

Нелинейные колебания механических систем с одной и двумя степенями свободы

© Д.А. Гришко, В.В. Лапшин, Е.С. Студенников,
А.Н. Тарасенко, В.В. Леонов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследованы нелинейные свободные и вынужденные колебания трех механических систем с одной и двумя степенями свободы. Математическая модель движения получена с помощью уравнений Лагранжа II рода, которые далее сведены к форме Коши и численно проинтегрированы методом Рунге — Кутты четвертого порядка с учетом того, что действующие на систему силы не зависят от вторых производных обобщенных координат. Рассмотрены системы, типовыми элементами которых являются кривошипно-шатунный механизм, ползун, физический маятник, пружина, демпфер и планетарная передача. Для колебательной системы с планетарной передачей определены количество положений равновесия и характер их устойчивости. При исследовании динамики систем использованы фазовый портрет колебаний и амплитудно-частотная характеристика. Построение последней заметно упрощается, если собственные частоты системы оценены по линеаризованным моделям.

Ключевые слова: уравнения Лагранжа, нелинейные колебания, математическое моделирование, метод Рунге — Кутты, фазовый портрет, механическая система, амплитудно-частотная характеристика

Введение. Начиная с середины XX в. в теоретической механике усиленно развивается направление, связанное с нелинейными колебаниями механических систем, в том числе имеющих несколько степеней свободы. Эту тенденцию обусловили несколько факторов:

1) создание математических основ, представленных в работах по теории устойчивости [1] и по асимптотическим методам в нелинейных колебаниях [2, 3];

2) изучение технических систем с большей аккуратностью, не достижимой при использовании линейных методов, в связи с резким их усложнением;

3) возможность моделирования сложных систем с использованием численного интегрирования уравнений движения вследствие появления первых ЭВМ.

Работа [4] — одна из первых по двухстепенным нелинейным системам на основе методов Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского. В ней рассмотрены консервативные квазилинейные системы и описано приближенное аналитическое решение их уравнений движения. В дальнейшем нелинейные колебания изучались в нескольких вариантах постановки задачи. Например, исследована двухстепенная система, состоящая из пружины, демпфера и платформы, на кото-

рой установлен электродвигатель с неуравновешенным ротором [5], рассмотрены нелинейные колебания маятника с колеблющейся точкой подвеса [6], решена аналогичная задача с учетом сил сухого трения, упругих и вязких сил [7]. Практический интерес представляют полигармонические воздействия на нелинейную систему с учетом квадратичных и кубических зависимостей силы упругости от деформации для реальной пружины [8, 9], а также нелинейные колебания элементов двухступенных конструкций под действием потока жидкости или газа [10, 11]. Отдельные типы нелинейных колебаний рассмотрены в [12, 13]. Внимания заслуживают также экспериментальные установки для изучения нелинейных колебаний [14].

В настоящей статье рассмотрены свободные и вынужденные нелинейные колебания на примерах трех механических систем. Цель исследования — анализ особенностей их нелинейного движения и поиск резонансных режимов. Выбранные системы содержат классические для теоретической механики элементы, такие, как кривошипно-шатунный механизм, ползун, физический маятник, пружина, демпфер и планетарная передача. Для описания движения использованы уравнения Лагранжа II рода, которые для механических систем с наложенными идеальными голономными связями имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

где T — кинетическая энергия механической системы, в общем случае являющаяся функцией обобщенных координат, скоростей и времени [15, 16]; q_i ($i = 1, 2, \dots, s$) — обобщенные координаты; Q_i ($i = 1, 2, \dots, s$) — обобщенные силы.

Предполагается, что силы, действующие на механическую систему, зависят от времени, координат точек и их скоростей.

Уравнения в форме (1) можно разрешить относительно обобщенных ускорений и привести к форме Коши [17], за исключением тех случаев, когда координаты принимают значения, соответствующие особым точкам. Полученная система дифференциальных уравнений второго порядка является нелинейной и не имеет аналитического решения. Вместе с тем она однозначно описывает динамику исследуемой механической системы. Решение уравнений системы можно получить путем их численного интегрирования на ЭВМ с помощью широко известного метода Рунге — Кутты четвертого порядка [18], обеспечивающего необходимую точность решения и обладающего свойством самостартования.

Собственные колебания консервативной системы с одной степенью свободы. Механическая система № 1 (рис. 1) представляет со-

бой планетарную передачу, в которой шестерня 1 массой m_1 и радиусом r обкатывает неподвижное колесо 3 радиусом R без проскальзывания. Механизм расположен в вертикальной плоскости. Центры колеса и шестерни связаны между собой водилом 2 массой m_2 . Стержень 2 соединен с неподвижным колесом 3 спиральной пружины жесткости c , недеформированному состоянию которой соответствует вертикальное положение стержня.

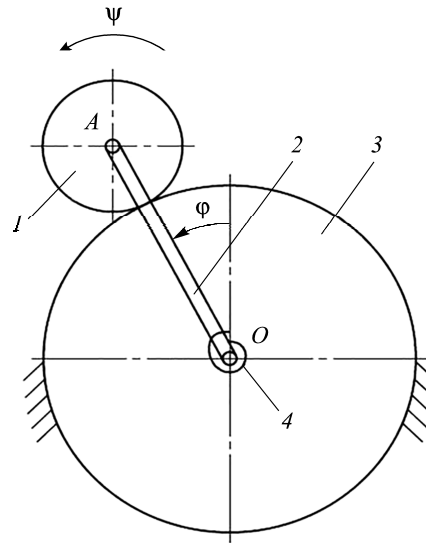


Рис. 1. Схема механической системы № 1

Предполагается, что шестерня 1 является однородным сплошным цилиндром, а водило 2 — однородным стержнем. Данная механическая система имеет одну степень свободы, ее положение определяется обобщенной координатой φ — углом отклонения водила 2 от вертикали.

Кинетической энергией в данной задаче обладают шестерня 1 и стержень 2. Шестерня совершает плоское движение, поэтому в соответствии с теоремой Кенига [16, 17] необходимо найти кинетическую энергию движения ее центра масс и кинетическую энергию ее вращения вокруг центра масс. Скорость центра шестерни, который также принадлежит вращающемуся стержню 2, определяется выражением $v_A = \dot{\varphi}(R+r)$. Одновременно шестерня катится по неподвижному колесу без проскальзывания, поэтому с учетом известного положения мгновенного центра скоростей ее угловая скорость при качении $\dot{\psi}$ и скорость ее центра связаны соотношением $v_A = \dot{\psi}r$, следовательно,

$$\dot{\psi} = \frac{r+R}{r} \dot{\varphi}.$$

Кинетическая энергия шестерни:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} J_1^{Az} \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}^2 (R+r)^2 + \frac{1}{4} m_1 (\dot{\psi} r)^2.$$

Стержень совершает вращательное движение, поэтому его кинетическая энергия определяется выражением

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2^{O_z} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m_2 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Подставив T_1 в выражение для $\dot{\psi}$ и добавив значение T_2 , записываем кинетическую энергию всей механической системы:

$$T = \frac{(r+R)^2}{12} (9m_1 + 4m_2) \dot{\varphi}^2. \quad (2)$$

Поскольку действующие на систему активные силы потенциальные, потенциальная энергия Π определяется уравнением

$$\Pi = - (m_1 + 0,5m_2)g(R+r)(1 - \cos \varphi) + \frac{c\varphi^2}{2},$$

а обобщенная сила по координате φ :

$$Q_\varphi = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (m_1 + 0,5m_2)g(R+r) \sin \varphi - c\varphi. \quad (3)$$

С учетом выражений (2), (3) уравнение Лагранжа II рода принимает вид

$$(9m_1 + 4m_2) \frac{(r+R)^2}{6} \ddot{\varphi} = (m_1 + 0,5m_2)g(R+r) \sin \varphi - c\varphi$$

и является уравнением нелинейных свободных колебаний рассматриваемой консервативной механической системы.

Остановимся подробнее на вопросе о количестве положений равновесия данной системы и типе их устойчивости. Положения равновесия являются критическими точками потенциальной энергии системы [19], следовательно, правая часть уравнения (3) в них равна нулю. Введя обозначение $k = \frac{c}{(m_1 + 0,5m_2)g(R+r)}$, уравнение (3)

можно свести к виду

$$\sin \varphi = k\varphi. \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет тривиальное решение $\varphi = 0$. При $k > 1$ (сильная пружина) это положение равновесия будет устойчивым и других решений уравнения (4) нет. При $k = 1$ устойчивость единственного положения равновесия сохраняется за счет положительного значения суммы членов высокого порядка малости при разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия. При $k < 1$ уравнение (4) имеет нечетное количество решений (рис. 2), при этом тривиальное решение $\varphi = 0$ соответствует неустойчивому положению равновесия.

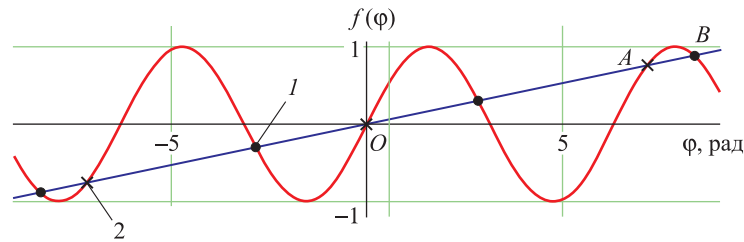


Рис. 2. Графическое решение уравнения (4) для случая с семью положениями равновесия:
1 — устойчивого; 2 — неустойчивого

Потенциальная энергия в данной задаче — четная функция, поэтому вид этой функции показан только при $\varphi \geq 0$ (рис. 3). Точки минимума функции потенциальной энергии соответствуют устойчивым положениям равновесия, а точки максимума и точки перегиба — неустойчивым положениям равновесия.

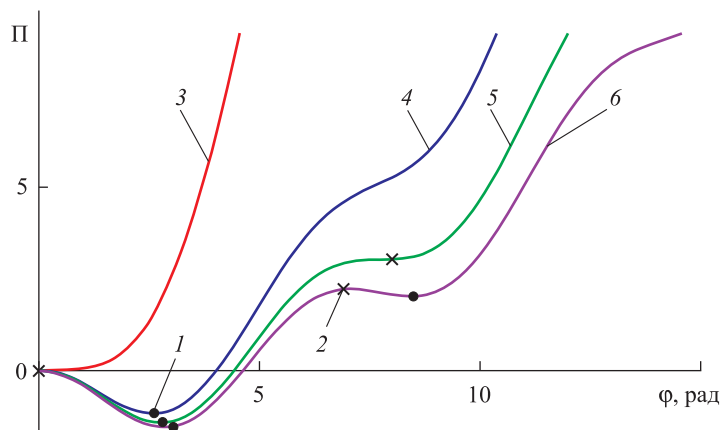


Рис. 3. Зависимость потенциальной энергии от обобщенной координаты φ при $\varphi \geq 0$:

положения равновесия: 1 — устойчивое; 2 — неустойчивое; 3 — $k \geq 1$, положение равновесия единственное и устойчивое; 4 — три положения равновесия; 5 — случай касания прямой $k\varphi$ с синусоидой, уравнение (5) имеет пять решений, в точке перегиба — положение неустойчивого равновесия; 6 — семь положений равновесия

Характер движения системы можно описать с помощью фазового портрета, на котором показана зависимость обобщенной скорости от обобщенной координаты. Уравнение фазовых траекторий представляет собой интеграл энергии системы: $T + \Pi = \text{const}$. Они могут охватывать как одно, так и несколько положений равновесия. По отличию наблюдаемого фазового портрета системы от теоретического можно судить о появлении различных дефектов конструкции элементов механической системы [20].

Фазовые траектории показаны (рис. 4) для случая с семью положениями равновесия (см. рис. 2) для разных начальных условий. На рис. 4 видно, что для выбранных параметров системы имеются четыре устойчивых (особая точка типа «центр») и три неустойчивых (особая точка типа «седло») положений равновесия. Вследствие малой жесткости пружины вертикальное положение при $\varphi = 0$ является неустойчивым. При малых отклонениях начальных условий от устойчивых положений равновесия фазовые траектории являются эллипсами с точностью до малых первого порядка.

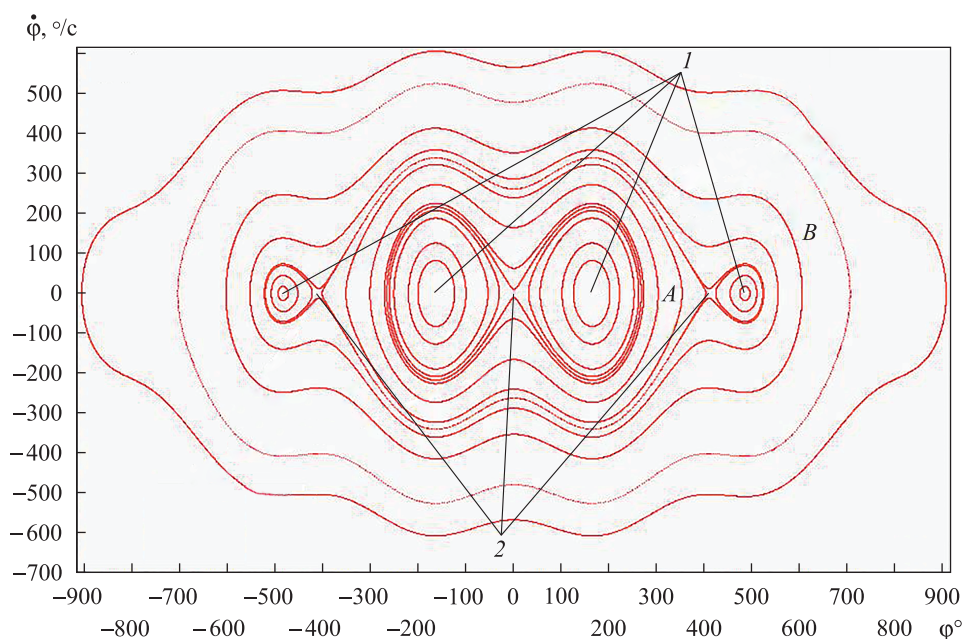


Рис. 4. Фазовый портрет нелинейных колебаний системы № 1 с семью положениями равновесия ($m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $r = 0,5$ м; $R = 1$ м; $c = 1$ Н/м)*:
положения равновесия: 1 — устойчивые; 2 — неустойчивые

Среди кривых потенциальной энергии (см. рис. 3) выделяются имеющие точку перегиба, которая соответствует неустойчивому положению равновесия (на рис. 2 этому соответствует касание прямой $k\varphi$ с синусоидой при $k < 1$). Составлен фазовый портрет такого случая с пятью положениями равновесия (рис. 5). Из сравнения фазовых портретов видно, что при сближении точек A и B на рис. 2 и рис. 4 тип устойчивости крайних положений равновесия зависит от того, с какой стороны фазовая траектория подходит к особой точке. Так, при значениях φ справа от точки B фазовые траектории, обходящие

* Начиная с рис. 4 все угловые координаты приведены в градусах для удобства восприятия.

крайнюю особую точку, ведут себя как дуги эллипсов, что характерно для особой точки типа «центр», а при обходе этой точки слева — как гиперболы, что соответствует особой точке типа «седло».

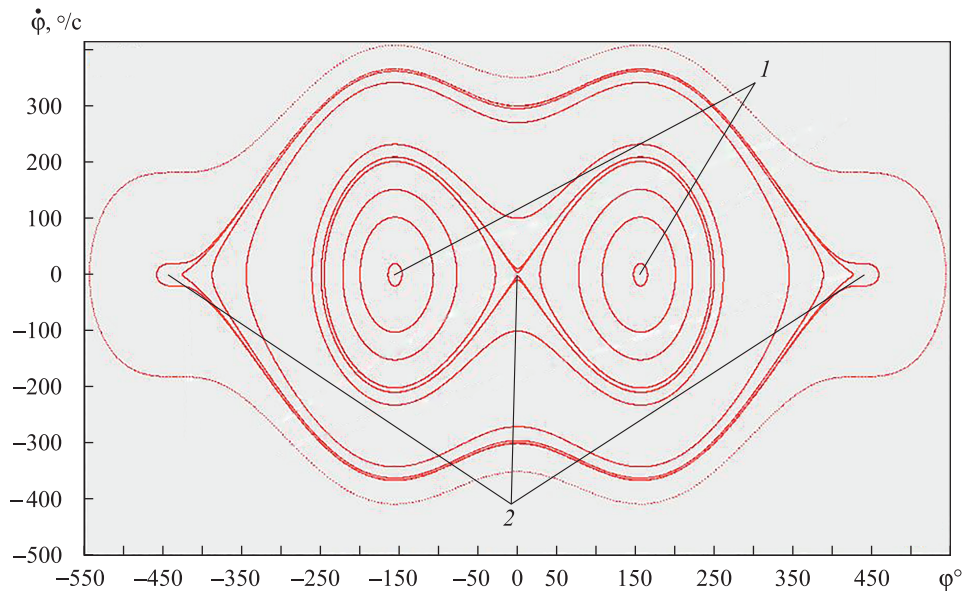


Рис. 5. Фазовый портрет нелинейных колебаний системы № 1 с пятью положениями равновесия ($m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $r = 0,5$ м; $R = 1$ м; $c = 3,775$ Н/м):
положения равновесия: 1 — устойчивые; 2 — неустойчивые

Свободные колебания механической системы с двумя степенями свободы. Механическая система № 2 (рис. 6) состоит из кривошипа 1, шатуна 2, ползуна 3, пружины 4 и катка 5. Предполагается, что качение катка происходит без проскальзывания. Массы шатуна 2 и пружины 4 приняты равными нулю, длины кривошипа и шатуна равны между собой. Система имеет две степени свободы, ее положение определяется двумя обобщенными координатами: углом отклонения кривошипа от вертикали ϕ и координатой центра катка s . При $\phi = 0$ и $s = 0$ пружина не деформирована. Кривошип 1 является однородным стержнем массы m_1 и длины l , каток 5 — однородным диском массы m_5 , его радиус r . Механизм расположен в вертикальной плоскости.

Звено 1 совершает вращательное движение, его кинетическая энергия определяется выражением

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1^{O_z} \dot{\phi}^2 = \frac{1}{6} m_1 l^2 \dot{\phi}^2.$$

Звено 2 не имеет массы, поэтому его кинетическая энергия равна нулю. Звено 3 совершает поступательное движение. Координата x_B

точки B равна: $x_B = 2l \sin \varphi$. Тогда скорость ползуна $v_B = \dot{x}_B = 2\dot{\varphi} l \cos \varphi$. Кинетическая энергия звена 3 равна:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_B^2 = 2m_3 \dot{\varphi}^2 l^2 \cos^2 \varphi.$$

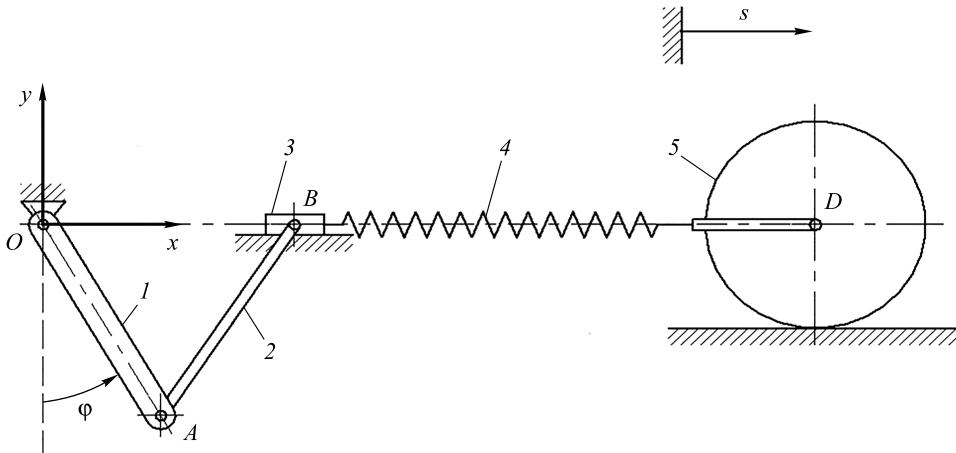


Рис. 6. Схема механической системы № 2

Звено 5 представляет собой однородный каток массой m_5 , который катится без проскальзывания, его угловая скорость $\omega_5 = \frac{\dot{s}}{r}$. Для нахождения его кинетической энергии при плоском движении используем теорему Кенига [16, 17]:

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_D^2 + \frac{1}{2} J_5^{Dz} \omega_5^2 = \frac{3}{4} m_5 \dot{s}^2.$$

Кинетическую энергию всей механической системы можно определить как сумму T_1 , T_3 и T_5 :

$$T = \frac{1}{6} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2 + 2m_3 \dot{\varphi}^2 l^2 \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} m_5 \dot{s}^2. \quad (5)$$

Далее определяем обобщенные силы, входящие в правую часть уравнения (1). Из всех внешних сил, действующих на систему, работу совершают сила упругости и сила тяжести, которые являются потенциальными. Следовательно, обобщенные силы можно определить через потенциальную энергию, как это было показано ранее. Однако в данной задаче используем общий подход к нахождению обобщенных сил через виртуальную работу активных сил.

При $\delta\varphi = 0$, $\delta s > 0$ положение звеньев 1, 2 и 3 оказывается «замороженным» и только звено 5 может двигаться, деформируя пружину 4. Деформация растяжения пружины $\Delta = s - 2l \sin \varphi$, следовательно,

$$Q_s = \frac{-c(s - 2l \sin \varphi) \delta s}{\delta s} = -c(s - 2l \sin \varphi). \quad (6)$$

При $\delta\varphi > 0$, $\delta s = 0$ работу совершают и сила тяжести кривошипа 1, и сила упругости пружины. Учитывая, что $\delta x_B = 2l \cos \varphi \delta\varphi$ и $\delta y_c = \frac{l}{2} \sin \varphi \delta\varphi$, получаем

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \frac{c(s - 2l \sin \varphi) 2l \cos \varphi \delta\varphi}{\delta\varphi} + \frac{-m_1 g \frac{l}{2} \sin \varphi \delta\varphi}{\delta\varphi} = \\ &= 2c(s - 2l \sin \varphi) l \cos \varphi - m_1 g \frac{l}{2} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя полученные результаты (5)–(7), а также общий вид уравнения (1), составим уравнения Лагранжа II рода:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m_5 \ddot{S} = -c(s - 2l \sin \varphi); \\ \frac{1}{3} m_1 l^2 \ddot{\varphi} + 4m_3 \dot{\varphi} l^2 \cos^2 \varphi - 4m_3 \dot{\varphi}^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi = \\ = 2csl \cos \varphi - 4cl^2 \cos \varphi \sin \varphi - m_1 g \frac{l}{2} \sin \varphi. \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) легко разрешается относительно старших производных и сводится к задаче Коши, что позволяет получить ее решение с помощью численного интегрирования.

В качестве примера рассмотрим два варианта начальных условий при следующих параметрах системы: масса всех весомых звеньев равна 1 кг, длина звеньев кривошипно-шатунного механизма — 1 м, жесткость пружины $c = 100$ Н/м.

В первом случае катку за счет внешнего воздействия сообщалась малая скорость (0,1 м/с) при нулевых значениях обобщенных координат. Последующие изменения обобщенных координат представлены в виде графиков (рис. 7). Движение по обеим координатам представляет собой малые колебания с наложением высокочастотной и низкочастотной составляющих. С увеличением жесткости пружины высокочастотные колебания становятся менее заметными. Увеличение масс кривошипа и ползуна 3 приводит к усилению высокочастотных колебаний по обеим координатам. В случае преобладания массы кат-

ка колебания высокой частоты пропадают у координаты s , но остаются у координаты φ . Отметим, что колебания (см. рис. 7) являются малыми. За счет линеаризации уравнений движения можно найти значения собственных частот (12,66 рад/с и 0,97 рад/с) и получить приближенное решение системы (8), которое будет мало отличаться от численного решения (см. рис. 7).

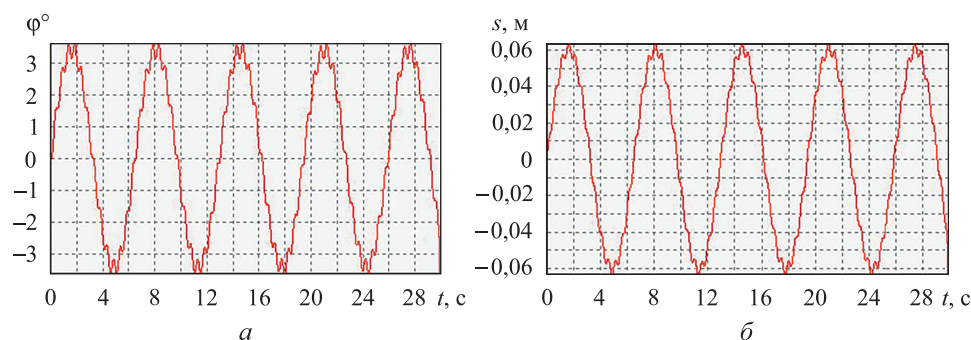


Рис. 7. Зависимости обобщенных координат (a) и скоростей (b) от времени при малой начальной скорости катка

Во втором случае в начальный момент времени каток покоился при $s = 0$, а кривошип был отклонен на 30° от вертикали в положительную сторону отсчета угла φ и отпущен без начальной скорости. Полученные колебания являются нелинейными и практически сразу после начала движения расходятся с аналитическим решением, полученным для линеаризованной системы (рис. 8). Отметим, что наибольшее расхождение по фазе наблюдается по низким частотам, а по амплитуде — по высоким. Зависимость координаты s от времени качественно имеет аналогичный вид.

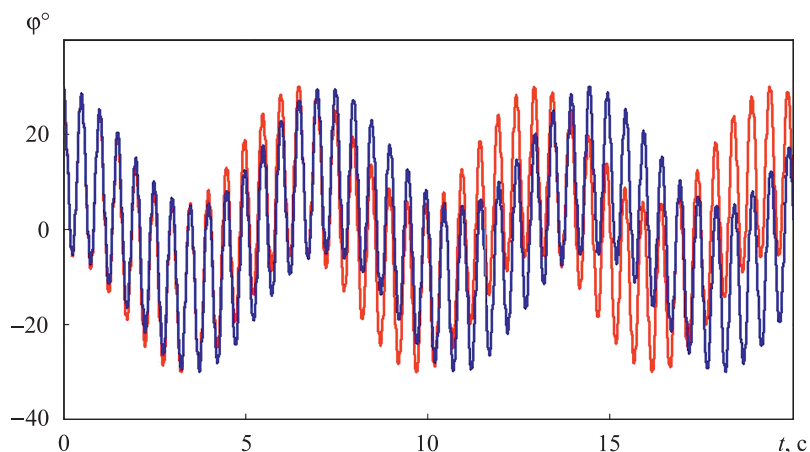


Рис. 8. Зависимость координаты φ от времени: синяя линия соответствует численному решению нелинейной системы (8), красная — аналитическому решению линеаризованной системы

Свободные и вынужденные колебания механической системы с двумя степенями свободы. Рассмотрим движение усложненного варианта эллиптического маятника, расположенного в вертикальной плоскости. Механическая система № 3 (рис. 9) состоит из двух однородных круглых цилиндров 1 и 5, которые соединены невесомой рамой 6 и могут катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Масса каждого цилиндра m_1 , а радиус — r . К цилиндру 5 приложена пара сил с моментом $M(t) = M_0 \sin pt$. К раме 6 шарнирно прикреплены однородные стержни 2 и 4 массой m_2 и длиной l каждый. Концы этих стержней соединены спарником 3 массы m_3 . На стержень 2 действует момент сопротивления $L = -\mu\dot{\varphi}$. Кроме того, рама 6 соединена с неподвижной стенкой пружиной 7 жесткости c . При $s = 0$ пружина не деформирована.

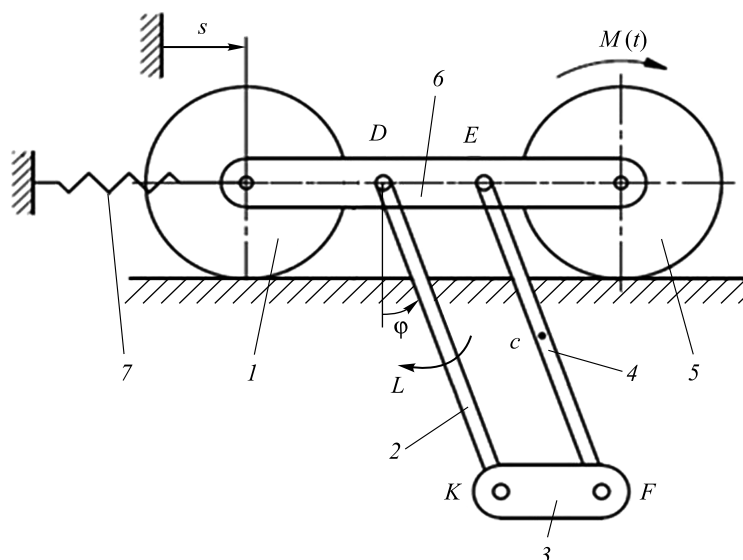


Рис. 9. Схема механической системы № 3

Система имеет две степени свободы, поэтому ее движение описывается с помощью двух обобщенных координат: перемещения s центра катка 1 и угла φ отклонения стержня 2 от вертикали. В силу жесткого соединения скорости и перемещения центров обоих катков всегда одинаковы, так же как и угловые скорости и угловые перемещения обоих стержней.

Каждый из катков совершает плоское движение. Воспользовавшись известным положением мгновенного центра скоростей катка и теоремой Кенига [16, 17], вычисляем кинетическую энергию звеньев 1 и 5:

$$T_1 = T_5 = \frac{3}{4} m_1 \dot{s}^2.$$

Стержни 2 и 4 совершают плоское движение. По теореме Кенига кинетическую энергию каждого стержня можно определить как сумму кинетической энергии движения центра масс стержня и кинетической энергии вращения вокруг центра масс. При этом скорость центра масс стержней 2 и 4 определяется по формуле плоского движения

$$\bar{v}_C = \bar{v}_E + \bar{v}_{CE},$$

где $|\bar{v}_E| = |\dot{s}|$ и $|\bar{v}_{CE}| = |\dot{\phi}l/2|$.

Угол между этими векторами для принятых направлений отсчета обобщенных координат равен ϕ . Выражение для кинетической энергии стержней 2 и 4 принимает вид

$$T_2 = T_4 = \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_c^2 + \frac{1}{2} J_2^{Cz} \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{s}^2 + \frac{1}{6} m_2 \dot{\phi}^2 L^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{s} \dot{\phi} L \cos \phi.$$

Определим кинетическую энергию звена 3 массы m_3 . Поскольку две точки спарника (K и F) имеют один и тот же вектор скорости, он совершает поступательное движение. Скорость центра масс спарника, равная скорости точки F , определяется по формуле плоского движения $\bar{v}_F = \bar{v}_E + \bar{v}_{FE}$, где $|\bar{v}_{FE}| = |\dot{\phi}l|$. Выражение для кинетической энергии спарника:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \bar{v}_F^2 = \frac{1}{2} m_3 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{\phi}^2 L^2 + m_3 \dot{s} \dot{\phi} L \cos \phi.$$

Кинетическая энергия всей механической системы представляет собой сумму кинетических энергий всех звеньев механизма:

$$T = \frac{1}{2} (3m_1 + 2m_2 + m_3) \dot{s}^2 + \frac{1}{6} (2m_2 + 3m_3) \dot{\phi}^2 L^2 + (m_2 + m_3) \dot{s} \dot{\phi} L \cos \phi. \quad (9)$$

Определим обобщенные силы, входящие в правую часть уравнения (1). Из всех внешних сил, действующих на систему, работу могут совершать сила упругости, сила тяжести, внешний момент и момент вязкого сопротивления. Представим обобщенную силу по i -й обобщенной координате как сумму:

$$Q_i = Q_i^{\Pi} + Q_i^{\Delta} + Q_i^{\text{B}},$$

где $Q_i^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ — обобщенная сила от потенциальных сил; $Q_i^{\Delta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}$ — обобщенная сила от диссипативных сил (Φ — диссипа-

тивная функция Релея); $Q_i^B = \frac{\delta A^B}{\delta q_i}$ — обобщенная сила от внешних сил, зависящих от времени.

Учитывая, что потенциальная энергия системы $\Pi = (m_2gL + m_3gL) \times (1 - \cos \varphi) + \frac{cs^2}{2}$, а диссипативная функция Релея $\Phi = \mu \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$, выражения для обобщенных сил принимают вид

$$Q_s = \frac{M}{R} - cs; \quad (10)$$

$$Q_\varphi = -gL \sin \varphi (m_2 + m_3) - \mu \dot{\varphi}. \quad (11)$$

С учетом выражений, полученных в формулах (9)–(11), составим уравнения Лагранжа II рода:

$$\begin{cases} (3m_1 + 2m_2 + m_3)\ddot{s} + (m_2 + m_3)(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)L = \frac{M}{R} - cs; \\ \frac{1}{3}\ddot{\varphi}L^2(2m_2 + 3m_3) + (m_2 + m_3)(\dot{s} \cos \varphi - \dot{\varphi} s \sin \varphi)L + \\ + \dot{\varphi}L \sin \varphi (m_2 + m_3) = -gL \sin \varphi (m_2 + m_3) - \mu \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (12)$$

После алгебраических преобразований эти уравнения можно свести к форме Коши в целях дальнейшего численного интегрирования. Движение данной механической системы имеет колебательный характер. Колебания являются вынужденными и возбуждаются посредством внешнего момента $M(t)$. Рассмотрим несколько вариантов моделирования, которые отличаются друг от друга учетом тех или иных факторов, при этом значения масс звеньев системы и их линейных размеров изменять не будем ($m_1 = 3$ кг; $m_2 = 0,1$ кг; $m_3 = 1$ кг; $R = 0,1$ м; $l = 0,5$ м).

В случае свободных колебаний с демпфером, но при отсутствии пружины система приходит в движение при ненулевых начальных значениях φ , $\dot{\varphi}$ или \dot{s} (в сочетании с ненулевым φ или $\dot{\varphi}$, так как система (12) не описывает удар). Если движение начинается из начального состояния $\varphi_0 \neq 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$ и $\dot{s} = 0$, то движение системы представляет собой затухающие колебания (при сильном демпфере — аperiodическое движение), при этом $\varphi \rightarrow 0$, а $s \rightarrow \text{const} \neq 0$. Если $\varphi_0 = 0$ и $\dot{\varphi}_0 \neq 0$, со временем происходит затухание движения по координате φ , но при этом $\dot{s} \rightarrow \text{const} \neq 0$. Такая же динамика наблюдается при обоих ненулевых начальных обобщенных значениях скорости и нулевых

начальных координатах. При $\dot{s}_0 \neq 0$, $\varphi_0 \neq 0$ и $\dot{\varphi}_0 = 0$ движение таково, что $\varphi \rightarrow 0$, а $\dot{s} \rightarrow \text{const} = \dot{s}_0$.

С появлением внешнего возмущающего периодического момента колебания по углу φ (рис. 10), как и следовало ожидать, не затухают, переходя со временем в вынужденные. График функции $s(t)$ представляет собой линейную функцию с наложенными колебаниями. С увеличением частоты p изменения внешнего момента уменьшается амплитуда колебаний угла φ , причем $\varphi \rightarrow 0$ и пропадают колебания у координаты s . Это связано с тем, что амплитуда вынужденных колебаний по φ обратно пропорциональна частоте p . При $\varphi \rightarrow 0$ стержни и спарник, совершая чрезвычайно малые вынужденные колебания в окрестности нулевого положения, слабо влияют на движение рамы под действием возмущающего момента.

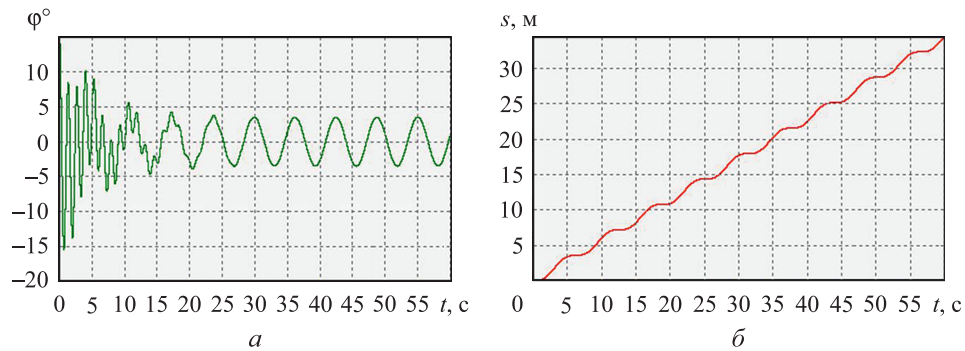


Рис. 10. Графики изменения координат φ (а) и s (б) при наличии внешнего периодического момента ($c = 0$ Н/м; $M_0 = 3,5$ Н·м; $p = 1$ рад/с; $\mu = 0,15$ Н·с/м; $\varphi_0 = 15^\circ$;

$$\dot{\varphi}_0 = 0 \text{ град/с})$$

С добавлением в систему пружины характер изменения обобщенных координат и скоростей остается колебательным, при этом с учетом фиксированных масс и размеров звеньев появляется возможность влиять на значение собственных частот системы. При наличии демпфера движение системы при варьируемых значениях M_0 , p , c сводится к вынужденным колебаниям с различной амплитудой. При определенных сочетаниях жесткости пружины c и частоты изменения внешнего момента p в системе возникают биения (рис. 11), впоследствии переходящие в ограниченный резонанс (рис. 12) при совпадении одной из собственных частот системы (низкая частота) с частотой возмущающего момента.

Составлена амплитудно-частотная характеристика (рис. 13) для движения по координате φ при различных значениях коэффициента сопротивления демпфера.

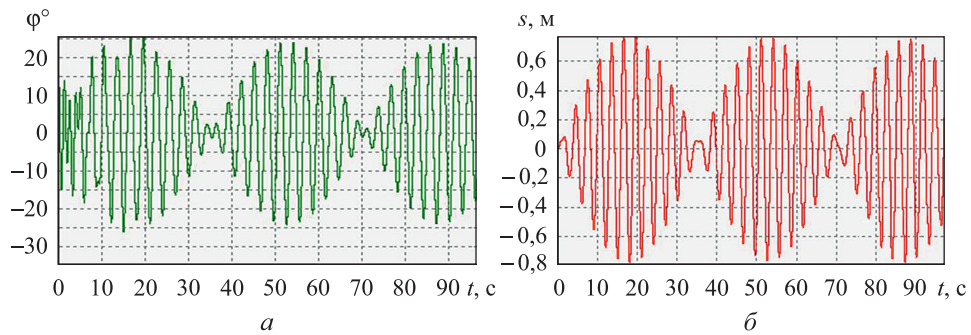


Рис. 11. Биения в механической системе № 3 по координатам φ (а) и s (б) ($c = 50$ Н/м; $M_0 = 2$ Н·м; $p = 2$ рад/с; $\mu = 0,15$ Н·с/м; $\varphi_0 = 15^\circ$; $\dot{\varphi}_0 = 0$ град/с)

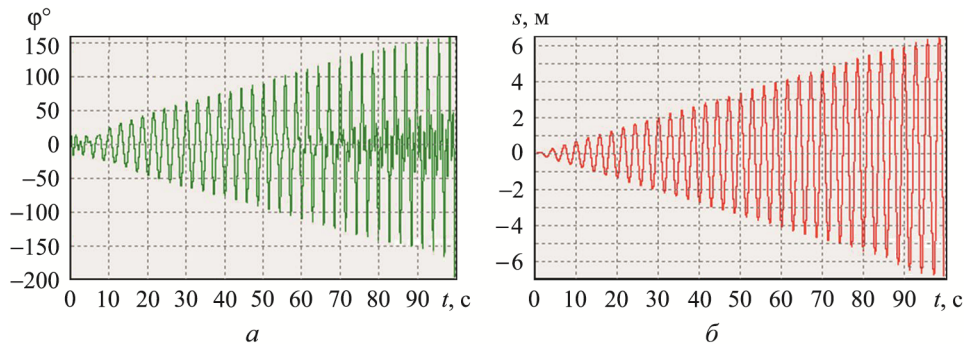


Рис. 12. Резонанс в механической системе № 3 по координатам φ (а) и s (б) ($c = 50$ Н/м; $M_0 = 2$ Н·м; $p = 2,2$ рад/с; $\mu = 0,15$ Н·с/м; $\varphi_0 = 15^\circ$; $\dot{\varphi}_0 = 0$ град/с)

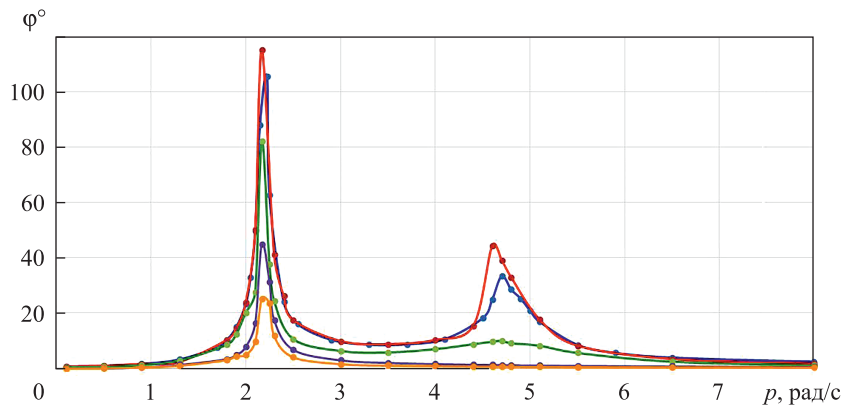


Рис. 13. Амплитудно-частотная характеристика механической системы № 3 по обобщенной координате φ при различных значениях коэффициента демпфирования μ (Н·с/м)

—◆— 0,15 —●— 0,10 —■— 0,05 —▲— 4,00 —○— 8,00

Результаты расчетов, представленные на рис. 12, показывают, что резонансная амплитуда по низкой частоте для координаты φ заметно больше, чем по высокой частоте. Кроме того, при сильном демпфере резонанс первым вырождается на высоких частотах. За счет изменения коэффициента демпфирования можно получить первую резонансную амплитуду, превышающую значение 180° , что приведет к полному повороту спарника вокруг точки подвеса.

Заключение. Уравнения Лагранжа II рода позволяют описать движение механической системы с голономными удерживающими идеальными связями. Они могут быть сведены к стандартной форме Коши в том случае, если действующие на систему силы не зависят от вторых производных обобщенных координат и за исключением тех случаев, когда координаты принимают значения, соответствующие особым точкам. Математические модели механических систем, записанные с использованием уравнений Лагранжа II рода, как правило, являются нелинейными. Их решение может быть получено с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих движение системы. Количество положений равновесия колебательной системы и характер их устойчивости удобно определять через зависимость потенциальной энергии от обобщенных координат. Для систем с одной степенью свободы зависимость $\Pi(q)$ позволяет построить фазовый портрет системы. При анализе движения системы, совершающей нелинейные колебания, полезным является получение собственных частот, соответствующих линеаризованной системе. Эти приближенные значения частот заметно уменьшают время построения амплитудно-частотной характеристики системы при вынужденных колебаниях. Наибольшее расхождение с линеаризованным решением обеспечивает низкочастотная составляющая; резонанс на низкой собственной частоте дает большие значения амплитуды колебаний, чем резонанс на высокой собственной частоте.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ляпунов А.М. *Избранные труды. Работы по теории устойчивости*. Москва, Наука, 2007, 576 с.
- [2] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва, Наука, 1974, 504 с.
- [3] Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. *Введение в нелинейную механику*. Киев, АН УССР, 1937, 366 с.
- [4] Gilchrist O. The free oscillations of conservative quasi-linear systems with two degrees of freedom. *Int. J. Mech. Sci.*, 1961, vol. 3, pp. 286–311. DOI: 10.1016/0020-7403(61)90027-3
- [5] Гуськов А.М., Пановко Г.Я. Нелинейные эффекты при колебаниях линейных механических систем с центробежным возбудителем ограниченной мощности. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 6 (6). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-6-265

- [6] Kholostova O.V. Some problems of the motion of a pendulum when there are horizontal vibrations of the point of suspension. *J. Appl. Maths Mechs*, 1995, vol. 59, no. 4, pp. 553–561. DOI: 10.1016/0021-8928(95)00064-X
- [7] Nicolas M. A comprehensive study on the behaviour of a rigid block on an oscillating ground with friction, elastic and viscous forces. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2017, no. 93, pp. 21–29. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.04.017
- [8] Van Dooren R. Differential tones in a damped mechanical system with quadratic and cubic non-linearities. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1973, vol. 8, pp. 575–583. DOI: 10.1016/0020-7462(73)90007-3
- [9] Волкова В.Е. Численное моделирование полигармонических колебаний нелинейных динамических систем. *Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна*, 2004, № 3, с. 115–120.
- [10] Lenci S., Mazzilli C.E. Asynchronous free oscillations of linear mechanical systems: a general appraisal and a digression on a column with a follower force. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 94, pp. 223–234. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.017
- [11] Teufel A., Steindl A., Troger H. Synchronization of two flow excited pendula. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2006, no. 11, pp. 577–594. DOI: 10.1016/j.cnsns.2005.01.004
- [12] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Параметрические колебания и устойчивость механической системы с существенной диссипацией. *Прикладная математика и механика*, 2013, т. 77, № 2, с. 209–220. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.07.004
- [13] Тхай В.Н. Закон о зависимости периода нелинейных колебаний от одного параметра. *Прикладная математика и механика*, 2011, т. 75, № 3, с. 430–434. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2011.07.007
- [14] Дунин М.С., Семенов М.В., Якута А.А. Новые автоматизированные лекционные эксперименты по теме «Механические колебания». *Физическое образование в вузах*, 1999, т. 5, № 4, с. 160–173.
- [15] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. *Теория колебаний*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 272 с.
- [16] Колесников К.С., ред. *Курс теоретической механики*. 3-е изд. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005, с. 382–386; с. 493–554.
- [17] Голубев Ю.Ф. *Основы теоретической механики*. Москва, Изд-во Московского университета, 2000, с. 397–404; с. 539–622.
- [18] Runge C.D. Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, June 1895, vol. 46, iss. 2, pp. 167–178. DOI: 10.1007/BF01446807
- [19] Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. *Курс теоретической механики*. Санкт-Петербург, Изд-во Лань, 2009, 736 с.
- [20] Бернс В.А., Лысенко Е.А., Долгополов А.В., Жуков Е.П. Опыт контроля дефектов летательных аппаратов по параметрам вибраций. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2016, т. 18, № 4–1, с. 86–96.

Статья поступила в редакцию 15.03.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гришко Д.А., Лапшин В.В., Студенников Е.С., Тарасенко А.Н., Леонов В.В. Нелинейные колебания механических систем с одной и двумя степенями свободы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 6. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-6-1777>

Гришко Дмитрий Александрович — ассистент и аспирант кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: механика космического полета, динамика полета ракет и космических аппаратов, теоретическая механика. Автор более 15 статей в области динамики полета и математического моделирования. e-mail: dim.gr@mail.ru

Лапшин Владимир Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 120 научных работ. Область научных интересов: механика и управление движением шагающих аппаратов, теоретическая механика, робототехника.

Студенников Евгений Сергеевич — студент кафедры «Теплофизика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Тарасенко Антон Николаевич — студент кафедры «Теплофизика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Леонов Виктор Витальевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 работ в области математического моделирования, радиационного теплообмена и проектирования крупногабаритных конструкций космического назначения.

Non-linear vibrations in mechanical systems with one or two degrees of freedom

© D.A. Grishko, V.V. Lapshin, E.S. Studennikov,
A.N. Tarasenko, V.V. Leonov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article investigates free and forced non-linear vibrations in three mechanical systems with one or two degrees of freedom. We designed our mathematical simulation of motion by reducing Lagrange equations of the second kind to their Cauchy form and subsequently integrating them numerically using a third-order Runge—Kutta method, taking into account the fact that the forces affecting the system do not depend on second derivatives of generalized coordinates. We considered those systems the typical components of which are a slider-crank mechanism, a crosshead, a physical pendulum, a spring, a damper and a planetary drive. We determined the number of equilibrium positions and their stability type for a vibration system featuring a planetary drive. We used the phase portrait and frequency response of the system to study its dynamics. Estimating the eigenfrequencies of the system via linearized models makes plotting the frequency response noticeably easier.

Keywords: *Lagrange equations, nonlinear oscillations, mathematical simulation, Runge-Kutta method, phase portrait, mechanical system, frequency response*

REFERENCES

- [1] Lyapunov A.M. *Izbrannye trudy. Raboty po teorii ustoychivosti* [Selected works. Publications on stability theory]. Moscow, Nauka Publ., 2007, 576 p.
- [2] Bogolyubov N.N., Mitropolskiy Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in theory of non-linear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 504 p.
- [3] Krylov N.M., Bogolyubov N.N. *Vvedenie v nelineynuyu mekhaniku* [Introduction to nonlinear mechanics]. Kiev, Academy of Sciences of the UkrSSR Publ., 1937, 366 p.
- [4] Gilchrist O. *Int. J. Mech. Sci.*, 1961, vol. 3, pp. 286–311.
DOI: 10.1016/0020-7403(61)90027-3
- [5] Guskov A.M., Panovko G.Ya. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, no. 6 (6).
DOI: 10.18698/2308-6033-2012-6-265
- [6] Kholostova O.V. *J. Appl. Maths Mechs*, 1995, vol. 59, no. 4, pp. 553–561.
DOI: 10.1016/0021-8928(95)00064-X
- [7] Nicolas M. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2017, no. 93, pp. 21–29.
DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.04.017
- [8] Van Dooren R. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1973, vol. 8, pp. 575–583.
DOI: 10.1016/0020-7462(73)90007-3
- [9] Volkova V.E. *Vestnik Dnepropetrovskogo natsionalnogo universiteta zhelezno-dorozhnogo transporta imeni akademika V. Lazaryana — Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan*, 2004, no. 3, pp. 115–120.
- [10] Lenci S., Mazzilli C.E. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 94, pp. 223–234.
DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.017
- [11] Teufel A., Steindl A., Troger H. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2006, no. 11, pp. 577–594.
DOI: 10.1016/j.cnsns.2005.01.004

- [12] Akulenko L.D., Nesterov S.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika* — *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 209–220. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.07.004
- [13] Tkhai V.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika* — *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 75, no. 3, pp. 430–434. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2011.07.007
- [14] Dunin M.S., Semenov M.V., Yakuta A.A. *Fizicheskoe Obrazovanie v vuzakh* — *Physics in Higher Education*, 1999, vol. 5, no. 4, pp. 160–173.
- [15] Ilin M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. *Teoriya kolebaniy* [Vibration theory]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2003, 272 p.
- [16] Kolesnikov K.S., ed. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Course in theoretical mechanics]. 3rd ed. Moscow, BMSTU Publ., 2005, pp. 382–386; p. 493–554.
- [17] Golubev Yu.F. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki* [Foundations of theoretical mechanics]. Moscow, Moscow State University Publ., 2000, pp. 397–404; pp. 539–622.
- [18] Runge C.D. *Mathematische Annalen*, June 1895, vol. 46, no. 2, pp. 167–178. DOI: 10.1007/BF01446807
- [19] Butenin N.V., Lunts Ya.L., Merkin D.R. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [A course in theoretical mechanics]. Saint Petersburg, Lan Publ., 2009, 736 p.
- [20] Berns V.A., Lysenko E.A., Dolgoplov A.V., Zhukov E.P. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk* — *Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2016, vol. 18, no. 4–1, pp. 86–96.

Grishko D.A., Assistant and post-graduate student, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. Specialises in space flight mechanics, rocket and spacecraft flight dynamics, theoretical mechanics. Author of over 15 scientific publications in the field of flight dynamics and mathematical simulation.
e-mail: dim.gr@mail.ru

Lapshin V.V., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. Specialises in walking vehicle mechanics and motion control, theoretical mechanics, robotics. Author of over 120 scientific publications.

Studennikov E.S., student, Department of Thermal Physics, Bauman Moscow State Technical University.

Tarasenko A.N., student, Department of Thermal Physics, Bauman Moscow State Technical University.

Leonov V.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 20 scientific publications in the field of mathematical simulation, radiant heat transfer and design of large space structures.