УДК 517.9

С. И. Шишкина

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрен вычислительный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений для нелинейной краевой задачи на основе метода продолжения по параметру в непрерывной форме с дальнейшим уточнением по методу Ньютона. Изучены основные свойства используемых функций, приведены результаты расчета для задачи о быстрейшей остановке вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

E-mail: shish-bmstu@mail.ru

Ключевые слова: *система дифференциальных уравнений, нелинейная задача быстродействия, метод возмущений.*

Важным звеном, связывающим технические задачи с теоретическими исследованиями, является разработка численных методов для решения поставленных задач. Рассмотрим вычислительный алгоритм для модели, в которую вкладывается задача о быстрейшей остановке вращения твердого тела вокруг неподвижной точки при помощи трех двигателей.

Пусть объект управления описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x) + u$, где $f(x)$ — гладкая нелинейная векторная функция, $f(0) = 0$, x — вектор фазовых координат, u — управление, x, $u \in E^n$, $u \in U$, область управления U — гладкий выпуклый компакт, принадлежащий классу $\Gamma(E^n)$ [1].

Введем вспомогательную переменную, удовлетворяющую сопряженной к исходной системе дифференциальных уравнений, $\psi \in E^n$:

$$\dot{\psi} = -f'^T(x)\psi.$$

Задача о быстрейшей остановке вращений твердого тела вокруг неподвижной точки при помощи трех двигателей [2] имеет вид (1) при $n = 3$ и $f(x) = (c_1x_2x_3, c_2x_1x_3, c_3x_1x_2)^T$.

Рассмотрим нелинейную задачу быстродействия

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + u, \\ x(0) = a, \\ x(T) = 0, \\ T \to \min\limits_u . \end{cases} \qquad (1)$$

Введем обозначения: $c(\psi) = \max\limits_{u\in U}(\psi, u)$ — опорная функция компакта U; $\psi \in E^n$; $c'(\psi)$ — градиент опорной функции; $h(x, \psi) = (\psi, f(x)) + c(\psi) \equiv \psi^T[f(x) + c'(\psi)]$.

Применение принципа максимума Понтрягина в задаче (1) приводит к системе дифференциальных уравнений для нелинейной краевой задачи

$$\begin{cases} \dot{x} = h'_\psi(x,\psi) \equiv f(x) + c'(\psi), \\ \dot{\psi} = -h'_x(x,\psi) \equiv -f'^T(x)\psi, \\ x(0) = a, \\ x(T) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

В этой задаче необходимо найти неизвестное время $T > 0$ и граничное значение $p = \psi(0)$ сопряженной переменной, подчиненное условию нормировки $\|p\| = 1$. Эти параметры p, T будем называть решениями краевой задачи (2). Определив эти параметры, мы сведем краевую задачу к задаче Коши.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = h'_\psi(x,\psi), \\ \dot{\psi} = -h'_x(x,\psi), \\ x(0) = a, \\ \psi(0) = p \end{cases} \tag{3}$$

для уравнений принципа максимума. Решение этой задачи обозначим

$$x(a,p,T), \quad \psi(a,p,T), \tag{4}$$

$a, p \in E^n, p \neq 0$. Введем квадратную матрицу порядка $2n$ производных решения (4) по начальным условиям

$$\Theta(a,p,T) = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial a} & \dfrac{\partial \psi}{\partial p} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Матрица (5) является решением следующей задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения

$$\dot{\Theta} = H(a,p,t)\Theta, \quad \Theta(0) = E_{2n}, \tag{6}$$

где E_{2n} — единичная матрица порядка $2n$, матрица

$$H(a,p,t) = \begin{pmatrix} A & B \\ -D & -A^T \end{pmatrix};$$

квадратные матрицы порядка n

$$A = f'(x), \quad B = c''(\psi), \quad D = (\psi, f(x))''_{xx}$$

вычисляются на решении (4). Таким образом, матрицы (6) зависят от аргументов a, p, t, матрицы B и D симметричны. В дальнейших построениях участвуют блоки

$$\Theta_{12}(a,p,t), \quad \Theta_{22}(a,p,t), \tag{7}$$

матрицы (5) и n-мерная векторная функция

$$y(a,p,t;a_1) = \Theta_{11}\,(a,p,t)a_1, \quad a_1 \in E^n. \tag{8}$$

Функции (8) определяются матричной задачей Коши

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Theta_{12}\\ \Theta_{22}\end{pmatrix} = H(a,p,t)\begin{pmatrix}\Theta_{12}\\ \Theta_{22}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\Theta_{12}\\ \Theta_{22}\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix}O_n\\ E_n\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Функция (9) также определяются матричной задачей Коши

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y\\ \chi\end{pmatrix} = H(a,p,t)\begin{pmatrix}y\\ \chi\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}y\\ \chi\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix}a_1\\ 0\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\chi = \chi(a,p,t;a_1) = \Theta_{21}(a,p,t)a_1$. Размерность задачи (10) вдвое меньше размерности задачи (6).

Рассмотрим алгоритм решения системы дифференциальных уравнений для краевой задачи (2) на основе метода возмущений, применяемого в сочетании с методом Ньютона. Для применения метода Ньютона требуется “достаточно хорошее” нулевое приближение, которое обычно неизвестно. Для выработки такого нулевого приближения используется метод возмущений. В случае линейной задачи быстродействия с гладкой областью управления такая методика оказывается вполне работоспособной [1]. Схема продолжения по параметру в непрерывной форме для нелинейной краевой задачи (2) рассмотрена в [3]. Здесь рассмотрим схемы продолжения по параметру для нелинейной краевой задачи (2) (в симметричной и несимметричной формах) и их дискретные аналоги. Эти схемы учитывают специфику системы и отличаются от классического варианта нормировкой вектора p начального значения сопряженной переменной. Условие применимости рассматриваемых методов (гладкость функций $f(x)$, $c(\psi)$, продолжимость решения задачи Коши (3), существование решения краевой задачи (2) и обратимость некоторых матриц) выполняются в рассматриваемых примерах, и предлагаемые методы оказываются работоспособными.

При построении вычислительных алгоритмов важную роль играют свойства решений задачи (3). Их использование позволяет в нелинейном случае добиться заметной аналогии с линейным случаем $f(x) = Ax$, который исследован достаточно подробно.

1. Функция $h(x,\psi)$ является первым интегралом системы (3):

$$h(x(a,p,t), \quad \psi(a,p,t)) \equiv h(a,p).$$

2. Решения являются положительно однородными:

$$x(a,\lambda p,t) = x(a,p,t), \;\; \psi(a,\lambda p,t) = \lambda\psi(a,p,t), \quad \lambda = \mathrm{const} > 0.$$

3. Имеют место равенства:

$$\psi^T(a,p,T)\Theta_{12}(a,p,T)=0,$$
$$\Theta_{12}(a,p,T)p=0, \quad \Theta_{22}(a,p,T)p=\psi(a,p,T).$$

4. Матрица $\Theta_{22}^T\Theta_{12}$ симметрична:

$$\Theta_{12}^T\Theta_{22}=(\Theta_{22}^T\Theta_{12})^T=\Theta_{22}^T\Theta_{12}.$$

Если $\operatorname{rank}\Theta_{12}(a,p,T)=n-1$, то является невырожденной матрица $\Theta_{12}(a,p,T)+\psi(a,p,t)p^T$, где $\psi(a,p,t)\neq 0$ при $p\neq 0$.

Отмеченные свойства позволяют построить вычислительные схемы решения краевой задачи в весьма естественной форме.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений для краевой задачи

$$\begin{cases} \dot{x}=h'_\psi(x,\psi), \\ \dot{\psi}=-h'_x(x,\psi), \\ x(0)=a(\varepsilon)\equiv\bar{a}+\varepsilon(a_0-\bar{a}), \\ x(T)=0, \end{cases} \tag{11}$$

зависящую от параметра ε, здесь $\varepsilon\in[0,1]$, $a(\varepsilon)\neq 0$, $a'(\varepsilon)\equiv a_0-\bar{a}\neq 0$. Пусть

$$p(\varepsilon), \quad T(\varepsilon); \quad \|p(\varepsilon)\|=1, \quad T(\varepsilon)>0 \tag{12}$$

— решение задачи (14). Предположим, что решение (15) при $\varepsilon=0$ известно:

$$p=\bar{p}, \quad T=\bar{T}; \quad \|\bar{p}\|=1, \quad \bar{T}>0.$$

Функции (15) являются решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{d\varepsilon}=-\dfrac{\psi^T(a,p,T)y(a,p,T;a')}{c(\psi(a,p,T))}, \\ \dfrac{dp}{d\varepsilon}=-[\Theta_{12}(a,p,T)+\psi(a,p,t)p^T]^{-1}\Pi(a,p,T)y(a,p,T;a'), \\ T(0)=\bar{T}, \\ p(0)=\bar{p}, \end{cases} \tag{13}$$

здесь $\varepsilon\in[0,1]$, квадратная матрица порядка n

$$\Pi(a,p,T)=E-\frac{c'(\psi(a,p,T))\psi^T(a,p,T)}{c(\psi(a,p,T))}; \tag{14}$$

n-мерный вектор $y(a,p,T;a')$ (т.е. вектор (9) при $t=T$, $a_1=a'$) вычисляется при решении задачи Коши (11). Второе уравнение в задаче (16) можно заменить уравнением

$$\frac{dp}{d\varepsilon}=-[\Theta_{22}^T(a,p,T)\Theta_{12}(a,p,T)+pp^T]^{-1}\Theta_{22}^T(a,p,T)\Pi(a,p,T)y(a,p,T;a'), \tag{15}$$

в котором обращаемая матрица симметрична.

Таким образом, решение задачи (14) при $\varepsilon = 1$ может быть вычислено при помощи несимметричной схемы (16), либо при помощи симметричной схемы продолжения с матрицей (18). Условием применимости той или иной схемы является обращаемость матриц в уравнениях.

При численном решении задачи Коши (16) происходит накопление вычислительной погрешности, устранение которой может быть выполнено по схеме уточнения с использованием метода Ньютона. Следить за возникающей погрешностью можно, вычисляя в ходе процесса невязку $R(\varepsilon) = \left\|x\big(a(\varepsilon), p(\varepsilon), T(\varepsilon)\big)\right\|$. Если невязка $R(\varepsilon)$ превышает некоторое значение $R_0 > 0$, то приближенное решение $p(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ уточняется при фиксированном ε. Параметр R_0 выбираем так, чтобы уточняющий процесс сходился.

Рассмотрим дискретную схему продолжения для краевой задачи (2).

Пусть отрезок $[\bar{a}, a]$ не содержит 0. Разобьем этот отрезок на N равных частей точками $a_i = \bar{a} + i/N \cdot a'$, $i = 0, 1, \ldots, N$; $a' \equiv a - \bar{a} \neq 0$.

Соседние точки этого разбиения связаны зависимостью $a_{i+1} = a_i + \Delta\varepsilon a'$, $\Delta\varepsilon = 1/N$; здесь $\Delta\varepsilon$ — введенный искусственно малый параметр. Предполагаем, что для точки $a_0 \equiv \bar{a}$ известно решение $\bar{T} = T_0$, $\bar{p} = p_0$. Далее производится последовательное вычисление приближенного решения при переходе от точки a_i к точке a_{i+1} на основе метода возмущений:

$$p_{i+1} = \frac{(p_i + \Delta\varepsilon \cdot \Delta p_i)}{\|p_i + \Delta\varepsilon \cdot \Delta p_i\|}, \quad T_{i+1} = T_i + \Delta\varepsilon \cdot \Delta T_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

После выполнения N шагов будет построено приближенное решение p_N, T_N для точки $a_N \equiv a$, причем $\|x(a_N, p_N, T_N)\| = O(1/N)$. Полученное приближенное решение p_N, T_N задачи (2) уточняется методом Ньютона. Процедура уточнения может применяться и для промежуточных точек a_i в зависимости от величины невязки $\|x(a_i, p_i, T_i)\|$.

В задаче о быстрейшей остановке вращений твердого тела вокруг неподвижной точки при помощи трех двигателей в случае, когда $c_1 = -1/5$, $c_2 = 2/3$, $c_3 = -1/2$, $x(0) = (1, 1, 1)^T$, область управления представляет собой эллипсоид $U = \{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant 1\}$, при расчетах на ЭВМ было получено: оптимальное время $T_{on} = 1{,}732051$, погрешность $D = \|x(a, p_{on}, T_{on})\| = 0{,}64227 \cdot 10^{-11}$. При этом малый параметр $\varepsilon = 1/100$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К и с е л е в Ю. Н. Линейная теория быстродействия с возмущениями. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 106 с.
2. А т а н с М., Ф а л б П. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – 240 с.
3. К и с е л е в Ю. Н. Схема продолжения по параметру для нелинейной краевой задачи принципа максимума // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 1990. – № 2. – С. 52–54.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012