

## Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины

© Д.А. Шляхин, Ж.М. Даулетмуратова

Самарский государственный технический университет, Самара, 443100, Россия

*Построено новое замкнутое решение осесимметричной динамической задачи теории термоупругости для жесткозакрепленной круглой изотропной пластины в случае изменения температуры на ее лицевых поверхностях. Математическая формулировка рассматриваемой задачи включает в себя линейные уравнения движения и теплопроводности в пространственной постановке относительно компонент вектора перемещений, а также функции изменения температуры. Исследование несамосопряженных уравнений проведено в несвязанной постановке. Сначала рассмотрена начально-краевая задача теплопроводности без учета деформирования пластины, на следующем этапе — задача термоупругости при действии заданной (определенной) функции изменения температуры. Далее проведено уточнение расчетных соотношений задачи теплопроводности с учетом изменения формы конструкции. Для решения задач использован математический аппарат разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований — Фурье, Ханкеля и обобщенного интегрального преобразования. При этом на каждом этапе исследования выполнена процедура приведения граничных условий к виду, позволяющему применить соответствующее преобразование. Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние жестко закрепленной круглой пластины при произвольном осесимметричном температурном внешнем воздействии.*

**Ключевые слова:** круглая пластина, теория термоупругости, нестационарное температурное воздействие, конечные интегральные преобразования

**Введение.** При проектировании строительных конструкций и приборов различного назначения возникает необходимость их исследования в условиях неравномерного нестационарного нагрева [1–4]. Данное воздействие сопровождается возникновением тепловых деформаций и напряжений, которые необходимо учитывать при анализе прочностных характеристик конструкции.

В общем случае изменение напряженно-деформированного состояния тела происходит за счет действия внешнего источника теплоты и процесса деформирования упругой системы. Математическая формулировка рассматриваемых задач включает в себя несамосопряженные линейные дифференциальные уравнения движения и теплопроводности. Их исследование, как правило, проводят в несвязанной постановке. При этом сложности, возникающие при интегрировании уравнений движения и удовлетворении краевых условий, приводят

к упрощению исходных расчетных соотношений, в которых не учитываются силы инерции упругой системы. Расчетная схема конструкции представляется в виде тонкостенных [5–7] или бесконечно длинных тел [8–10]. Другой подход связан с исследованием только уравнения теплопроводности без учета деформирования упругой системы [11–13].

В связанной постановке замкнутые решения динамических задач термоупругости получены в работах [14–16]. В работе [14] при использовании обобщенного метода конечных интегральных преобразований проведено исследование бесконечного цилиндра и сферы. При этом на поверхностях элементов были заданы перемещения и тепловые потоки. В работах [15,16] построены решения для конечного изотропного цилиндра с мембранным закреплением его торцевых поверхностей. Расчетные соотношения представлены в виде спектральных разложений по биортогональной системе собственных функций несамосопряженного пучка дифференциальных операторов [17].

В настоящей работе объектом исследования является жесткозакрепленная круглая изотропная пластина при нестационарном осесимметричном температурном воздействии на ее лицевых поверхностях. Полученное решение в несвязанной постановке позволяет учесть влияние деформации, а также инерционных параметров конструкции на ее температурное поле и напряженно–деформированное состояние.

**Постановка задачи.** Пусть круглая жесткозакрепленная пластина занимает в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega: \{0 < r_* < b, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < z_* < h^*\}$ . На ее торцевых поверхностях задана температура, значение которой зависит от радиальной координаты  $r_*$  и времени  $t_*$ : при  $z = 0$   $\omega_1^*(r_*, t_*)$ , при  $z = h^*$   $\omega_2^*(r_*, t_*)$  (рис. 1).

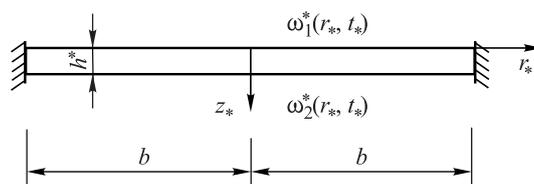


Рис. 1. Расчетная схема

В общем случае дифференциальные уравнения осесимметричного движения и теплопроводности в линейной постановке для однородной упругой изотропной среды в цилиндрической системе координат, а также в безразмерной форме можно записать следующим образом [15]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0;$$

$$\nabla \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial T}{\partial t} - a_5 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0.$$

Краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме имеют вид

$$r = 1, \quad U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0; \quad (2)$$

$$r = 0, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad W(0, z, t) < \infty, \quad T(0, z, t) < \infty; \quad (3)$$

$$z = 0, h, \quad a_3 \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - \{\omega_1, \omega_2\} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

$$T(r, 0, t) = \omega_1, \quad T(r, h, t) = \omega_2;$$

$$t = 0, \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad T(r, z, 0) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r, z), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r, z).$$

В равенствах (1)–(4) использованы следующие обозначения:  
 $a_1 = a_2(1 - 2\nu)$ ,  $a_2 = 0,5(1 - \nu)^{-1}$ ,  $a_3 = \nu(1 - \nu)^{-1}$ ,  $a_4 = b \frac{1}{k\sqrt{a_7}}$ ,  $a_5 =$   
 $= \frac{a_3 b}{L\sqrt{a_4}} T_0 \gamma$ ,  $a_6 = \frac{\gamma(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)}$ ,  $a_7 = \frac{\rho}{\gamma} a_6$ ,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$ ,  $\gamma = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \alpha_t$ ,  
 $t = t_* / (b\sqrt{a_7})$ ,  $\{T, \omega_1, \omega_2\} = a_6 \{T^*, \omega_1^*, \omega_2^*\}$ ,  $\{U, W, r, z, h\} = \{U^*, W^*, r_*$ ,  
 $z_*, h^*\} / b$ ,  $U^*(r_*, z_*, t_*)$ ,  $W^*(r_*, z_*, t_*)$ ,  $T^*(r_*, z_*, t_*)$  — компоненты век-  
 тора перемещений и изменение температуры тела в размерной форме;  
 $T_0$  — абсолютная температура начального состояния тела;  $E, \nu, \rho$  —  
 модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала со-  
 ответственно;  $\alpha_t, k, L$  — температурные коэффициенты линейного  
 расширения, теплопроводности и теплопроводности материала  
 соответственно;  $U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$  — известные в начальный момент пе-  
 ремещения и их скорости.

Условия (2) означают жесткое закрепление цилиндрической поверхности пластины и отсутствие передачи теплоты. Равенство (3) определяет ограниченность решения в центре пластины, а первые два условия (4) — отсутствие нормальных и касательных напряжений на ее лицевых поверхностях.

Соотношения (1)–(5) представляют собой математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи. При этом проблема решения несамосопряженной системы дифференциальных уравнений (1) при удовлетворении краевых условий (2)–(5) приводит к исследованию задачи в несвязанной постановке.

На первом этапе решали уравнение теплопроводности относительно функции  $T(r, z, t)$  с заданными краевыми условиями:

$$\nabla \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial T}{\partial t} = a_5 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right); \quad (6)$$

$$r = 0, 1, \quad T(0, z, t) < \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0; \quad (7)$$

$$z = 0, h, \quad T(r, 0, t) = \omega_1(r, t), \quad T(r, h, t) = \omega_2(r, t); \quad (8)$$

$$t = 0, \quad T(r, z, 0) = 0, \quad \omega_1(r, 0) = 0, \quad \omega_2(r, 0) = 0. \quad (9)$$

Сначала предполагая, что  $U$  и  $W$  равны нулю, определяли функцию  $T$ .

На втором этапе рассматривали задачу термоупругости относительно функций  $U$  и  $W$  с учетом заданной (известной) функции  $T$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (10)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial z};$$

$$r = 0, 1, \quad U(0, z, t) < \infty, \quad W(0, z, t) < \infty, \quad U(1, z, t) = 0, \quad W(1, z, t) = 0; \quad (11)$$

$$z = 0, h, \quad a_3 \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - \{\omega_1, \omega_2\} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad (12)$$

$$t = 0, \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad W(r, z, 0) = W_0(r, z); \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(r, z); \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(r, z).$$

Далее проводили уточнение функции  $T$  (в результате решения задачи (10)–(13)) с учетом найденных значений  $U$  и  $W$ . Итерационный процесс выполняли до тех пор, пока числовые результаты краевых задач (6)–(9) и (10)–(13) не совпадут с заданной точностью.

**Решение задачи теплопроводности.** Для решения начально-краевой задачи (6)–(9) применяли интегральное преобразование Ханкеля [18] с конечными пределами по переменной  $r$  при использовании трансформанты

$$R_H(n, z, t) = \int_0^1 T(r, z, t) r J_0(j_n r) dr \quad (14)$$

и формулы обращения

$$T(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_H(n, z, t) J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2}, \quad (15)$$

где  $j_n$  — положительные нули функции  $J_1(j_n)$  ( $n = 0, j_0 = 0$ );  $J_0(\dots)$ ,  $J_1(\dots)$  — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно.

В результате получили новую начально-краевую задачу относительно трансформанты  $R_H$ :

$$-j_n^2 R_H + \frac{\partial^2 R_H}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial R_H}{\partial t} = F_{1H}; \quad (16)$$

$$z = 0, h, \quad R_H(n, 0, t) = p_{1H}, \quad R_H(r, h, t) = p_{2H}; \quad (17)$$

$$t = 0, \quad R_H(n, z, 0) = 0, \quad (18)$$

где  $F_{1H} = a_5 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) r J_0(j_n r) dr$ ,  $\{p_{1H}, p_{2H}\} = \int_0^1 \{\omega_1, \omega_2\} r J_0(j_n r) dr$ .

На следующем этапе решения приводили граничные условия (17) к однородным, вводя новую функцию  $T_H$ , связанную с трансформантой  $R_H$ , с помощью следующего разложения:

$$R_H = f_1(z) p_{1H} + f_2(z) p_{2H} + T_H, \quad (19)$$

где  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  — дважды дифференцируемые функции.

Подстановка соотношения (19) в выражения (16)–(18) при учете условий

$$f_1(0) = f_2(h) = 1; \quad f_1(h) = f_2(0) = 0 \quad (20)$$

позволяет получить новую начально-краевую задачу относительно функции  $T_H$  с однородными граничными условиями по переменной  $z$ .

Применяя конечные  $\sin$ -преобразования Фурье по переменной  $z$  [18] и используя трансформанту

$$L_H(n, m, t) = \int_0^h T_H(n, z, t) \sin(\lambda_m z) dz \quad (21)$$

и формулы обращения

$$T_H(n, z, t) = \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L_H(n, m, t) \sin(\lambda_m z), \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{h}, \quad (22)$$

получаем трансформанту Фурье  $L_H$ :

$$L_H = L_{0H} \exp(-b_1 t) + \int_0^t B_H(\tau) \exp b_1(\tau - t) d\tau, \quad (23)$$

где  $b_1 = a_4^{-1}(\lambda_m^2 + j_n^2)$ ;  $L_{0H} = \int_0^h T_{0H} \sin(\lambda_m z) dz$ ;

$$B_H = -a_4^{-1} \int_0^h F_{1H}^* \sin(\lambda_m z) dz; \quad T_{0H} = -[f_1(z)p_{1H} + f_2(z)p_{2H}]_{t=0};$$

$$F_{1H}^* = F_{1H} + \left[ j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_4 \frac{\partial}{\partial t} \right] [f_1(z)p_{1H} + f_2(z)p_{2H}].$$

На заключительном этапе определяли выражения для функций  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  из условия упрощения функции  $F_{1H}^*$ :

$$\frac{d^2 f_k(z)}{dz^2} - j_n^2 f_k(z) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (24)$$

В результате при удовлетворении условий (20) имеем

$$f_1(z) = \frac{\text{sh}[j_n(h-z)]}{\text{sh}(j_n h)}; \quad f_2(z) = \frac{\text{sh}(j_n z)}{\text{sh}(j_n h)}.$$

Окончательное выражение для функции  $T(r, z, t)$  получили, применяя в трансформанте (23) формулы обращения (15), (22) с учетом разложения (19):

$$T(r, z, t) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ f_1(z)p_{1H} + f_2(z)p_{2H} + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L_H(n, m, t) \sin(\lambda_m z) \right]. \quad (25)$$

**Решение задачи термоупругости.** Начально-краевую задачу (10)–(13) решали методом интегральных преобразований, используя последовательно преобразование Ханкеля [18] с конечными пределами по переменной  $r$  и обобщенное конечное преобразование (КИП) [19] по радиальной координате  $z$ . Сначала соотношения (10)–(13) приводят к стандартной форме, позволяющей провести данную процедуру разделения переменных.

Для этого последнее равенство в соотношениях (11) заменяли условием отсутствия касательных напряжений:

$$\sigma_{rz}|_{r=1} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0. \quad (26)$$

Затем на основании теоремы о суперпозиции решений вводили новую функцию  $w(r, z, t)$ , связанную с функцией  $W(r, z, t)$  соотношением

$$W(r, z, t) = W_1(t) + w(r, z, t), \quad (27)$$

где  $W_1(t)$  — неизвестная функция, определяемая в процессе решения задачи из условия отсутствия вертикальных перемещений срединной поверхности пластины при  $r = 1$ ; т. е. условие  $W(1, z, t) = 0$  выполняется только в одной точке по высоте пластины.

В результате подстановки соотношения (27) в (10)–(13) и (26) получали новую краевую задачу относительно функций  $U$  и  $w$ . При этом граничные условия на цилиндрической поверхности принимают вид

$$r = 1, \quad U(1, z, t) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (28)$$

К краевой задаче относительно функций  $U$  и  $w$  применяли преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной  $r$ , используя трансформанты

$$\begin{aligned} u_H(n, z, t) &= \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr; \\ w_H(n, z, t) &= \int_0^1 w(r, z, t) r J_0(j_n r) dr \end{aligned} \quad (29)$$

и формулы обращения

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r);$$

$$w(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad (30)$$

где  $j_n$  — положительные нули функции  $J_1(j_n)$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ ;  $j_0 = 0$ .

В результате получили начально-краевую задачу относительно трансформант Ханкеля:

$$-j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = R_{1H}; \quad (31)$$

$$-a_1 j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = R_{2H};$$

$$z = 0, h, \quad a_3 j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} = N_{1H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0; \quad (32)$$

$$t = 0, \quad u_H(n, z, 0) = u_{0H}(n, z), \quad \dot{u}_H(n, z, 0) = \dot{u}_{0H}(n, z); \quad (33)$$

$$w_H(n, z, 0) = w_{0H}(n, z); \quad \dot{w}_H(n, z, 0) = \dot{w}_{0H}(n, z),$$

где  $\{R_{1H}, u_{0H}, \dot{u}_{0H}\} = \int_0^1 \{R_1, U_0, \dot{U}_0\} r J_1(j_n r) dr$ ;  $R_1 = \frac{\partial T}{\partial r}$ ;  $R_2 = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{d^2 W_1}{dt^2}$ ;

$$\{R_{2H}, N_{1H|z=0}, N_{1H|z=h}, w_{0H}, \dot{w}_{0H}\} = \int_0^1 \{R_2, \omega_1, \omega_2, w_0, \dot{w}_0\} r J_0(j_n r) dr;$$

$$w_0 = W_0(r, z) - W_1(0); \quad \dot{w}_0 = \dot{W}_0(r, z) - \dot{W}_1(0).$$

На следующем этапе решения выполняли приведение неоднородных граничных условий по переменной  $z$  (32) к однородным. Для этого вводили новые функции  $U_H$  и  $W_H$ , связанные с функциями  $u_H$  и  $w_H$  соотношениями

$$u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t); \quad (34)$$

$$w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t),$$

где  $H_1(n, z, t) = f_3(z)N_{1H}(0) + f_4(z)N_{1H}(h)$ ;  $H_2(n, z, t) = f_5(z)N_{1H}(0) + f_6(z)N_{1H}(h)$ .

Подстановка соотношения (34) в выражения (31)–(33) при выполнении условий

$$\left[ N_{1H} - j_n H_1 - a_3 \frac{\partial H_2}{\partial z} \right]_{z=0, h} = 0; \quad \left[ \frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2 \right]_{z=0, h} = 0 \quad (35)$$

позволяет получить начально-краевую задачу относительно функций  $U_H$  и  $W_H$  с однородными граничными условиями, которую решали, используя структурный алгоритм метода КИП. Для этого вводили на сегменте  $[0, h]$  КИП с неизвестными компонентами  $K_1(\lambda_{in}, z)$ ,  $K_2(\lambda_{in}, z)$ :

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h [U_H(n, z, t)K_1(\lambda_{in}, z) + W_H(n, z, t)K_2(\lambda_{in}, z)] dz; \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t)\} = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \{K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z)\} \|K_{in}\|^{-2}; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h [K_1^2(\lambda_{in}, z) + K_2^2(\lambda_{in}, z)] dz,$$

где  $\lambda_{in}$  — положительные параметры, образующие счетное множество  $(i = \overline{1, \infty})$ .

Применяя алгоритм метода КИП, получаем выражение для трансформанты  $G(\lambda_{in}, n, t)$  и компонент ядра преобразований  $K_1(\lambda_{in}, z)$ ,  $K_2(\lambda_{in}, z)$ . Данные равенства представлены в работах одного из авторов [20].

Окончательные выражения для функций  $U(r, z, t)$  и  $W(r, z, t)$  определяли, последовательно применяя к трансформанте  $G(\lambda_{in}, n, t)$  формулы обращения КИП (37) и метода конечных преобразований Ханкеля (30). В результате с учетом соотношений (27) и (34) имеем

$$\begin{aligned} & U(r, z, t) = \\ & = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_1(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right]; \quad (38) \\ & W(r, z, t) = \\ & = W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right]. \end{aligned}$$

Заключительным этапом исследования является определение функций  $H_1(n, z, t)$ ,  $H_2(n, z, t)$  и  $W_1(t)$ .

Функции  $H_1(n, z, t)$  и  $H_2(n, z, t)$  вычисляли из условия упрощения правых частей дифференциальных уравнений начально-краевых задач относительно выражений для функций  $U_H$  и  $W_H$ :

$$\begin{aligned} \left( j_n^2 - a_1 \frac{d^2}{dz^2} \right) f_k(z) + a_2 j_n \frac{df_{k+2}(z)}{dz} &= 0; \\ \left( a_1 j_n^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) f_{k+2}(z) - a_2 j_n \frac{df_k(z)}{dz} &= 0, \quad k = 3, 4. \end{aligned} \quad (39)$$

В этом случае равенства (39) аналогичны системе уравнений по определению компонент ядра преобразований  $K_1(\lambda_{in}, z)$  и  $K_2(\lambda_{in}, z)$  при  $\lambda_{in} = 0$  в работе [20]. Использование выражений для  $K_1(\lambda_{in}, z)$  и  $K_2(\lambda_{in}, z)$  [20] при подстановке в граничные условия (35) позволяет получить расчетные соотношения для функций  $H_1(n, z, t)$  и  $H_2(n, z, t)$ .

Функцию  $W_1(t)$  определяли из условия  $W(1, h/2, t) = 0$  без учета инерционной составляющей упругой системы  $\left( \frac{d^2 W_1}{dt^2} = 0 \right)$ :

$$W_1(t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[ H_2(n, h/2, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, h/2) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

**Численный анализ результатов.** В качестве примера рассматривали жесткозакрепленную круглую железобетонную пластину ( $b = 1$  м,  $T_0 = 20$  °С,  $E = 2 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu = 0,2$ ,  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $L = 1,75$  Вт/(м·°С),  $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5}$  1/°С,  $k = 0,76 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с) при действии на верхней лицевой поверхности ( $z_* = 0$ ) температурной нагрузки, т. е.

$$\begin{aligned} \omega_1^*(r_*, t_*) &= (1 - r_*) T_{\max} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2t_{\max}} t_* \right) H(t_{\max} - t_*) + H(t_* - t_{\max}) \right]; \\ \omega_2^*(r_*, t_*) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь при аргументе функции  $t_{\max} - t_x$  и  $t_x - t_{\max}$ , равном в общем виде  $\tilde{t}$ ,  $H(\tilde{t})$  — единичная функция Хэвисайда ( $H(\tilde{t}) = 1$  при  $\tilde{t} \geq 0$ ,  $H(\tilde{t}) = 0$  при  $\tilde{t} < 0$ );  $T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$ ;  $T_{\max}^*$ ,  $t_{\max}$  — максимальные

значения внешнего температурного воздействия и соответствующего ему времени ( $T_{\max}^* = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

Исследовали напряженно-деформированное состояние конструкций различной толщины при высокоскоростном температурном нагружении в течение  $t_{\max} = 0,03 \text{ с}$ .

В первом приближении ( $k = 1$ ) задача теплопроводности (6)–(9) решается без учета деформирования пластины. На последующих этапах ( $k = 2, 3, \dots$ ) вследствие решения задачи термоупругости (10)–(13) происходит уточнение функции изменения температуры  $T$ . Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия

$$\left| \frac{\int_0^h T_k(0, z, t_{\max}) dz - \int_0^h T_{k-1}(0, z, t_{\max}) dz}{\int_0^h T_k(0, z, t_{\max}) dz} \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

Данное условие в рассматриваемой задаче выполняется для  $h^* = 0,1 \text{ м}$  при  $k = 3$ , а для  $h^* = 0,01 \text{ м}$  при  $k = 5$ .

На рис. 2–6 представлены результаты расчета, на основании которых можно сделать следующие выводы.

1. При высокоскоростном температурном нагружении инерционные характеристики упругой системы в тонких пластинах ( $h^* = 0,01 \text{ м}$ ) (см. рис. 2, кривая 1) оказывают влияние на изменение аксиальной компоненты вектора перемещений  $W^*$  во времени  $t_*$ . В более толстых конструкциях ( $h^* = 0,1 \text{ м}$ ) (см. рис. 2, кривая 2) данная зависимость не наблюдается (характер изменения во времени  $W^*$  и  $\omega_1^*$  совпадает), и в этом случае при исследовании задачи теории упругости можно использовать квазистатические уравнения равновесия (время  $t_*$  является параметром).

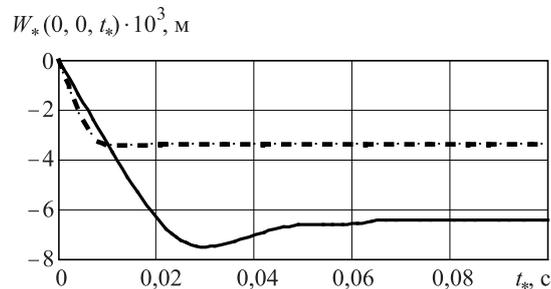


Рис. 2. Изменение  $W(0, 0, t_*)$  во времени  $t_*$ :

1 —  $h^* = 0,01 \text{ м}$ ; 2 —  $h^* = 0,1 \text{ м}$  (численные результаты увеличены в 5 раз)

2. Для пластины толщиной  $h^* = 0,01$  м аксиальная компонента вектора перемещений  $W^*$  по координате  $z$  изменяется по параболической зависимости (см. рис. 3). Данный характер наблюдается также при  $h^* = 0,1$  м. Следует отметить, что в пластинах рассматриваемых толщин радиальная компонента вектора перемещений  $U^*$  по координате  $z_*$  изменяется линейно.

3. Наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_{rr}$  наблюдаются на лицевой поверхности пластины  $z_* = 0$  (см. рис. 4, кривая 1). Данная компонента напряжений уменьшается по толщине пластины (см. рис. 4, кривая 2) и практически отсутствует при  $z_* = h^*$ . При этом значения и характер распределения нормальных напряжений существенно зависят от толщины пластины  $h^*$ .

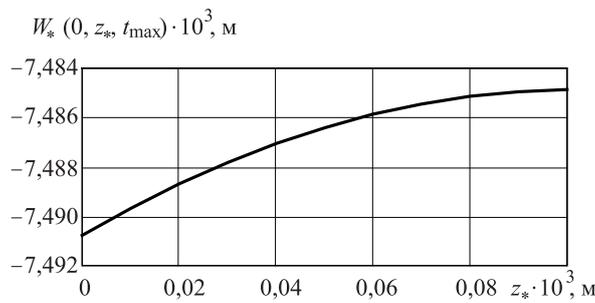


Рис. 3. Изменение  $W^*(0, 0, t_{\max})$  по толщине пластины при  $h^* = 0,01$  м

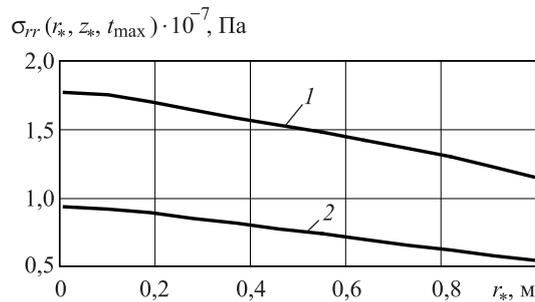


Рис. 4. Изменение  $\sigma_{rr}(r_*, z_*, t_{\max})$  по радиальной координате  $r_*$  ( $h^* = 0,01$  м, 1 —  $z_* = 0$ , 2 —  $z_* = h^*/2$ )

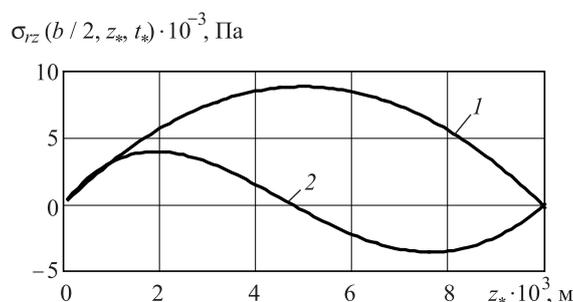


Рис. 5. Изменение  $\sigma_{rz}(b/2, z_*, t_*)$  по толщине пластины:

1 —  $h^* = 0,01$  м,  $1 - t_* = t_{\max}$ ; 2 —  $t_* > t_{\max}$  (значения увеличены в  $10^3$  раз)

4. Касательные напряжения  $\sigma_{rz}(b/2, z_*, t_*)$  зависят от характера изменения температурного воздействия во времени  $t_*$ . Инерционные свойства упругой системы в случае  $t_* = t_{\max}$  определяют закон изменения по толщине пластины в виде параболической зависимости (см. рис. 5, кривая 1). При установившемся режиме температурного нагружения  $t_* > t_{\max}$  значения  $\sigma_{rz}(b/2, z_*, t_*)$  существенно уменьшаются и описываются двумя полуволнами вдоль образующей цилиндрической поверхности (см. рис. 5, значения кривой 2 увеличены в  $10^3$  раза).

5. В рассматриваемой конструкции при толщине  $h^* = 0,1$  м температурное поле по толщине пластины распределяется по линейной зависимости (см. рис. 6, а, кривая 1), а в случае увеличения толщины пластины до  $h^* = 0,3$  м — по параболической (см. рис. 6, а, кривая 2). При этом деформации пластины не оказывают влияния на зависимость  $T^*(0, z_*, t_{\max}) - z_*$ . Причем в тонких пластинах ( $h^* = 0,01$  м) деформации и скорость их изменения оказывают влияние на характер изменения температурного поля по толщине пластины. На рис. 6, б представлены графики зависимости  $T^*(0, z_*, t_{\max}) - z_*$ .

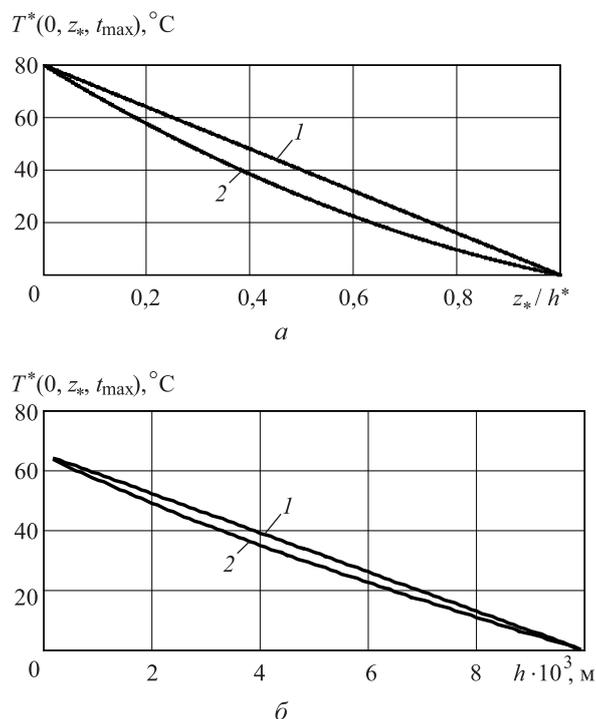


Рис. 6. Изменение  $T^*(0, z_*, t_{\max})$  по толщине пластины:

$a$  —  $h^* = 0,1$  м (1);  $h^* = 0,3$  м (2);  $b$  —  $h^* = 0,01$  м;  
 1 — без учета деформации пластины, 2 — с учетом

Следует отметить, что итерационный процесс исследования начально-краевой задачи (1)–(5) в несвязанной постановке позволяет учесть взаимное влияние температурного поля и деформаций в теле пластины.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Подстригач Я.С. *Теплоупругость тел неоднородной структуры*. Москва, Наука, 1984, 368 с.
- [2] Боли Б., Уэйнер Дж. *Теория температурных напряжений*. Москва, Мир, 1964, 520 с.
- [3] СП 27.13330.2011. *Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях повышенных и высоких температур*. Москва, 2011, 116 с.
- [4] Курпатов Д.В. Воздействие высоких температур пожара на строительные конструкции. *Инженерно-строительный журнал*, 2009, № 4, с. 41–43.
- [5] Новацкий В. *Динамические задачи термоупругости*. Москва, Мир, 1970, 256 с.
- [6] Филатов В.Н. Термоупругость пластин и пологих оболочек переменной толщины при конечных прогибах. Дис. ... д-ра техн. наук: *Нелинейные задачи расчета тонкостенных конструкций*. Саратов, СГУ, 1989, с. 108–110.

- [7] Радаев Ю.Н., Семенов Д.А. Гармонические связанные термоупругие волны в свободном теплоизолированном цилиндрическом волноводе. *Вестник Самарского государственного технического университета. Естественно-научная серия*, 2008, № 8/2 (67), с. 109–129.
- [8] Кудинов В.А., Кузнецова А.Э., Еремин А.В. Аналитическое решение квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды. *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2014, вып. 2 (35), с. 130–135.
- [9] Жорник А.И., Жорник В.А., Савочка П.А. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра. *Известия Южного Федерального университета. Технические науки*, 2012, вып. 6 (131), с. 63–69.
- [10] Жуков П.В. Расчет температурных полей и термических напряжений в толстостенном цилиндре при импульсном подводе теплоты. *Вестник ИГЭУ*, 2013, вып. 3, с. 1–4.
- [11] Кудинов В.А., Карташев Э.М., Калашников В.В. *Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций*. Москва, Высшая школа, 2005, 430 с.
- [12] Кудинов В.А., Клебнев Р.М., Куклова Е.А. Получение точных аналитических решений нестационарных задач теплопроводности ортогональными методами. *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2017, т. 21, № 1, с. 197–206.
- [13] Коваленко А.Д. *Введение в термоупругость*. Киев, Наукова думка, 1965, 204 с.
- [14] Сеницкий Ю.Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы. *АН УССР, Прикладная механика*, 1982, т. 18, № 6, с. 34–41.
- [15] Лычев С.А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра. *Вестник Самарского государственного технического университета*, 2003, № 4 (30), с. 112–124.
- [16] Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2010, № 4, с. 138–154.
- [17] Лычев С.А., Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости. *Вестник Самарского государственного технического университета. Естественно-научная серия*, 2002, специальный выпуск, с. 16–38.
- [18] Уфлянд Я.С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. Москва–Ленинград, Издательство АН СССР, 1963, 367 с.
- [19] Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики. *Известия вузов. Математика*, 1991, № 4, с. 57–63.
- [20] Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жесткозакрепленной пластины. *Вестник Самарского государственного технического университета. Естественно-научная серия*, 2011, № 8 (89), с. 142–152.

Статья поступила в редакцию 21.12.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 5. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1761>

**Шляхин Дмитрий Аверкиевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Строительная механика и сопротивление материалов» Самарского государственного технического университета. e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

**Даулетмуратова Жанна Маратовна** — инженер кафедры «Строительная механика и сопротивление материалов» Самарского государственного технического университета. e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

## **Nonstationary axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed circular plate**

© D.A. Shlyakhin, Zh.M. Dauletmuratova

Samara State Technical University (Samara Polytech), Samara, 443100, Russia

*The study focuses on a new closed solution for the axisymmetric dynamic problem of the thermoelasticity theory for a rigidly fixed circular isotropic plate in the case of a temperature change on its face surfaces. The mathematical formulation of the problem under consideration includes linear equations of motion and heat conduction in a spatial statement with respect to the components of the displacement vector, as well as the temperature change functions. Not self-adjoint equations were investigated in an unrelated formulation. First, we considered the initial-boundary heat conduction problem without taking into account the deformation of the plate; next, we examined the thermoelasticity problem under the action of a given (definite) temperature change function. Then, we refined the calculation relations of the heat conduction problem taking into account the change in the structure shape. To solve the problems, the mathematical apparatus of separation of variables was used in the form of finite integral transformations — Fourier, Hankel transforms, and generalized integral transformation. At the same time, at each stage of the investigation, we performed a procedure to reduce the boundary conditions to a form that allows the corresponding transformation to be applied. Findings of the research show that the calculated design relations make it possible to determine the stress-strain state of a rigidly fixed circular plate for an arbitrary axisymmetric temperature external action.*

**Keywords:** circular plate, thermoelasticity theory, nonstationary temperature effect, finite integral transformations

### REFERENCES

- [1] Podstrigach Ya.S. *Teplouprugost tel neodnorodnoy struktury* [Thermoelasticity of bodies of non-uniform structure]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 368 p.
- [2] Boley B.A., Weiner J.H. *Theory of thermal stresses*. New York-London, John Wiley and Sons, Inc., 1960, 586 p. [In Russ.: Boley B.A., Weiner J.H. *Teoriya temperaturnykh napriazheniy*. Moscow, Mir Publ., 1964, 520 p.]
- [3] SP 27.13330.2011. *Betonnye i zhelezobetonnye konstruksii, prednaznachennye dliya raboty v usloviyakh povyshennykh i vysokikh temperatur* [Code of Regulations 27.13330.2011. Concrete and Reinforced Concrete Structures intended for the Service in Elevated and High Temperatures]. Moscow, 2011, 116 p.
- [4] Kurpatov D.V. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal — Magazine of Civil Engineering*, 2009, no. 4, pp. 41–43.
- [5] Novatskiy V. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic problems of thermoelasticity]. Moscow, Mir Publ., 1970, 256 p.
- [6] Filatov V.N. *Termouprugost plastin i plogikh obolochek peremennoy tolschiny pri konechnykh progibakh. Dis. dokt. tekhn. nauk* [Thermoelasticity of plates and shallow shells of variable thickness at finite deflections. Dr. Eng. Sc. diss.]. *Nelineinye zadachi rascheta tonkostennykh konstruksii* [Nonlinear problems of calculating thin-walled structures]. Saratov, SGU, 1989, pp. 108–110.
- [7] Radaev Yu.N., Semenov D.A. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvenno-nauchnaya seriya — Journal of Samara State University. Natural Science Series*, 2008, no. 8/2 (67), pp. 109–129.

- [8] Kudinov V.A., Kuznetsova A.E., Eremin A.V. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki — Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2014, no. 2 (35), pp. 130–135.
- [9] Zhornik A.I., Zhornik V.A., Savochka P.A. *Izvestiya Yuzhnogo Federalnogo universiteta. Tekhnicheskie nauki — Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2012, no. 6 (131), pp. 63–69.
- [10] Zhukov P.V. *Vestnik IGEU*, 2013, no. 3, pp. 1–4.
- [11] Kudinov V.A., Kartashev E.M., Kalashnikov V.V. *Analiticheskie resheniya zadach teplomassoperenosa i termouprugosti dlya mnogosloynnykh konstruksiy* [Analytical solutions of heat and mass transfer and thermoelasticity problems for multilayer structures]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005, 430 p.
- [12] Kudinov V.A., Klebneev R.M., Kuklova E.A. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki — Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 197–206.
- [13] Kovalenko A.D. *Vvedenie v termouprugost* [Introduction to thermoelasticity]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1965, 204 p.
- [14] Senitskiy Yu.E. *AN USSR, Prikladnaya mekhanika (Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Applied Mechanics)*, 1982, vol. 18, no. 6, pp. 34–41.
- [15] Lychev S.A. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta — Journal of Samara State University*, 2003, no. 4 (30), pp. 112–124.
- [16] Lychev S.A., Manzhurov A.V., Yuber S.V. *Izvestiya RAN, Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids. Journal of Russian Academy of Sciences*, 2010, no. 4, pp. 138–154.
- [17] Lychev S.A., Senitskiy Yu.E. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvenno-nauchnaya seriya — Journal of Samara State University. Natural Science Series*, 2002, no. S, pp. 16–38.
- [18] Uflyand Ya.S. *Integralnye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transformations in problems of elasticity theory]. Moskva, Leningrad, USSR Academy of Sciences Publ., 1963, 367 p.
- [19] Senitskiy Yu.E. *Izvestiya vuzov. Matematika — Russian Mathematics (Izv. VUZ)*, 1991, no. 4, pp. 57–63.
- [20] Shlyakhin D.A. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvenno-nauchnaya seriya — Journal of Samara State University. Natural Science Series*, 2011, no. 8 (89), pp. 142–152.

**Shlyakhin D.A.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Construction Mechanics and Strength of Materials, Samara State Technical University (Samara Polytech).  
e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

**Dauletmuratova Zh.M.**, engineer, Department of Construction Mechanics and Strength of Materials, Samara State Technical University (Samara Polytech).  
e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru