

Конечное поперечное передвижение упругого стержня с массой на конце при гашении колебаний в момент остановки

© С.В. Русских^{1,2}, Ф.Н. Шклярчук^{1,2}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, 125993, Россия

²Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, 125040, Россия

Рассмотрены нестационарные поперечные колебания упругого консольного стержня с массой на правом конце при управляемом перемещении левого конца вдоль вертикальной направляющей. Изгибные колебания стержня отыскиваются в виде разложения по собственным формам колебаний. Поставлена следующая задача: найти закон управляемого передвижения левого конца стержня, при котором он перемещается на требуемое расстояние за заданное время при одновременном гашении упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам в момент остановки. В качестве неизвестной функции рассмотрено ускорение левого конца стержня, которое считают пропорциональным некоторой финитной функции. Эту функцию в свою очередь, записывают в виде ряда по синусам или косинусам с неизвестными коэффициентами на заданном времени управляемого движения. Приведены примеры расчета с гашением упругих колебаний по первым трем собственным формам.

Ключевые слова: упругий консольный стержень, нормальные координаты, гашение упругих колебаний, финитная функция, конечные перемещения

Введение. Задачи управления составными упругими системами, которые могут совершать различные конечные передвижения (перемещения и повороты), являются актуальными для быстроходных манипуляционных роботов [1, 2 и др.], виброударных механизмов, ракет с разделяющимися ступенями, различных космических конструкций и т. д. Общие вопросы теории управления большими механическими системами, задачи и методы управления колебаниями конструкций рассмотрены в [3, 4]. В большинстве работ упругие колебания, которые возникают при конечных перемещениях, поворотах механических систем или их составных частей, считаются малыми и описываются нормальными координатами, представляющими собой относительные движения по собственным формам колебаний. Задачи терминального управления с учетом начальных и конечных условий в такой постановке сводятся к системам интегральных уравнений для нормальных координат.

Для того чтобы решить получающиеся интегральные уравнения для собственных форм, которые следует погасить, управляющие функции отыскивают в виде кусочно-линейных функций или рядов

по заданным функциям с неизвестными коэффициентами. В работе [2] для управления поперечными изгибными колебаниями балки с грузом на конце в качестве таких функций использованы синусы и косинусы с частотами собственных колебаний балки. В этом случае искомые управляющие воздействия имеют вид трудно реализуемых на практике рядов с высокочастотными гармониками по синусам и косинусам. Воспроизвести такие управляющие воздействия с необходимой точностью практически невозможно: даже незначительное отклонение реального времени управления от расчетного или весьма малые различия между собственными частотами реальной системы и ее математической модели могут привести к тому, что конечные условия для нормальных координат, которые должны быть нулевыми, не будут выполняться.

В работах [5–8] предложен альтернативный подход к определению силовых или кинематических управляющих воздействий для конечных передвижений упругой системы из одного состояния в другое за заданное время при гашении упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам в конечный момент времени. Для этого используются «простые» управляющие финитные функции с «настройкой» на них нескольких низших собственных частот колебаний системы.

В работах [8–10] решение линейной задачи терминального управления строят в нормальных координатах с разложением управляющей функции в ряд по синусам или косинусам с неизвестными коэффициентами, для которых алгебраические уравнения получают путем удовлетворения начальных и конечных условий для нормальных координат.

В данной статье на основании такого подхода приведено решение задачи о конечном поперечном перемещении стержня с массой на конце на заданное расстояние за заданное время при гашении в момент остановки упругих колебаний по первым трем низшим собственным формам колебаний. Эта же задача в [2] была решена с использованием разложения в ряды Фурье по высокочастотным гармоникам.

Постановка задачи. Будем рассматривать поперечные колебания в вертикальном направлении упругого стержня, консольно прикрепленного к подвижному основанию (рис. 1). Система имеет следующие параметры: EI и m — изгибная жесткость и масса 1 м стержня; μ_0 и μ_1 — масса подвижного основания и масса, присоединенная на конце стержня $x = l$. Перемещение левого конца стержня $x = 0$ и основания $v_0(t)$ отыскивают на интервале $0 \leq t \leq T$, где T — заданное время управляемого конечного перемещения, которое подчиняется начальным и конечным условиям:

$$\dot{v}_0(0) = v_0(0) = 0; \quad \dot{v}_0(T) = 0; \quad v_0(T) = v_T. \quad (1)$$

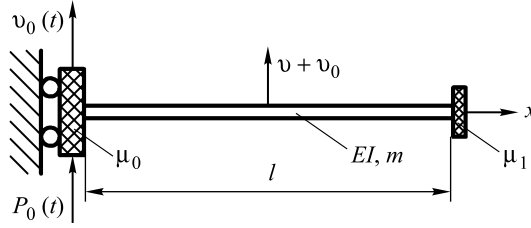


Рис. 1. Общий вид рассматриваемой системы

Дополнительное поперечное перемещение $v(\xi, t)$ в результате изгиба стержня представляют в виде разложения по собственным формам колебаний $V_n(\xi)$, $\xi = x/l$:

$$v(\xi, t) = \sum_n V_n(\xi) f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $f_n(t)$ — неизвестные нормальные координаты. Собственные формы колебаний неподвижно закрепленной консольной балки постоянного поперечного сечения с массой μ_1 на конце при нормировке $V_n(1) \equiv 1$ записывают в виде

$$V_n(\xi) = C_n (\cosh(\kappa_n \xi) - \cos(\kappa_n \xi)) - S_n (\sinh(\kappa_n \xi) - \sin(\kappa_n \xi));$$

$$C_n = \frac{\sinh(\kappa_n) + \sin(\kappa_n)}{\Delta_n}; \quad S_n = \frac{\cosh(\kappa_n) + \cos(\kappa_n)}{\Delta_n};$$

$$\Delta_n = 2(\cosh(\kappa_n) \sin(\kappa_n) - \sinh(\kappa_n) \cos(\kappa_n)).$$

Параметры κ_n для $n = 1, 2, \dots$ находят из частотного уравнения

$$1 + \cosh(\kappa) \cos(\kappa) - \frac{\mu_1}{ml} \kappa (\cosh(\kappa) \sin(\kappa) - \sinh(\kappa) \cos(\kappa)) = 0.$$

После этого определяют собственные частоты колебаний ω_n :

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{ml^4} \kappa_n^4, \quad n = 1, 2, \dots$$

Дифференциальные уравнения движения системы в нормальных координатах записывают в виде

$$m_n (\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n) = -m_{0n} \ddot{v}_0(t), \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$m_{0n} = l \int_0^1 m V_n d\xi + \mu_1 V_n(1); \quad m_n = l \int_0^1 m V_n^2 d\xi + \mu_1 V_n^2(1). \quad (3)$$

Реакция при конечном управляемом перемещении системы с массой $M_0 = \mu_0 + ml + \mu_1$ может быть найдена по выражению

$$P_0(t) = M_0 \ddot{v}_0 + \sum_n m_{0n} \ddot{f}_n. \quad (4)$$

При конечном перемещении рассматриваемой системы из состояния покоя при $t = 0$ и гашении N низших собственных форм колебаний в момент окончания операции $t = T$ получаем следующие терминальные условия для f_n :

$$\begin{aligned} \dot{f}_n(0) = f_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \\ \dot{f}_n(T) = f_n(T) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Вместо перемещения $v_0(t)$ в качестве неизвестной функции будем рассматривать ускорение основания $\ddot{v}_0(t)$:

$$\ddot{v}_0 = \frac{l}{T^2} \varphi(t), \quad (6)$$

где $\varphi(t)$ — безразмерная финитная функция при $0 \leq t \leq T$. С учетом (1) и (6) $\varphi(t)$ должна удовлетворять условиям [9, 10]

$$\int_0^T \varphi(t) dt = 0; \quad v_T = -\frac{l}{T^2} \int_0^T \varphi(t) t dt. \quad (7)$$

Из уравнений колебаний системы (3) с учетом (6) получаем:

$$\begin{aligned} f_n(t) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \int_0^t \varphi(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \quad \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ f_n(t) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \int_0^T \varphi(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \quad \text{при } t > T. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение в виде ряда по синусам. Представим функцию $\varphi(t)$ в виде ряда по синусам [9, 10], которые удовлетворяют начальным условиям (5):

$$\varphi(t) = \sum_k b_k \sin(k\Omega t); \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Здесь b_k — неизвестные коэффициенты разложения, подлежащие определению. Подставляя (9) в выражения (8), получаем:

$$\begin{aligned} f_n(t) = -\frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \sum_k b_k \frac{1}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2} \left[\sin(k\Omega t) - \frac{k\Omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \quad \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ f_n(t) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \left[\sin(\omega_n(t-T)) - \sin(\omega_n t) \right] \sum_k b_k \frac{k\Omega}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2} \quad \text{при } t > T. \end{aligned} \quad (10)$$

Для гашения N собственных форм колебаний в момент $t = T$ из конечных условий (5), а также с учетом второго выражения (7) получаем следующую систему $N + 1$ линейных уравнений для нахождения коэффициентов b_k , $k = 1, 2, \dots, N + 1$:

$$\sum_{k=1}^{N+1} b_k \frac{k\Omega}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2} = 0; \quad \sum_{k=1}^{N+1} \frac{b_k}{k} = \frac{2\pi}{l} v_T, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Таким образом, во всех суммах по k в выражениях (9) и (10) необходимо положить $k = 1, 2, \dots, N + 1$.

Приведем формулы для коэффициентов b_k системы (11) при $N = 1, 2, 3$.

Для $N = 1$

$$b_1 = \frac{8\pi v_T (\omega_1^2 - \Omega^2)}{3l\omega_1^2}; \quad b_2 = -\frac{4\pi v_T (\omega_1^2 - 4\Omega^2)}{3l\omega_1^2}.$$

Для $N = 2$

$$b_1 = \frac{3\pi v_T (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}{l\omega_1^2\omega_2^2}; \quad b_2 = -\frac{12\pi v_T (\omega_1^2 - 4\Omega^2)(\omega_2^2 - 4\Omega^2)}{5l\omega_1^2\omega_2^2};$$

$$b_3 = \frac{3\pi v_T (\omega_1^2 - 9\Omega^2)(\omega_2^2 - 9\Omega^2)}{5l\omega_1^2\omega_2^2}.$$

Для $N = 3$

$$b_1 = \frac{16\pi v_T (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)(\omega_3^2 - \Omega^2)}{5l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2};$$

$$b_2 = -\frac{16\pi v_T (\omega_1^2 - 4\Omega^2)(\omega_2^2 - 4\Omega^2)(\omega_3^2 - 4\Omega^2)}{5l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2};$$

$$b_3 = \frac{48\pi v_T (\omega_1^2 - 9\Omega^2)(\omega_2^2 - 9\Omega^2)(\omega_3^2 - 9\Omega^2)}{35l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2};$$

$$b_4 = -\frac{8\pi v_T (\omega_1^2 - 16\Omega^2)(\omega_2^2 - 16\Omega^2)(\omega_3^2 - 16\Omega^2)}{35l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2}.$$

Решение в виде ряда по косинусам. Функция $\varphi(t)$ может быть также представлена в виде ряда по косинусам [9, 10], которые удовлетворяют начальным условиям (5):

$$\varphi(t) = \sum_k a_k \cos\left(\frac{k\Omega}{2}t\right); \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 1, 3, \dots, \quad (12)$$

где a_k — неизвестные коэффициенты. Подставляя (12) в выражения для нормальной координаты (8), будем иметь

$$f_n(t) = \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} \sum_k a_k \frac{1}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2 / 4} \left[\cos(\omega_n t) - \cos\left(\frac{k\Omega}{2} t\right) \right] \text{ при } 0 \leq t \leq T;$$

$$f_n(t) = \frac{m_{0n}}{m_n} \frac{l}{T^2} [\cos(\omega_n(t-T)) + \cos(\omega_n t)] \sum_k a_k \frac{1}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2 / 4} \text{ при } t > T.$$

(13)

Для гашения N собственных форм колебаний в момент окончания операции из конечных условий (5) и второго выражения (7) получаем линейную систему $N+1$ уравнений для нахождения коэффициентов b_k , $k = 1, 3, \dots, 2N+1$:

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{2N+1} a_k \frac{1}{\omega_n^2 - k^2 \Omega^2 / 4} = 0; \quad \sum_{k=1,3,\dots}^{2N+1} \frac{a_k}{k^2} = \frac{\pi^2}{2l} v_T, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Таким образом, во всех суммах по k в выражениях (12) и (13) по аналогии с предыдущим случаем необходимо положить $k = 1, 3, \dots, 2N+1$.

Приведем формулы для коэффициентов a_k системы (14) при $N = 1, 2, 3$.

Для $N = 1$

$$a_1 = \frac{9\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - \Omega^2)}{64l\omega_1^2}; \quad a_3 = -\frac{9\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - 9\Omega^2)}{64l\omega_1^2}.$$

Для $N = 2$

$$a_1 = \frac{75\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - \Omega^2)(4\omega_2^2 - \Omega^2)}{2048l\omega_1^2 \omega_2^2};$$

$$a_3 = -\frac{225\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - 9\Omega^2)(4\omega_2^2 - 9\Omega^2)}{4096l\omega_1^2 \omega_2^2};$$

$$a_5 = \frac{75\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - 25\Omega^2)(4\omega_2^2 - 25\Omega^2)}{4096l\omega_1^2 \omega_2^2}.$$

Для $N = 3$

$$a_1 = \frac{1225\pi^2 v_T (4\omega_1^2 - \Omega^2)(4\omega_2^2 - \Omega^2)(4\omega_3^2 - \Omega^2)}{131072l\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2};$$

$$a_3 = -\frac{2205\pi^2 \nu_T (4\omega_1^2 - 9\Omega^2)(4\omega_2^2 - 9\Omega^2)(4\omega_3^2 - 9\Omega^2)}{131072l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2};$$

$$a_5 = \frac{1225\pi^2 \nu_T (4\omega_1^2 - 25\Omega^2)(4\omega_2^2 - 25\Omega^2)(4\omega_3^2 - 25\Omega^2)}{131072l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2};$$

$$a_7 = -\frac{245\pi^2 \nu_T (4\omega_1^2 - 49\Omega^2)(4\omega_2^2 - 49\Omega^2)(4\omega_3^2 - 49\Omega^2)}{131072l\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2}.$$

Примеры расчета. В качестве примера рассмотрим систему со следующими параметрами: $l = 2$ м; $\mu_0 = 5$ кг; $\mu_1 = 25$ кг; $m = 1,5$ кг/м; $EI = 4000$ Н · м²; $\nu_T = 3$ м; $T = 2$ с. Число гасимых собственных форм колебаний принимаем последовательно равным $N = 1, 2, 3$. При выбранных параметрах во всех расчетных случаях колебания консольного стержня с массой на конце остаются в рамках линейной теории, т. е. максимальный угол поворота поперечных сечений стержня $|\vartheta(\xi, t)| \approx |v'(\xi, t)| \leq 0,5$ рад.

Собственные частоты колебаний рассматриваемой системы таковы: $\omega_1 = 7,639$ рад/с; $\omega_2 = 200,490$ рад/с; $\omega_3 = 646,582$ рад/с; $\omega_4 = 1347,372$ рад/с.

В первом расчетном случае рассмотрим функцию $\varphi(t)$ в виде ряда по синусам (9). Коэффициенты b_k имеют следующие значения: для $N = 1$ $b_1 = 10,441$; $b_2 = -2,032$; для $N = 2$ $b_1 = 11,743$; $b_2 = -3,654$; $b_3 = -1,474$; для $N = 3$ $b_1 = 12,526$; $b_2 = -4,872$; $b_3 = -3,368$; $b_4 = 1,830$.

На рис. 2 показан вид функций $\varphi(t)$ в виде ряда (9) при $N = 1, 2, 3$. Здесь и далее на рисунках *сплошная линия* на графике соответствует значению $N = 1$, *пунктирная линия* — $N = 2$, *штрихпунктирная линия* — $N = 3$. На рис. 3 представлен график зависимости прогиба упругой балки на конце $v(1, t)$, на рис. 4 — график изменения реакции $P_0(t)$ при конечном перемещении упругой балки с массами μ_0 и μ_1 на концах.

Следует отметить, что в данном расчетном случае даже при $N = 1$ остаточные колебания при $t > T$ конца балки $v(1, t)$ по непогашенным собственным формам $n = 2, 3, \dots$ составляют менее 10^{-6} м, остаточная реакция $P_0(t)$ не превышает 0,05 Н.

Во втором расчетном случае функция $\varphi(t)$ представлена в виде ряда по косинусам (12). Приведем по аналогии значения коэффициентов a_k : для $N = 1$ $a_1 = 7,975$; $a_3 = -5,158$; для $N = 2$ $a_1 = 8,307$; $a_3 = -8,055$; $a_5 = -0,248$; для $N = 3$ $a_1 = 8,480$; $a_3 = -9,867$; $a_5 = -0,506$; $a_7 = 1,892$.

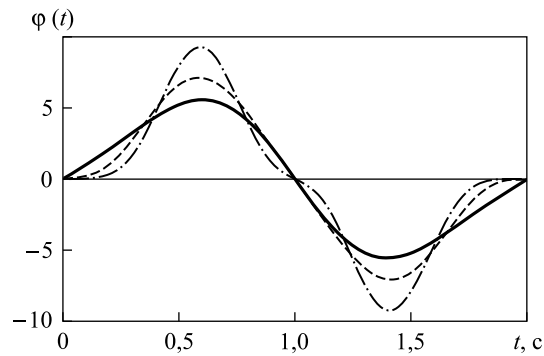


Рис. 2. Финитная функция в первом расчетном случае

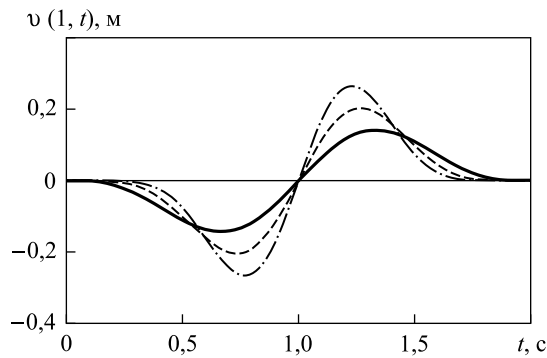


Рис. 3. Прогиб на конце балки в первом расчетном случае

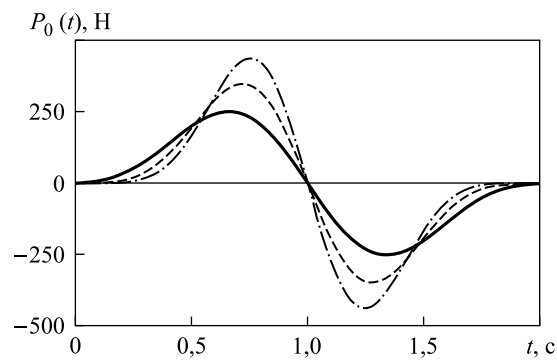


Рис. 4. Реакция системы в первом расчетном случае

На рис. 5 показан вид функций $\varphi(t)$ для $N = 1, 2, 3$, на рис. 6 — график зависимости прогиба упругой балки на конце $v(1, t)$, на рис. 7 — реакция $P_0(t)$ при конечном перемещении системы. В дан-

ном расчетном случае при $N = 1$ остаточные колебания при $t > T$ конца балки $v(1, t)$ по непогашенным собственным формам $n = 2, 3, \dots$ составляют менее 10^{-5} м, остаточная реакция $P_0(t)$ не превышает 0,001 Н.

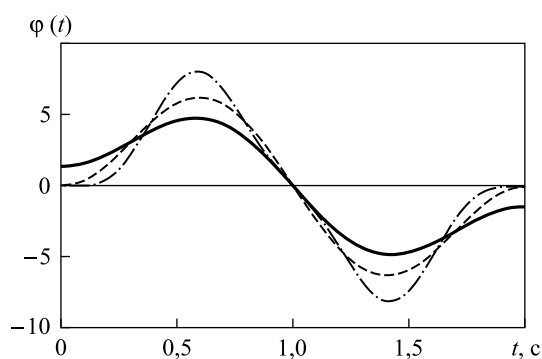


Рис. 5. Финитная функция во втором расчетном случае

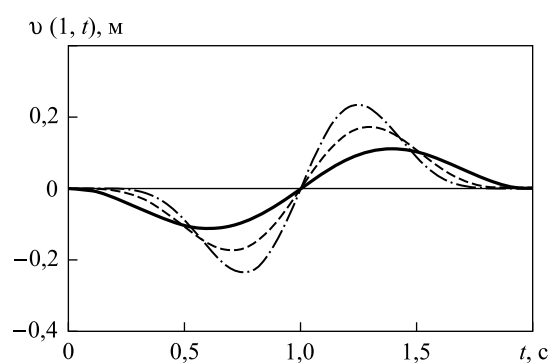


Рис. 6. Прогиб на конце балки во втором расчетном случае

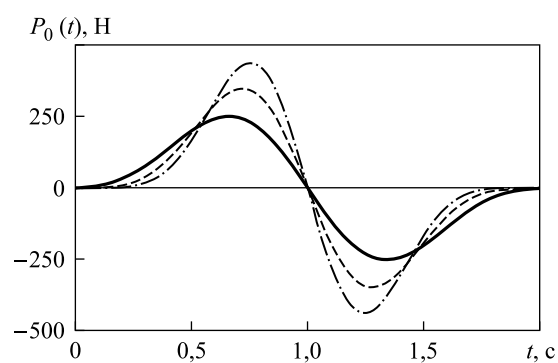


Рис. 7. Реакция системы во втором расчетном случае

В рассмотренном примере $T_1 = 2\pi/\omega_1 < T$, $\omega_2/\omega_1 \approx 26$, и поэтому низшая собственная форма оказывает доминирующее влияние на нестационарные колебания при передвижении балки за время T . В этом случае при гашении колебаний только по одной низшей собственной форме $n = N = 1$ остаточные колебания по непогашенным высшим формам $n = 2, 3, \dots$ оказываются весьма малыми.

Выводы.

1. Решена задача о гашении колебаний в момент остановки при конечном передвижении упругого стержня с массой на конце. Получены решения данной задачи в рядах по синусам и в рядах по косинусам. При гашении колебаний по N низшим собственным формам задача сводится к системе $N + 1$ линейных уравнений для коэффициентов этих рядов.

2. Рассмотрены примеры расчета остаточных колебаний системы после остановки ее передвижения при гашении различного числа ($N = 1, 2, 3$) низших собственных форм колебаний, эти колебания оценены.

Работа выполнена в рамках государственного задания (номер государственной регистрации темы АААА-А17-117032010144-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00778а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация*. Москва, Наука, 1989, 363 с.
- [2] Бербюк В.Б. *Динамика и оптимизация робототехнических систем*. Киев, Наукова Думка, 1989, 187 с.
- [3] Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. *Управление колебаниями*. Москва, Наука, 1976, 383 с.
- [4] Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. *Методы управления нелинейными механическими системами*. Москва, Физматлит, 2006, 326 с.
- [5] Гришанина Т.В. Управляемый поворот упругого стержня на конечный угол. *Вестник МАИ*, 2004, т. 11, № 1, с. 64–68.
- [6] Гришанина Т.В. Устранение колебаний упругой системы после ее быстрого передвижения и поворота. *Вестник МАИ*, 2004, т. 11, № 2, с. 68–75.
- [7] Гришанина Т.В. Динамика управляемого движения упругих систем при конечных перемещениях и поворотах. *Изв. РАН. МТТ*, 2004, № 6, с. 171–186.
- [8] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. Москва, Изд-во МАИ, 2007, 328 с.
- [9] Русских С.В. Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2016, № 12, с. 97–105.
- [10] Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Управление конечным поворотом упругой системы из одного состояния в другое с гашением коле-

баний в момент окончания операции. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*, 2017, т. 159, кн. 4, с. 429–443.

Статья поступила в редакцию 20.04.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Конечное поперечное передвижение упругого стержня с массой на конце при гашении колебаний в момент остановки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 7.
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-7-1786>

Русских Сергей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» МАИ (НИУ), старший научный сотрудник ИПРИМ РАН. Автор 35 опубликованных научных работ. Область научных интересов: механика и динамика деформируемого твердого тела, динамика упругих управляемых конструкций, динамика космических систем. e-mail: sergey.rusских@rambler.ru

Шклярчук Федор Николаевич — д-р техн. наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации. Главный научный сотрудник ИПРИМ РАН, профессор кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» МАИ (НИУ). Автор 215 опубликованных научных работ. Область научных интересов: механика и динамика деформируемого твердого тела, динамика упругих управляемых конструкций, динамика космических систем. e-mail: shklyarchuk@list.ru

Final transverse movement of an elastic rod with mass at the end when the vibrations are damped at the moment of stopping

© S.V. Russkikh^{1,2}, F.N. Shklyurchuk^{1,2}

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia

²Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, 125040, Russia

The article considers nonstationary transverse vibrations of an elastic cantilever rod with a mass at the right end under controlled displacement of the left end along a vertical guide. The flexural vibrations of the rod are sought in the form of eigenmode vibration expansion. The following problem is posed: to find the law of controlled movement of the left end of the rod, governing its movement to the required distance in a given time, while simultaneously several lower eigenforms of the elastic vibrations are damped at the moment of stopping. The acceleration of the left end of the rod is considered to be an unknown function. The acceleration is supposed to be proportional to some finite function. This function, in turn, is written in the form of a series of sines or cosines with unknown coefficients at a given time of controlled motion. Examples of calculation with damping of elastic vibrations in the first three eigenforms are given.

Keywords: elastic cantilever rod, normal coordinates, damping of elastic vibrations, finite function, finite displacements

REFERENCES

- [1] Chernousko F.L., Bolotnik N.N., Gradetsky V.G. *Manipulyatsionnye raboty: dinamika, upravlenie, optimizatsiya* [Manipulation robots: dynamics, management, and optimization]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 363 p.
- [2] Berbuk V.B. *Dinamika i optimizatsiya robototekhnicheskikh system* [Dynamics and optimization of robotic systems]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1989, 187 p.
- [3] Chernousko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. *Upravlenie kolebaniyami* [Control of vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 383 p.
- [4] Chernousko F.L., Ananyevsky I.M., Reshmin S.A. *Metody upravleniya nelineynymi mekhanicheskimi sistemai* [Methods of nonlinear mechanical system control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 326 p.
- [5] Grishanina T.V. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta (Scientific journal of Moscow Aviation Institute)*, 2004, vol. 11, no. 1, pp. 64–68.
- [6] Grishanina T.V. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta (Scientific journal of Moscow Aviation Institute)*, 2004, vol. 11, no. 2, pp. 68–75.
- [7] Grishanina T.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids*, 2004, no. 6, pp. 171–186.
- [8] Grishanina T.V., Shklyurchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravlyaemykh konstruksiy* [Dynamics of elastic controllable structures]. Moscow, MAI Publ., 2007, 328 p.
- [9] Russkikh S.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2016, no. 12, pp. 97–105.
- [10] Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyurchuk F.N. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki — Proceeding of Kazan University. Physics and Mathematics Series*, 2017, vol. 159, book 4, pp. 429–443.

Russkikh S.V., Cand. Sc. (Phys. & Math.), Assoc. Professor, Department of Design and Strength of Aeronautical Missile and Space Products, Moscow Aviation Institute (National Research University), Senior Research Fellow, Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences. Author of 35 research publications. Research interests: mechanics and dynamics of a deformable rigid body, dynamics of elastic controllable structures, dynamics of space systems. e-mail: sergey.russkih@rambler.ru

Shklyarchuk F.N., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, Chief Research and Development Officer, Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Professor of the Department of Design and Strength of Aeronautical Missile and Space Products, Moscow Aviation Institute (National Research University). Author of 215 research publications. Research interests: mechanics and dynamics of a deformable rigid body, dynamics of elastic controllable structures, dynamics of space systems. e-mail: shklyarchuk@list.ru