \cos\gamma\, w\right)\dfrac{\Delta_3 F}{R} - \left(\dfrac{1}{\cos\gamma}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \dfrac{R\sin\gamma}{A}\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\dfrac{J^{11}}{R^2} - \\ -\left(\dfrac{1}{\cos\gamma}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \dfrac{R\cos\gamma}{A}\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\dfrac{J^{13}}{R^2}\end{array}\right|;$$

$$M_{n2}^{\text{ш}} = -GJ_k\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) - \frac{\cos\gamma}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right] +$$

$$+\frac{E}{R^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\left[\left(\Delta_1^* J^{11} - \Delta_3^* J^{13}\right)w - \left(\Delta_3^* J^{33} - \Delta_1^* J^{13}\right)u\right];$$

$$M_{n3}^{\text{ш}} = \frac{E}{\cos\gamma}\left|\begin{array}{c}\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\beta} + \sin\gamma\, u - \cos\gamma\, w\right)\dfrac{\Delta_1 F}{R} - \left(\dfrac{1}{\cos\gamma}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \dfrac{R\sin\gamma}{A}\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\dfrac{J^{13}}{R^2} - \\ -\left(\dfrac{1}{\cos\gamma}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \dfrac{R\cos\gamma}{A}\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\dfrac{J^{33}}{R^2}\end{array}\right|,$$

где $E, G, F, J^{11}, J^{13}, J^{33}, J_k, \Delta_1, \Delta_3, \Delta_1^*, \Delta_3^*$ — некоторые функции переменной α, непрерывные на линиях $\alpha = \alpha_j$ контакта шпангоутов с оболочкой и совпадающие при $\alpha = \alpha_j$ с соответствующими характеристиками шпангоутов.

Вектор операторов с регулярными коэффициентами представим в виде суммы векторов:

$$\mathbb{Q}_T^R = \mathbb{Q}_T^{RR} + \mathbb{Q}_T^{RP}, \tag{35}$$

где

$$\mathbb{Q}_T^{RR} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(N_1 r \varepsilon_2\right) - A\dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(M_1\tau_\beta\right) + \chi_1 \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(M_1 r\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(S_1 r \varepsilon_2\right) - A\sin\gamma\, S_1 \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\varepsilon_2\right) + \dfrac{\partial M_1}{\partial\alpha} r\tau_\beta \\ \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(M_1 r\right) - N_1 A r \chi_1 \\ M_1 r \dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha} \end{matrix} \right\|; \tag{36}$$

$$\mathbb{Q}_T^{RP} = \left\| \begin{matrix} Arp_1\left(1+\varepsilon_2\right) + rp_3 \dfrac{\partial w}{\partial\alpha} \\ Arp_2\left(1+\varepsilon_2\right) + Ap_3\left(\dfrac{\partial w}{\partial\beta} + \cos\gamma\,\vartheta\right) \\ Arp_3\left(1+\varepsilon_2\right) - rp_1\dfrac{\partial w}{\partial\alpha} - Ap_2\left(\dfrac{\partial w}{\partial\beta} + \cos\gamma\,\vartheta\right) \\ 0 \end{matrix} \right\|. \tag{37}$$

Внешняя нагрузка на оболочку может зависеть от характера деформирования оболочки, вследствие чего можно предположить, что операторы в (37) в общем случае нелинейны. Если внешняя нагрузка не зависит от деформирования оболочки («мертвая» нагрузка), то эти операторы линейны.

Внесем (28) в уравнения (24) и (21), тогда на основании (29) и (30) запишем

$$\begin{aligned} \mathbb{U}^*(\alpha,\beta) &= \Gamma_\beta^U(\alpha)\,\mathbb{U}^*(\alpha_0,\beta) + \Lambda_\beta(\alpha)\,\mathbb{T}(\alpha_0,\beta) + \\ &+ \frac{1}{A}\sum_j \frac{1}{r_j}\mathbb{K}_\beta^U\left(\alpha,\alpha_j\right)\left[\mathbb{Q}_L^{\text{ш}}\left(\alpha_j,\beta\right) + \mathbb{Q}_T^{\text{ш}}\left(\alpha_j,\beta\right)\right]\theta\left(\alpha-\alpha_j\right) + \\ &+ \frac{1}{A}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\mathbb{K}_\beta^U(\alpha,\xi)\,\mathbb{Q}_T^R(\xi,\beta)\frac{d\xi}{r(\xi)}; \end{aligned} \tag{38}$$

$$\mathbb{T}(\alpha,\beta)=\Gamma_{\beta}^{T}(\alpha)\mathbb{T}(\alpha_0,\beta)+$$
$$+\frac{1}{A}\sum_{j}\frac{1}{r_j}\mathbb{K}_{\beta}^{T}(\alpha,\alpha_j)\left[\mathbb{Q}_{L}^{\text{ш}}(\alpha_j,\beta)+\mathbb{Q}_{T}^{\text{ш}}(\alpha_j,\beta)\right]\theta(\alpha-\alpha_j)+ \tag{39}$$
$$+\frac{1}{A}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\mathbb{K}_{\beta}^{T}(\alpha,\xi)\mathbb{Q}_{T}^{R}(\xi,\beta)\frac{d\xi}{r(\xi)},$$

где θ — функция Хевисайда (единичная ступенчатая функция), причем «смещенная». Запишем

$$\theta(\alpha)=\begin{cases}1,\alpha\le 0;\\0,\alpha>0.\end{cases}$$

Заключение. Выражение (38) представляет собой основное интегродифференциальное уравнение равновесия «единой» оболочки в перемещениях. Несмотря на то, что функция Хэвисайда разрывна, правая часть этого уравнения непрерывна, так как при $\alpha=\alpha_j$ множители при $\theta(\alpha-\alpha_j)$ обращаются в нуль. Выражение (39) служит для формулировки статических граничных условий в концевом сечении оболочки $\alpha=\alpha_L$. Геометрические граничные условия в этом сечении формулируются непосредственно с помощью выражения (38).

Отметим также, что разработанная математическая модель позволяет упростить исследования гофрированных оболочек. На основе полученных разрешающих уравнений несложно построить алгоритм для исследования напряженно-деформированного состояния и устойчивости дискретно подкрепленных конических оболочек.

Таким образом, полученные разрешающие интегродифференциальные уравнения равновесия позволяют достаточно просто получить решение для продольно-гофрированной конической оболочки, подкрепленной дискретным набором шпангоутов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения. *Инженерно-строительный журнал*, 2013, № 5, с. 100–106.

[2] Климанов В.И, Тимашев С.А. *Нелинейные задачи подкрепленных оболочек*. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1985, 291 с.

[3] Новицкий В.В. Дельта-функция и ее применение в строительной механике. *Расчет пространственных конструкций*, 1962, вып. 8, с. 207–245.

[4] Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. *Строительная механика скошенных тонкостенных систем*. Москва, Машиностроение, 1973, 660 с.

[5] Овчаров А.А., Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом

нагружении. *Современные проблемы науки и образования*, 2014, № 3. URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=13235 (дата обращения: 15.04.2018).

[6] Онанов Г.Г. Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функции и ее производных. *Доклады Академии наук СССР*, 1970, т. 1, № 5, с. 997–1000.

[7] Семенов А.А., Овчаров А.А. Математическая модель деформирования ортотропных конических оболочек. *Инженерный вестник Дона*, 2014, т. 29, вып. 2, с. 74–77.

[8] Кеч В., Теодореску П. *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*. Победря Б.Е., ред. Москва, Мир, 1978, 518 с.

[9] Лазарян В.А., Конашенко С.И. *Обобщенные функции в задачах механики*. Киев, Наук. думка, 1974, 192 с.

[10] Михайлов Б.К. *Пластины и оболочки с разрывными параметрами*. Ленинград, ЛГУ, 1980, 196 с.

[11] Шалашилин В.И. *К расчету оболочек, выполненных из гофрированного материала. Проблемы устойчивости в строительной механике*. Москва, Изд-во литературы по строительству, 1965, с. 339–346.

[12] Шалашилин В.И. К расчету оболочек, выполненных из гофрированного материала. *Известия АН СССР. Механика и машиностроение*, 1964, № 3, с. 131–135.

[13] Комиссарова Г.Л. *Устойчивость продольно-гофрированной оболочки, подкрепленной и неподкрепленной шпангоутами. Труды IV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек*. Ереван, 1964.

[14] Дудченко А.А., Сергеев В.Н. Нелинейные уравнения равновесия конической оболочки, подкрепленной дискретным набором шпангоутов. *Вестник ПНИПУ. Сер. Механика*, 2017, № 2, с. 60–77.

Статья поступила в редакцию 31.05.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дудченко А.А., Сергеев В.Н. Математическая модель расчета продольно-гофрированной конической оболочки, подкрепленной шпангоутами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 8.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-8-1794

Дудченко Александр Александрович — д-р техн. наук, профессор кафедры МАИ. e-mail: a_dudchenko@mail.ru

Сергеев Валерий Николаевич — канд. техн. наук, доцент кафедры МАИ.
e-mail: k603sergeev@mai.ru

Mathematical model for computing parameters of a longitudinally corrugated conical shell supported by frames

© A.A. Dudchenko, V.N. Sergeev

Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993, Russia

The paper investigates the stress-strain state of a thin shell using a mathematical model according to which a longitudinally corrugated shell may be represented by a continuous set of stringers oriented along the generatrices of a conical surface. The stringers are only linked longitudinally, each of them undergoing just tension-compression and bending in the axial section plane of the rotational shell. A conical shell supported by a discrete set of frames is a discrete-continuous system studied by means of the generalised function approach. The authors derived integrodifferential conical shell equilibrium equations in terms of generalised displacements, which are of interest for those specialising in calculating thin shell structure parameters.

Keywords: *mathematical model, conical shell, discrete set of frames, generalised function approach*

REFERENCES

[1] Karpov V.V., Semenov A.A. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal — Magazine of Civil Engineering*, 2013, no. 5, pp. 100–106.

[2] Klimanov V.I, Timashev S.A. *Nelineynye zadachi podkreplennykh obolochek* [Non-linear problems for supported shells]. Sverdlovsk, Ufa Scientific Centre of the USSR Academy of Sciences, 1985, 291 p.

[3] Novitskiy V.V. Delta-funktsiya i ee primenenie v stroitelnoy mekhanike [Delta function and its application in structural mechanics]. *Raschet prostranstvennykh konstruktsiy* [Calculating parameters of three-dimensional structures], 1962, issue 8, pp. 207–245.

[4] Obraztsov I.F., Onanov G.G. *Stroitelnaya mekhanika skoshennykh tonkostennykh sistem* [Structural mechanics of sloping thin-walled systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973, 660 p.

[5] Ovcharov A.A., Brylev I.S. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya — Modern problems of science and education*, 2014, no. 3. Available at: http://science-education.ru/ru/article/view?id=13235 (accessed April 15, 2018).

[6] Onanov G.G. *Doklady Akademii nauk SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1970, vol. 1, no. 5, pp. 997–1000.

[7] Semenov A.A., Ovcharov A.A. *Inzhenernyy vestnik Dona — Engineering journal of Don*, 2014, vol. 29, no. 2, pp. 74–77.

[8] Kecs W., Teodorescu P.P. *Introducere in teoria distributiilor cu aplicatii in tehnica* [Introduction to theory of generalised functions with engineering applications]. Bucharest, Editura Tehnică, 1975, 412 p. [In Russ.: Kecs W., Teodorescu P.P. *Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsiy s prilozheniyami v tekhnike*. Pobedrya B.E., ed. Moscow, Mir Publ., 1978, 518 p.].

[9] Lazaryan V.A., Konashenko S.I. *Obobshchennye funktsii v zadachakh mekhaniki* [Generalised functions in problems of mechanics]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1974, 192 p.

[10] Mikhaylov B.K. *Plastiny i obolochki s razryvnymi parametrami* [Plates and shells with discontinuous parameters]. Leningrad, Leningrad State University, 1980, 196 p.
[11] Shalashilin V.I. *Problemy ustoychivosti v stroitelnoy mekhanike* [Stability problems in structural mechanics]. Moscow, State publishing house for construction literature, 1965, pp. 339–346.
[12] Shalashilin V.I. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika i mashinostroenie — Journal of the Academy of Sciences, USSR. Engineering Sciences Branch. Mechanics and Machine Building*, 1964, no. 3, pp. 131–135.
[13] Komissarova G.L. Ustoychivost prodolno-gofrirovannoy obolochki, podkreplennoy i nepodkreplennoy shpangoutami [Stability of a longitudinally corrugated conical shell as supported by frames and without them]. *Trudy IV Vsesoyuznoy konferentsii po teorii plastin i obolochek* [Proc. of the 4th pan-Union conference on plate and shell theory]. Yerevan, 1964.
[14] Dudchenko A.A., Sergeev V.N. *Vestnik PNIPU. Ser. Mekhanika — PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 2, pp. 60–77.

Dudchenko A.A., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Moscow Aviation Institute. e-mail: a_dudchenko@mail.ru

Sergeev V.N., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Moscow Aviation Institute. e-mail: k603sergeev@mai.ru