УДК 514.7

Н. Г. Хорькова

НЕЛОКАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изложены основы теории накрытий дифференциальных уравнений, в рамках которой оказывается возможным корректное описание различных нелокальных явлений.

E-mail: nkhorkova@diffiety.ac.ru, ninakhorkova@yandex.ru

Ключевые слова: *системы дифференциальных уравнений в частных производных, локальные симметрии и законы сохранения, оператор рекурсии, накрытия, нелокальные симметрии.*

Дифференциальные уравнения и их решения. Пусть $\mathcal{E}$ — система дифференциальных уравнений в частных производных (далее "дифференциальное уравнение" или просто "уравнение") в векторном расслоении $\pi\colon E^{n+m} \to M^n$. В рамках алгебро-геометрической теории любое дифференциальное уравнение рассматривается как подмногообразие пространства джетов k-го порядка $J^k(\pi)$ расслоения π, где k — максимальный порядок уравнений, входящих в систему, n — число независимых переменных, а m — неизвестных функций (зависимых переменных). Предполагается, что локально это подмногообразие задается системой уравнений $F = 0$, где $F = (F_1, \dots, F_r)$, $F_i \in C^\infty(J^k(\pi))$.

Очевидно, что каждая вектор-функция, являющаяся решением рассматриваемой системы, будет удовлетворять также любому уравнению, получающемуся дифференцированием уравнений исходной системы. Поэтому естественно ввести в рассмотрение бесконечно продолженное уравнение $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$, которое задается системой $D_\sigma F = 0$, состоящей из дифференциальных следствий уравнений исходной системы $F = 0$.

Каждое решение, $u = (u^1, \dots, u^m)$, $u^j \in C^\infty(M^n)$, системы дифференциальных уравнений определяет n-мерное подмногообразие s_u пространства $J^\infty(\pi)$, которое в канонических координатах (x_i, p^j_σ) пространства бесконечных джетов задается уравнениями

$$p^j_\sigma = \frac{\partial^{|\sigma|} u^j}{\partial x^\sigma}.$$

Если вектор-функция u является решением рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, то $s_u \subset \mathcal{E}^\infty$.

На многообразии бесконечных джетов $J^\infty(\pi)$ имеется n-мерное интегрируемое распределение $\mathcal{C}$, задаваемое полями

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma} p^j_{\sigma i} \frac{\partial}{\partial p^j_\sigma},\ i = 1, \ldots, n.$$

Это распределение, называемое распределением Картана, допускает ограничение $\bar{\mathcal{C}}$ на бесконечно продолженное уравнение $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$. Многообразия вида s_u, где $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — решение системы, являются максимальными интегральными многообразиями распределения $\bar{\mathcal{C}}$. Таким образом, с геометрической точки зрения дифференциальное уравнение — это бесконечномерное многообразие вида $\mathcal{E}^\infty$, снабженное n-мерным интегрируемым распределением, а его решения — это n-мерные интегральные многообразия данного распределения.

Локальные симметрии и законы сохранения. Одним из ключевых понятий алгебро-геометрической теории дифференциальных уравнений является понятие высшей инфинитезимальной симметрии (А.М. Виноградов, 1975), которое обобщает понятие классической (лиевской) симметрии. Если под симметриями уравнения $\mathcal{E}$ понимать преобразования (конечные или инфинитизимальные) бесконечно продолженного уравнения $\mathcal{E}^\infty$, которые сохраняют распределение Картана на $\mathcal{E}^\infty$, то оказывается, что высшие инфинитезимальные симметрии являются классами когомологий некоторого естественного дифференциального комплекса на бесконечно продолженном уравнении $\mathcal{E}^\infty$. Такая трактовка понятия симметрии привела к созданию эффективного алгоритма вычисления алгебры симметрий конкретных уравнений. В рамках данной теории высшая инфинитезимальная симметрия отождествляется с эволюционным дифференцированием

$$\bar{Э}_\varphi = \sum_{j,\sigma} \bar{D}_\sigma(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial p^j_\sigma},$$

которое однозначно определяется своей производящей функцией $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$, $\varphi^i \in C^\infty(J^\infty(\pi))$. Для вычисления алгебры симметрий уравнения $\mathcal{E}\colon\ F = 0$ надо решить систему уравнений

$$\bar{l}_F(\varphi) = 0, \tag{1}$$

где $\bar{l}_F$ — оператор универсальной линеаризации, отвечающий функции F, $\bar{l}_F(\varphi) = \bar{Э}_\varphi(F)$, черта обозначает ограничение оператора на бесконечно продолженное уравнение $\mathcal{E}^\infty$.

В рамках алгебро-геометрической теории дифференциальных уравнений сохраняющиеся токи интерпретируются как замкнутые горизонтальные $(n-1)$-формы на бесконечно продолженном уравнении $\mathcal{E}^\infty$, а законы сохранения как элементы $(n-1)$-мерной группы горизонтальных когомологий де Рама $\bar{H}^{n-1}(\mathcal{E})$ уравнения $\mathcal{E}$. Законы сохранения достаточно широкого класса уравнений однозначно определяются своими производящими функциями ψ, которые удовлетворяют уравнению

$$\bar{l}_F^*(\psi) = 0, \qquad (2)$$

где $\bar{l}_F^*$ — оператор, формально сопряженный к оператору универсальной линеаризации $\bar{l}_F$. Отметим, что не всякое решение уравнения (2) является производящей функцией некоторого закона сохранения.

Уравнения (1) и (2) лежат в основе современных вычислительных алгоритмов поиска локальных симметрий и законов сохранения[1].

До сих пор довольно распространено мнение, что наличие законов сохранения является проявлением тех или иных свойств симметрии рассматриваемой системы. По-видимому, его происхождение можно объяснить тем, что до появления работ А.М. Виноградова по $\mathcal{C}$-спектральной последовательности теорема Нетер была единственным общим методом нахождения сохраняющихся величин. Это мнение можно считать справедливым лишь для уравнений, происходящих из некоторого вариационного принципа (уравнений Эйлера–Лагранжа), так как теорема Нетер справедлива лишь для таких уравнений. Обратная теорема Нетер утверждает, что для уравнений Эйлера–Лагранжа каждому закону сохранения соответствует симметрия. Однако примеры показывают, что для произвольных уравнений это неверно. Например, известное уравнение Хохлова–Заболотской имеет конечномерную алгебру симметрий, тогда как группа законов сохранения этого уравнения бесконечномерна. Тем не менее понятия симметрии и закона сохранения нельзя рассматривать как совершенно независимые, так как для их нахождения используются взаимно сопряженные уравнения (1) и (2).

Высшие инфинитезимальные симметрии и законы сохранения являются “локальными” величинами, т.е. зависящими от неизвестных функций (в физике — “полей”) и их производных сколь угодно высокого порядка. Однако в рамках “локальной” теории не оказывается места для тех многих важных понятий и конструкций современной математической физики, которые требуют привлечения “нелокальных” величин, т.е. величин типа интегралов от локальных объектов. Такое развитие теории естественным образом достигается введением понятия накрытия.

Накрытия. Мы будем говорить, что задано *накрытие* $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E}$, если заданы некоторое $\tilde{\mathcal{E}}$ бесконечномерное многообра-

[1] Б о ч а р о в А. В., В е р б о в е ц к и й А. М., В и н о г р а д о в А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. – М.: Факториал-Пресс, 2005. – 380 с.

зие $\tilde{\mathcal{E}}$ с n-мерным интегрируемым распределением $\tilde{\mathcal{C}}$ и такое регулярное отображение τ многообразия $\tilde{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{E}^\infty$, что для любой точки $\theta \in \tilde{\mathcal{E}}$ касательное отображение $\tau_{*,\theta}$ является изоморфизмом плоскости $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ на картановскую плоскость $\bar{\mathcal{C}}_{\tau(\theta)}$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$ в точке $\tau(\theta)$. Многообразие $\tilde{\mathcal{E}}$ называется *накрывающим уравнением*.

Для вычислений используется координатная интерпретация понятия накрытия.

В силу регулярности τ многообразие $\tilde{\mathcal{E}}$ и отображение $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ локально можно реализовать как прямое произведение $\mathcal{E}^\infty \times W$, $W \subseteq \mathbb{R}^N$ — открытое множество, $0 < N \leqslant \infty$, и естественную проекцию $\mathcal{E}^\infty \times W \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ соответственно. Тогда распределение $\tilde{\mathcal{C}}$ на $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times W$ может быть задано системой векторных полей

$$\tilde{D}_i = \bar{D}_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \frac{\partial}{\partial w_j},\ i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $X_i = \sum\limits_{j=1}^{N} X_{ij} \dfrac{\partial}{\partial w_j}$, $X_{ij} \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$, — τ-вертикальные поля на $\tilde{\mathcal{E}}$, $w_1, w_2, \ldots$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^N$ (*нелокальные переменные*). Число N (размерность слоя проекции τ) называют *размерностью* накрытия τ. Условие интегрируемости Фробениуса имеет вид $[\tilde{D}_i, \tilde{D}_j] = 0,\ i, j = 1, \ldots, n$, или

$$\tilde{D}_i(X_{jk}) = \tilde{D}_j(X_{ik}) \tag{4}$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n,\ 0 \leqslant k \leqslant N$. Соотношения (4) представляют собой систему дифференциальных уравнений на функции X_{ij}, описывающие всевозможные N-мерные накрытия уравнения $\mathcal{E}$.

Если накрытие уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ задано полями (3), то формально можно считать, что накрывающее уравнение этого накрытия является бесконечным продолжением следующей системы

$$F = 0, \quad \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = X_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Рассмотрим в качестве примера одномерное накрытие уравнения Кортевега — де Фриза $\mathcal{E} = \{u_t = u u_x + u_{xxx}\}$, задаваемое полями:

$$\tilde{D}_x = \bar{D}_x + \left(p_\emptyset + \frac{1}{6} w^2\right) \frac{\partial}{\partial w}, \tag{5}$$

$$\tilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_2 + \frac{1}{3} w p_1 + \frac{1}{3} p_\emptyset^2 + \frac{1}{18} w^2 p_\emptyset\right) \frac{\partial}{\partial w}. \tag{6}$$

Исключив u из системы

$$\begin{cases} w_x = u + \dfrac{1}{6}w^2, \\ w_t = u_{xx} + \dfrac{1}{3}wu_x + \dfrac{1}{3}u^2 + \dfrac{1}{18}w^2u, \end{cases}$$

получим, что накрывающим уравнением является бесконечное продолжение модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза $w_t = w_{xxx} - \dfrac{1}{6}w^2w_x$.

Связь переменных u и w, даваемая уравнением $w_x = u + \dfrac{1}{6}w^2$, есть не что иное как преобразование Миуры–Гарднера.

В терминах теории накрытий естественным образом интерпретируются и другие преобразования дифференциальных уравнений, а также продолженные структуры Уолквиста–Эстабрука, преобразования Бэклунда и многое другое. Таким образом, теория накрытий представляется удобным и корректным языком описания различных нелокальных эффектов, возникающих при работе с дифференциальными уравнениями. Также возможность введения дополнительных переменных дает основания ожидать появления новых симметрий и законов сохранения дифференциальных уравнений.

Нелокальные симметрии и законы сохранения. Пусть $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$. *Нелокальной симметрией* уравнения $\mathcal{E}$ назовем всякую локальную симметрию объекта $\tilde{\mathcal{E}}$. Иначе говоря, нелокальная симметрия уравнения $\mathcal{E}$ — это преобразование (конечное или инфинитезимальное) объекта $\tilde{\mathcal{E}}$, которое сохраняет распределение $\tilde{\mathcal{C}}$ на $\tilde{\mathcal{E}}$. В дальнейшем будут рассматриваться только *инфинитезимальные* нелокальные симметрии, поэтому прилагательное "инфинитезимальная", будет опускаться и такие симметрии будем называть просто нелокальными. Нелокальные симметрии в накрытии τ называют также τ-симметриями.

Процедура вычисления нелокальных симметрий может быть основана на одной из двух теорем, приводимых ниже.

Теорема 1. *Алгебра $\mathrm{Sym}_\tau\tilde{\mathcal{E}}$ нелокальных симметрий в накрытии τ изоморфна алгебре Ли таких векторных полей X на $\tilde{\mathcal{E}}$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

1) *X — вертикальное векторное поле, то есть $X(\tau^*(f)) = 0$ для любой функции $f \in C^\infty(M^n)$;*

2) $[X, \tilde{D}_i] = 0,\ i = 1, \ldots, n.$

Теорема 2. *Пусть накрытие $\tau : \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ локально задается полями*

$$\tilde{D}_i = \bar{D}_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij}\frac{\partial}{\partial w_j},\ i = 1, \ldots, n,\ X_{ij} \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}),$$

где $w_1, w_2, \ldots$ — нелокальные переменные. Тогда любая нелокальная симметрия в накрытии τ имеет вид

$$\tilde{Э}_{\varphi,A} = \tilde{Э}_{\varphi} + \sum_{i=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial w_j},$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $A = (a_1, \ldots, a_N)$, $\varphi_i, a_j \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$, причем функции φ_i, a_j удовлетворяют уравнениям:

$$\tilde{l}_F(\varphi) = 0, \tag{7}$$

$$\tilde{D}_i(a_j) = \tilde{Э}_{\varphi,A}(X_{ij}). \tag{8}$$

Для введения понятия нелокального закона сохранения строится аналог горизонтального комплекса де Рама на многообразии $\tilde{\mathcal{E}}$. Это построение легко осуществить с использованием процедуры поднятия на многообразие $\tilde{\mathcal{E}}$ $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов, которое в локальных координатах определяется соответствием $\bar{D}_i \mapsto \tilde{D}_i$. Когомологии горизонтального комплекса де Рама на $\tilde{\mathcal{E}}$ будем обозначать $\tilde{H}^k(\tilde{\mathcal{E}})$. Группу $\tilde{H}^{n-1}(\tilde{\mathcal{E}})$ по аналогии с локальной теорией будем называть *группой нелокальных законов сохранения уравнения* $\mathcal{E}$. Заметим, что горизонтальный комплекс де Рама на $\tilde{\mathcal{E}}$ может быть определен также и инвариантно, подобно горизонтальному комплексу де Рама на $\mathcal{E}^\infty$.

Легко видеть, что элементы группы $\tilde{H}^1(\tilde{\mathcal{E}})$ определяют одномерные накрытия над уравнением $\tilde{\mathcal{E}}$. Действительно, если $[\omega] \in \tilde{H}^1(\tilde{\mathcal{E}})$, где $\omega = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$, $X_i \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$, то условие $\tilde{d}\omega = 0$ замкнутости формы ω равносильно системе условий $\tilde{D}_i(X_j) = \tilde{D}_j(X_i)$. Следовательно поля $\tilde{\tilde{D}}_i = \tilde{D}_i + X_i \dfrac{\partial}{\partial w}$, $i = 1, \ldots, n$, определяют одномерное накрытие над уравнением $\tilde{\mathcal{E}}$. В частности, элементы группы $\bar{H}^1(\mathcal{E})$ определяют накрытия уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Можно показать, что существует взаимно однозначное соответствие между элементами группы $\bar{H}^1(\mathcal{E})$ и классами эквивалентностей одномерных накрытий над $\mathcal{E}^\infty$ специального вида (задаваемых полями $\tilde{D}_i = \bar{D}_i + X_i \dfrac{\partial}{\partial w}$, $i = 1, \ldots, n$, где $X_i \in C^\infty(\mathcal{E}^\infty)$). В случае уравнения с двумя независимыми переменными имеется взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентностей одномерных накрытий рассматриваемого вида и законами сохранения уравнения $\mathcal{E}$.

Задача реконструкции симметрий. Пусть $\tau \colon \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ — некоторое накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$, а $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\varphi_i \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$, — решение уравнения (7). Тогда может оказаться, что τ-симметрия вида $\tilde{Э}_{\varphi,A}$ не существует, так как система уравнений (8) для данного

φ не имеет решений. В частности, не всякая локальная симметрия $\tilde{\partial}_\varphi$, $\varphi_i \in C^\infty(\mathcal{E}^\infty)$, может быть продолжена до симметрии $\tilde{\partial}_{\varphi,A}$ в накрытии τ. Такая ситуация имеет место, например, для накрытия уравнения Кортевега–де Фриза, задаваемого полями (5)–(6), и его галилеевой симметрии $\varphi = tp_1 + 1$. Назовем задачей реконструкции симметрии нахождение для функции $\varphi \in \ker \tilde{l}_F$ τ-симметрии вида $\tilde{\partial}_{\varphi,A} = \tilde{\partial}_\varphi + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i \dfrac{\partial}{\partial w_i}$. В общем случае эта задача не имеет решения. Ниже для произвольного дифференциального уравнения приведена конструкция одного специального накрытия, для которого эта задача всегда разрешима.

Рассмотрим накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$, являющееся суммой Уитни одномерных накрытий, определяемых элементами базиса пространства $\bar{H}^1(\mathcal{E}^\infty)$. Это накрытие обозначим $\tau_1 \colon \tilde{\mathcal{E}}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$. Затем возьмем сумму Уитни всех одномерных накрытий над $\tilde{\mathcal{E}}^{(1)}$, определяемых элементами базиса пространства $\tilde{H}^1(\tilde{\mathcal{E}}^{(1)})$. Получим накрытие $\tau_{2,1} \colon \tilde{\mathcal{E}}^{(2)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}^{(1)}$ над $\tilde{\mathcal{E}}^{(1)}$, которое определяет накрытие $\tau_2 = \tau_1 \circ \tau_{2,1} \colon \tilde{\mathcal{E}}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ над $\mathcal{E}^\infty$. Продолжая этот процесс, получим башню накрытий над $\mathcal{E}^\infty$:

$$\ldots \xrightarrow{\tau_{k+1,k}} \tilde{\mathcal{E}}^{(k)} \xrightarrow{\tau_{k,k-1}} \tilde{\mathcal{E}}^{(k-1)} \xrightarrow{\tau_{k-1,k-2}} \ldots \xrightarrow{\tau_{2,1}} \tilde{\mathcal{E}}^{(1)} \xrightarrow{\tau} \mathcal{E}^\infty \tag{9}$$

обратный предел которой обозначим через $\tau^* \colon \tilde{\mathcal{E}}^* \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$. Назовем τ^* *универсальным абелевым накрытием*. Очевидно, что $\tilde{H}^1(\tilde{\mathcal{E}}^*) = 0$, то есть накрывающее уравнение не имеет законов сохранения.

Приводимая ниже теорема показывает, что при вычислении симметрий в универсальном абелевом накрытии достаточно решить уравнение $\tilde{l}_F(\varphi) = 0$.

Теорема 3. *Пусть $\tau^* \colon \tilde{\mathcal{E}}^* \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — универсальное абелево накрытие уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\varphi_i \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}^*)$, удовлетворяющей уравнению $\tilde{l}_F(\varphi) = 0$, существует набор функций $A = (a_{i\alpha})$, $a_{i\alpha} \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}^*)$ таких, что $\tilde{\partial}_{\varphi,A}$ есть нелокальная τ^*-симметрия уравнения $\mathcal{E}$.*

В универсальном абелевом накрытии возникают дополнительные серии нелокальных симметрий у целого ряда уравнений, имеющих оператор рекурсии. Операторы рекурсии R, встречающиеся в литературе, удовлетворяют соотношению $\bar{l}_F \circ R = A \circ \bar{l}_F$ для некоторого оператора A. Поэтому результат применения оператора рекурсии к симметрии (если он определен) будет снова симметрией. Операторы рекурсии порождают вторые бесконечные серии нелокальных симметрий уравнения Кортевега–де Фриза, модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза, уравнения sin-Гордон, систем уравнений типа Шредингера и других. При этом каждая новая нелокальная симметрия появляется после “убийства” одного закона сохранения. Вычислительный эксперимент показывает, что подобные серии нелокальных симметрий есть у уравнений, имеющих оператор рекурсии, содержащий D_i^{-1}, и локальные симметрии, к которым такой оператор рекурсии в локальной теории применить нельзя из-за появления “интегралов”. Таков еще один из аспектов взаимодействия между симметриями и законами сохранения, открытый нелокальной теорией дифференциальных уравнений.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012