

Управление тягой вдоль брахистохроны при наличии вязкого трения

© А.В. Зароднюк, А.Н. Закиров, О.Ю. Черкасов

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

Рассмотрена задача оптимизации управляемого спуска летательного аппарата в однородном поле сил тяжести при наличии сопротивляющейся среды и ускоряющей силы при движении в вертикальной плоскости. В качестве управления приняты подъемная сила и сила тяги. Исследовано и описано движение материальной точки по кривой, когда управляющими являются нормальная составляющая силы реакции опоры и разгоняющая сила. Цель управления заключается в максимизации горизонтальной дальности движения (терминальный член в функционале) и минимизации энергетических затрат (интегральный член) в заданный момент окончания процесса. Максимизация дальности движения решается задачей о брахистохроне, т. е. задачей выбора формы траектории, соединяющей две заданные точки в вертикальной плоскости, время движения по которой минимально. Для решения задачи применяется принцип максимума Понтрягина и методы качественного исследования динамических систем. Установлено, что экстремальные траектории соответствуют движению с особым управлением для нормальной реакции опорной кривой и с регулярным управлением для тяги. Экстремальное управление построено в виде обратной связи по фазовым переменным исходной системы. Выявлены характерные свойства траекторий, что позволило обосновать результаты, полученные другими авторами с помощью численного моделирования или сформулированные в виде гипотез. Показано, что при высокой длительности процесса экстремальная траектория складывается из трех участков, представляющих собой выход в окрестность асимптотической магистрали, движение в этой окрестности и выход для удовлетворения конечных условий. Полученные результаты можно использовать для построения квазиоптимальных решений и в качестве эффективных начальных приближений при численном решении задач оптимизации траекторий, описываемых моделями более высокого порядка.

Ключевые слова: брахистохрона, особое управление, фазовый портрет, управление тягой

Введение. Первые работы, посвященные программированию тяги вдоль заданной траектории, появились в середине XX в. в связи с развитием реактивной техники. В работах [1–3] приведено решение задачи Годдарда о вертикальном подъеме ракеты на максимальную высоту. Было установлено наличие участка промежуточной тяги и программа чередования особых и неособых дуг. Аналогичные задачи оптимизации тяги при одномерном движении опубликованы для случая горизонтального полета [4] или движения тележки при наличии сопротивления, нелинейно зависящего от скорости [5]. Анализ задач для более сложных моделей атмосферы для одномерного движения изучен авторами работ [6, 7]. В статье [8] задача Годдарда обобщена

для случая плоского движения. Оптимизация траекторий летательного аппарата в случае, когда наряду с тягой в качестве управления принят угол наклона траектории, рассмотрена в работах [9–11].

Примерами приложений различных обобщений задачи о брахистохроне могут служить задача оптимизации траекторий летательных аппаратов, для которых можно управлять подъемной силой без изменения силы сопротивления, и задача оптимального преследования прямолинейно движущегося самолета. Постановка задачи актуальна для проектирования оптимального профиля перемещения колонны бурильных и обсадных труб в скважины с заданными начальной и конечной точками, при определении формы лотков для различных сыпучих материалов, при построении профиля железнодорожных сортировочных горок, при выборе формы эвакуационных трапов, аттракционов типа американских горок и т. д. [12].

Обобщения классической задачи о брахистохроне с учетом разгоняющей силы исследованы авторами работ [13–18]. В работе [13] приведены результаты моделирования для случая разгоняющей силы, пропорциональной скорости, а в работе [14] такая же задача решена с помощью генетического алгоритма. В диссертации [15] представлена задача о брахистохроне с постоянной разгоняющей силой, но при отсутствии сопротивления. В работе [16] в задаче учитывалось наличие постоянной разгоняющей силы и силы линейного вязкого трения. В статьях [17, 18] изучен случай квазипостоянной разгоняющей силы. При этом задача решалась на классе оптимальных траекторий, для которых время прохождения каждой ее внутренней точки минимально для этой точки, аналитически установлены свойства траекторий с квазипостоянной разгоняющей силой без трения.

Цель данной работы — построение синтеза экстремального управления при одновременном управлении силой тяги и углом наклона траектории.

Постановка задачи. Рассмотрим движение материальной точки массой m в вертикальной плоскости в однородном поле сил тяжести и в однородной сопротивляющейся среде. В качестве управления примем нормальную составляющую силы реакции опоры и силу тяги. Цель управления заключается в максимизации горизонтальной дальности движения материальной точки (терминальный член в функционале) и минимизации энергетических затрат (интегральный член) в заданный момент окончания процесса. С задачей максимизации дальности движения взаимосвязана задача о брахистохроне, т. е. задача выбора формы траектории, соединяющей две заданные точки вертикальной плоскости, время движения по которой будет минимальным, при этом также должны быть минимизированы затраты на управление.

Для облегчения исследования решим задачу максимизации горизонтальной дальности движения материальной точки за фиксированное время. Предположим, что зависимость максимальной дальности движения от времени носит монотонный характер. Тогда задача о брахистохроне и задача максимизации дальности движения за заданное время взаимосвязаны по следующим причинам. Примем полученное в результате решения задачи с фиксированным временем максимальное значение дальности движения в качестве заданного конечного условия для задачи быстрогодействия. Тогда минимальное время, полученное в результате решения последней, совпадет с фиксированным временем при решении задачи максимизации дальности движения. Траектории также совпадут.

В отличие от перечисленных публикаций в настоящей работе управляющая сила принимается в качестве управления наряду с силой реакции опорной кривой, при этом уравнения движения принимают вид [12]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{v} = p - v - \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u - \frac{\cos \theta}{v}, \end{cases} \quad (1)$$

где x, y — безразмерные горизонтальная и вертикальная координаты материальной точки соответственно; v — модуль безразмерной скорости; θ — угол наклона траектории; $u = \frac{N}{mv}$ — управление, выражающееся через реакцию опорной кривой N ; $u \in U$, где U — множество кусочно-непрерывных функций; p — управление, сила тяги, $p \in P$, $P = \{-\bar{p} \leq p(t) \leq \bar{p}, \bar{p} > 0\}$.

Ограничения на реакцию опоры не будем накладывать. Время окончания процесса T фиксировано. Начальные условия для системы уравнений (1) имеют вид

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0. \quad (2)$$

Начальное значение для угла наклона траектории θ и все конечные условия приняты свободными. Целью управления является минимизация функционала

$$J = -x(T) + \int_0^T p^2(t) dt \rightarrow \min_{u \in U, p \in P}.$$

Отметим, что управление u входит только в одно уравнение системы (1). При отсутствии ограничений на это управление и свободных краевых значений для угла наклона траектории θ можно провести редукцию системы (1) к системе третьего порядка. В этой системе в качестве управления считаем угол θ . После того как регулярное управление по переменной θ найдено, из последнего уравнения системы (1) вычислим особое [19] управление по управлению u .

Введем переменную $\xi(t) = \int_0^t p^2(\tau) d\tau$ и перейдем к задаче Майера

для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{v} = p - v - \sin \theta, \\ \dot{\xi}(t) = p^2 \end{cases} \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad \xi(0) = 0 \quad (4)$$

и для функционала

$$J = -x(T) + \xi(T) \rightarrow \min_{\theta \in U, p \in P} . \quad (5)$$

Необходимые условия оптимальности и сведение к краевой задаче. Функция Понтрягина [20] для задач (3)–(5) имеет вид

$$H = \psi_x v \cos \theta + \psi_y v \sin \theta + \psi_v (p - v - \sin \theta) + \psi_\xi p^2 = C.$$

Уравнения для сопряженных переменных запишем в виде

$$\dot{\psi}_x = 0, \quad \dot{\psi}_y = 0, \quad \dot{\psi}_\xi = 0, \quad \dot{\psi}_v = -\cos \theta + \psi_v.$$

Из условий трансверсальности получаем соотношения

$$\psi_x(t) = 1, \quad \psi_y(t) = 0, \quad \psi_\xi(t) = -1, \quad t \in [0, T], \quad \psi_v(T) = 0.$$

Найдем условия максимума функции H по переменной θ :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -v \sin \theta - \psi_v \cos \theta = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = -\frac{v}{\cos \theta} < 0,$$

откуда получаем

$$\psi_v = -v \operatorname{tg} \theta, \quad \theta(T) = 0, \quad \cos \theta > 0.$$

Условия максимума функции H по переменной p :

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \psi_v - 2p, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = -2 < 0.$$

Поскольку

$$H''_{\theta\theta} H''_{pp} - (H''_{p\theta})^2 = 2v/\cos\theta > 0,$$

то экстремум есть, и он максимальный. Экстремальное управление тягой определяется формулой

$$p = \frac{\psi_v}{2} = -\frac{v \operatorname{tg} \theta}{2}.$$

С учетом ограничений на силу управления получаем следующую логическую цепочку управления тягой:

$$\begin{aligned} p(t) &= \bar{p} \quad \text{при } v \operatorname{tg} \theta < -2\bar{p}, \\ p(t) &= -\frac{v \operatorname{tg} \theta}{2} \quad \text{при } -2\bar{p} \leq v \operatorname{tg} \theta \leq 2\bar{p}, \\ p(t) &= -\bar{p} \quad \text{при } v \operatorname{tg} \theta > 2\bar{p}. \end{aligned}$$

Дифференцируя по времени ψ_v и выражая угол наклона траектории $\dot{\theta}$, задачу оптимального управления сводим к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = p - v - \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{v} (1 + (2v - p) \sin \theta); \end{cases} \quad (6)$$

$$v(0) = v_0, \quad \theta(T) = 0.$$

После того как экстремальные значения $v(t)$, $\theta(t)$ определены, соответствующие значения $x(t)$, $y(t)$ определяют с помощью квадратур. Особое управление по u вычисляется из последнего уравнения системы (1):

$$u = \frac{\cos \theta}{v} (2 + (2v - p) \sin \theta).$$

Получаем три системы уравнений:

$$v \operatorname{tg} \theta < -2\bar{p}, \quad \begin{cases} \dot{v} = \bar{p} - v - \sin \theta, & v(0) = v_0 \\ \dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{v} (1 + (2v - \bar{p}) \sin \theta), & \theta(T) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$-2p \leq v \operatorname{tg} \theta \leq 2\bar{p}, \begin{cases} \dot{v} = p - v - \sin \theta, & v(0) = v_0 \\ p(t) = \frac{-(v \operatorname{tg} \theta)}{2} \left\{ \dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{v} \left(1 + v \left(2 + \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} \right) \sin \theta \right) \right\}, & \theta(T) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$v \operatorname{tg} \theta > 2\bar{p}, p(t) = -\bar{p} : \begin{cases} \dot{v} = -\bar{p} - v - \sin \theta, & v(0) = v_0 \\ \dot{\theta} = \frac{\cos \theta}{v} (1 + (2v + \bar{p}) \sin \theta), & \theta(T) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Тяга принимает промежуточные и максимальные значения по абсолютной величине — области в плоскости (θ, v) (рис. 1).

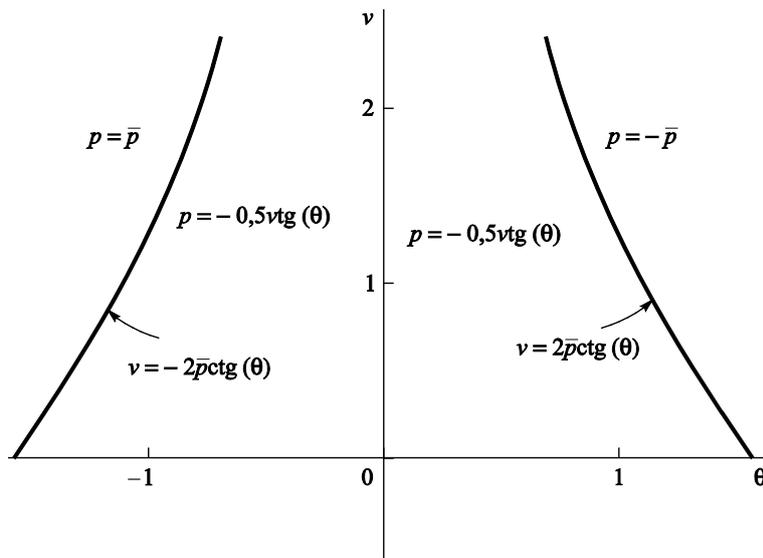


Рис. 1. Области движения с промежуточной и граничной тягой

Система уравнений (7) при постоянном $p \in (-1; 1]$ имеет две точки покоя: (θ_1, v_1) , где $v_1^* = p + 1$, $\theta_1^* = -\frac{\pi}{2}$, и (θ_2, v_2) , где $v_2^* = \frac{3p + \sqrt{p^2 + 8}}{4}$, $\sin \theta_2^* = \frac{p - \sqrt{p^2 + 8}}{4}$. Первая из этих точек, отвечающая вертикальному движению вниз, является устойчивым дикритическим узлом, а вторая — седлом. При $p > 1$ возникает еще одно стационарное решение: (θ_3, v_3) , где $v_3^* = p - 1$, $\theta_3^* = \frac{\pi}{2}$, также являющееся устойчивым дикритическим узлом. Соответствующие фазовые портреты представлены на рис. 2, 3.

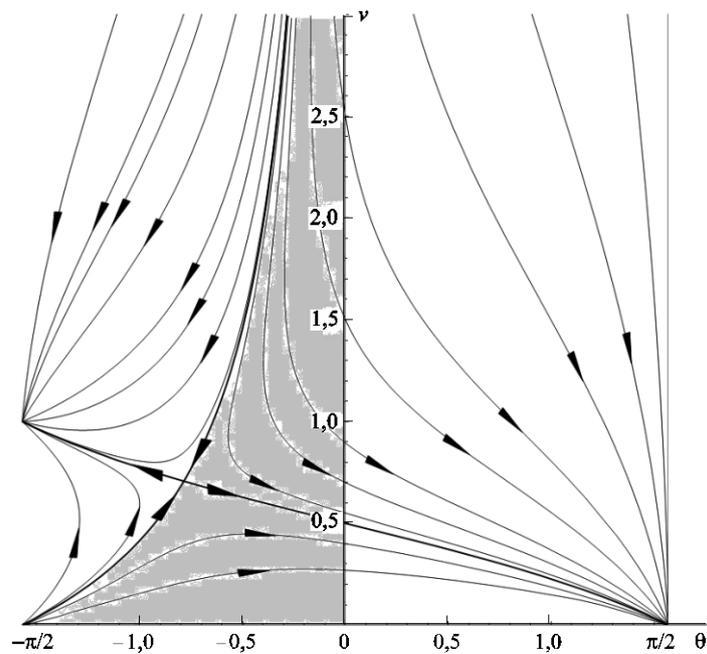


Рис. 2. Фазовый портрет системы уравнений (7) при постоянном значении $p = 0 \in (-1,1]$

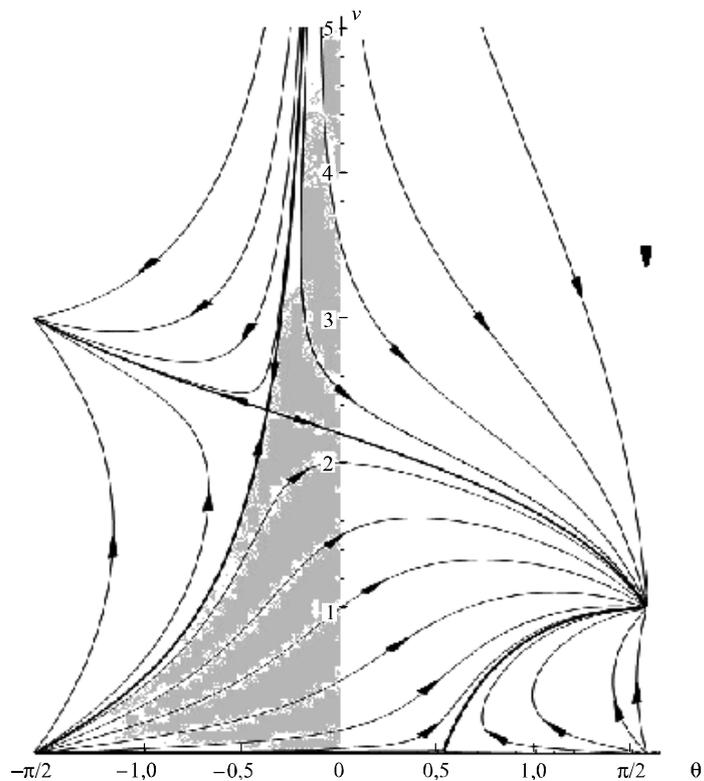


Рис. 3. Фазовый портрет системы уравнений (7) при постоянном значении $p = 2$

Анализ фазового портрета позволяет установить характерные свойства решений краевой задачи (6). При фиксированном значении начальной скорости $v(0)$ начальное значение для угла наклона траектории $\theta(0)$ следует выбирать между сепаратрисой, входящей в седло, и осью ординат, чтобы в момент окончания процесса могло выполняться краевое условие $\theta(T) = 0$. Возможно множество начальных условий (см. рис. 2, 3, затемненные области).

Анализ системы уравнений (9) показывает, что движение с управлением $p(t) = -\bar{p}$ не позволяет достичь значения $\theta(T) = 0$, поэтому оно не удовлетворяет решению краевой задачи и не включается в состав экстремальной траектории.

При движении с промежуточной тягой система уравнений (8) имеет одно стационарное решение типа «седла» (рис. 4).

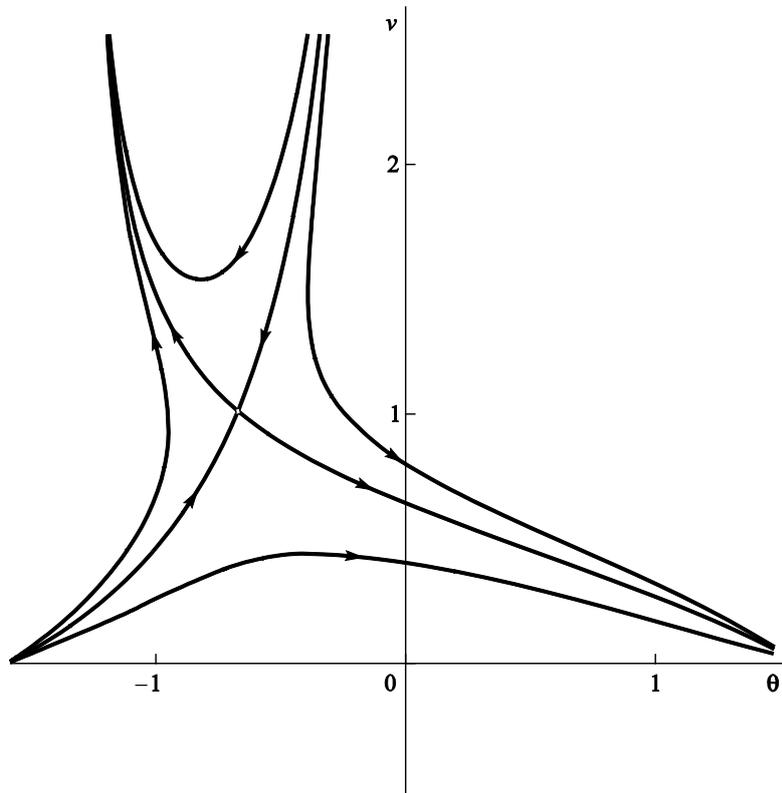


Рис. 4. Фазовый портрет системы уравнений (8) при промежуточной

$$\text{тяги } p(t) = -\frac{v \operatorname{tg} \theta}{2}$$

Результаты расчетов. Тяге для параметров $\bar{p} = 0, 2$, $T = 2, 3$ соответствует траектория в вертикальной плоскости (рис. 5, 6). Решение краевых задач осуществлялось методом стрельбы при использовании

программной среды Wolfram Mathematica и численного моделирования для параметров $\bar{p} = 1$, $T = 1$ (рис. 7, 8).

Характерно, что тип особой точки, отвечающий наклонному движению, не изменяется при использовании различных моделей вязкого трения и при учете разгоняющей силы. Эта точка представляет собой асимптотическую магистраль экстремального движения. Ее наличие является качественным и «грубым» свойством краевых задач, к которым сводятся задачи оптимального управления, если траектория проводит избыток времени в ограниченной области подпространства состояний.

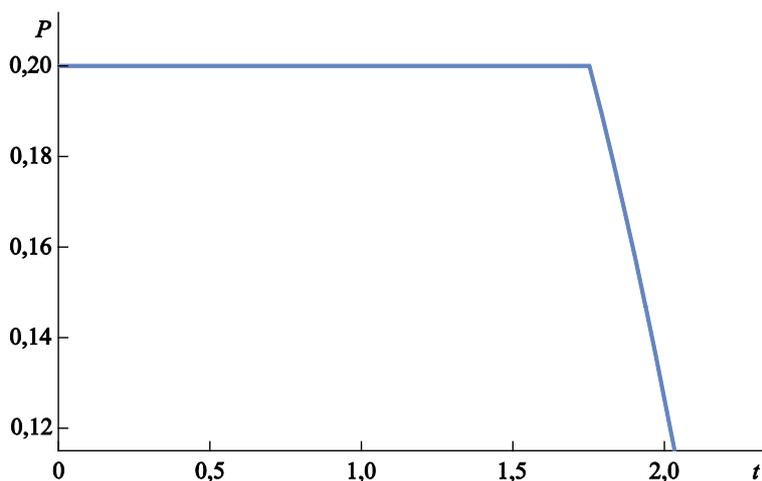


Рис. 5. Изменение тяги вдоль экстремальной траектории при $\bar{p} = 0, 2$, $T = 2, 3$

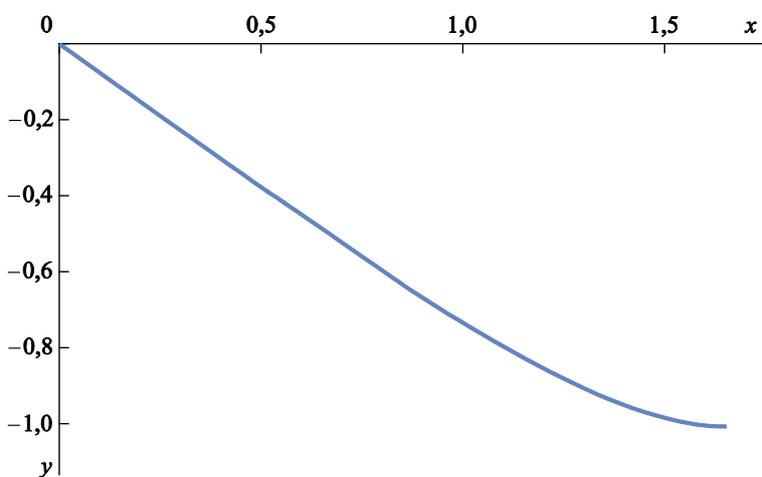


Рис. 6. Траектория в плоскости (x, y) , $\bar{p} = 0, 2$, $T = 2, 3$

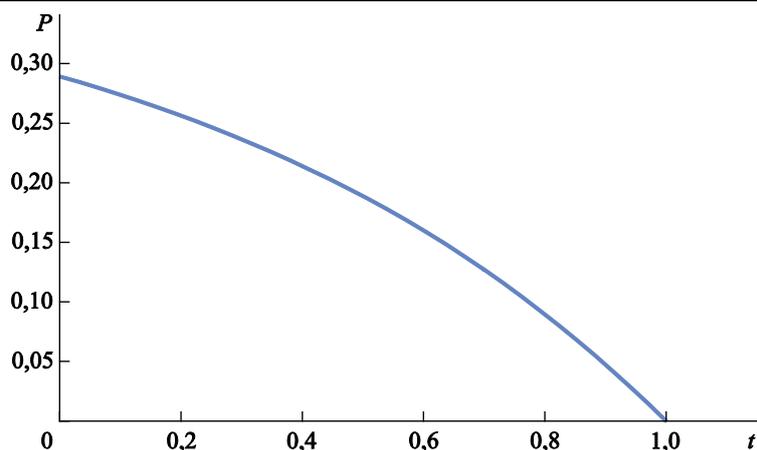


Рис. 7. Изменение тяги вдоль экстремальной траектории при $\bar{p} = 1, T = 1$

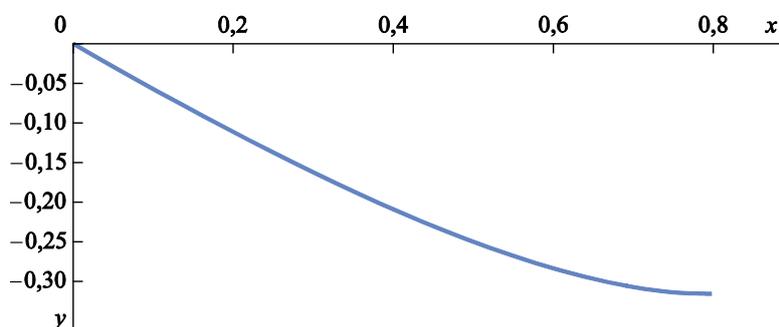


Рис. 8. Траектория в плоскости (x, y) , $\bar{p} = 1, T = 1$

При достаточно больших значениях времени T оптимальная траектория состоит из трех участков: первый из них соответствует быстрому движению из начальной точки в окрестность «седловой» точки, второй — медленному «дрейфу» в окрестности «седловой» точки, а третий — быстрому выходу из окрестности «седла» в конечную точку на оси ординат. Описанному «дрейфу» фазовой траектории в окрестности «седловой» точки в плоскости (x, y) соответствует участок, близкий к прямолинейному.

Заключение. Проведенный анализ задачи о брахистохроне с разгоняющей силой при свободном значении конечной высоты позволяет обосновать результаты численного моделирования [13, 14, 16] и уточнить свойства аналитических решений [17, 18]. Задачи оптимизации траекторий в более сложной постановке нельзя исследовать методом фазовой плоскости, но при пониженной размерности можно использовать в качестве хорошего начального приближения для эф-

фективного численного решения соответствующих краевых задач. Кроме того, полученные качественные свойства траекторий можно применять для построения квазиоптимальных управлений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Охоцимский Д.Е. К теории движения ракет. *Прикладная математика и механика*, 1946, т. X, вып. 2, с. 251–272.
- [2] Tsien H.S., Evans R.C. Optimum Thrust Programming for a Sounding Rocket. *Journal of American Rocket Society*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 99–107.
- [3] Miele A. Optimum Climbing Technique for a Rocket-Powered Aircraft. *Jet Propulsion*, 1955, vol. 25, no. 8, pp. 385–391.
- [4] Miele A. Extremization of Linear Integrals by Green's Theorem. *Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems*. New York, Academic, 1962, pp. 69–98.
- [5] Dmitruk A., Samylovskiy I. A simple trolley-like model in the presence of a non-linear friction and a bounded fuel expenditure. *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, control and optimization*, 2013, vol. 33, no. 2, pp. 135–147.
- [6] Tsiotras P., Kelley H.J. Goddard Problem with Constrained Time of Flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1992, vol. 15, no. 2, pp. 289–296.
- [7] Tsiotras P., Kelley H.J. Drag-law Effects in the Goddard Problem. *Automatica*, 1991, vol. 27, no. 3, pp. 481–490.
- [8] Bonnans F., Martinon P., Trélat E. Singular Arcs in the Generalized Goddard's Problem. *J. Optim. Theory Appl.*, 2008, vol. 139, pp. 439–461.
- [9] Menon P.K.A., Kelley H.J., Cliff E.M. Optimal Symmetric Flight with an Intermediate Vehicle Model. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1983, vol. 8, no. 3, pp. 312–319.
- [10] Гревцов Н.М., Ефимов О.Е., Мельц И.О. Оптимизация траекторий снижения самолета в вертикальной плоскости. *Ученые записки ЦАГИ*, 1995, т. XXVI, № 3–4, с. 98–110.
- [11] Исаев В.К. Принцип максимума Л.С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет. *Автоматика и телемеханика*, 1961, т. XXII, № 8, с. 986–1001.
- [12] Зароднюк А.В., Черкасов О.Ю. О максимизации горизонтальной дальности и брахистохроне с разгоняющей силой и вязким трением. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2017, № 4, с. 3–10.
- [13] Vratana B., Saje, M. On the Analytical Solution of the Brachistochrone Problem in a Non-conservative Field. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1998, vol. 33, no. 3, pp. 489–505.
- [14] Chen D., Liao G., Wang J. The Solution of Brachistochrone Problem Based on the Genetic Algorithm. *Int. J. of Mechanics Research*, 2015, vol. 4, no. 4, pp. 76–88.
- [15] Thomas V. *The Use of Variational Techniques in the Optimization of Flight Trajectories: Diss. for degree Doctor of Philosophy*. University of Arizona, USA, 1963.
- [16] Drummond J.E., Downes G.L. The Brachistochrone with Acceleration: A Running Track. *J. of Optim. Theory and Appl.*, 1971, vol. 7, no. 6, pp. 444–449.
- [17] Вондрухов А.С., Голубев Ю.Ф. Брахистохрона с разгоняющей силой. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2014, № 6, с. 42–57.
- [18] Вондрухов А.С., Голубев Ю.Ф. Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с разгоняющей силой. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2015, № 3, с. 13–23.

- [19] Брайсон А., Хо Ю Ши. *Прикладная теория оптимального управления*. Москва, Мир, 1972, 544 с.
- [20] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Наука, 1983, 393 с.

Статья поступила в редакцию 20.02.2018

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики FAPM–2017», посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24 – 27 октября 2017 г.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зароднюк А.В., Закиров А.Н., Черкасов О.Ю. Управление тягой вдоль брахистохроны при наличии вязкого трения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 4. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1758>

Зароднюк Алена Владимировна — аспирант кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Автор 14 статей в области оптимизации и управления динамическими системами. e-mail: alenaz_90@inbox.ru

Закиров Артем Наилевич — студент кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Область научных интересов — прикладные задачи оптимального управления. e-mail: zak350@mail.ru

Черкасов Олег Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Автор более 30 статей в области управления движущимися объектами, а также задачника по механике управляемых систем. e-mail: oyuche@yandex.ru

Optimal thrust control for brachistochrone with viscous friction

© A.V. Zarodnyuk, A.N. Zakirov, O.Yu. Cherkasov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

The study focuses on the problem of optimization of the aircraft controlled descent in homogeneous gravity field in the presence of a resisting medium and an accelerating force when moving vertically. As a means of control, lifting force and thrust force are applied. The model under consideration also describes the motion of a point on a curve, where the control variables are the normal component of the reaction force and the accelerating force. The control goal is to maximize the horizontal distance (terminal term) and minimize energy consumption (integral term) over a fixed time interval. The range maximization problem is interrelated with the Brachistochrone problem — the problem of choosing the shape of the trajectory connecting two given points in the vertical plane, the time along which will be minimal. To solve the problem, the Pontryagin maximum principle and the methods of qualitative investigation of dynamical systems are applied. Findings of the research show that extreme trajectories correspond to the motion with singular control for normal reaction of the reference curve and with regular control for thrust. Extreme control is maintained in the form of feedback on the phase variables of the initial system. The characteristic properties of the trajectories were found, which allowed us to substantiate the results obtained by other authors by means of numerical simulation, or formulated as hypotheses. Results suggest that at large time intervals extreme trajectory consists of three parts, which are output in the neighborhood of asymptotic lines, movement in this neighborhood and output to meet the final conditions. The results obtained can be used for the quasi-optimal solutions and as effective initial approximations for the numerical solution of the trajectory optimization problems described by models of a higher order.

Keywords: *brachistochrone, singular control, phase portrait, thrust control*

REFERENCES

- [1] Ohotsimskiy D.E. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1946, vol. X, no. 2, pp. 251–272.
- [2] Tsien H.S., Evans R.C. Optimum Thrust Programming for a Sounding Rocket. *Journal of American Rocket Society*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 99–107.
- [3] Miele A. Optimum Climbing Technique for a Rocket-Powered Aircraft. *Jet Propulsion*, 1955, vol. 25, no. 8, pp. 385–391.
- [4] Miele A. Extremization of Linear Integrals by Green's Theorem. *Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems*. New York, Academic, 1962, pp. 69–98.
- [5] Dmitruk A., Samylovskiy I. A simple trolley-like model in the presence of a nonlinear friction and a bounded fuel expenditure. *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, control and optimization*, 2013, vol. 33, no. 2, pp. 135–147.
- [6] Tsiotras P., Kelley H.J. Goddard Problem with Constrained Time of Flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1992, vol. 15, no. 2, pp. 289–296.
- [7] Tsiotras P., Kelley H.J. Drag-law Effects in the Goddard Problem. *Automatica*, 1991, vol. 27, no. 3, pp. 481–490.
- [8] Bonnans F., Martinon P., Trélat E. Singular Arcs in the Generalized Goddard's Problem. *J. Optim. Theory Appl.*, 2008, vol. 139, pp. 439–461.

- [9] Menon P.K.A., Kelley H.J., Cliff E.M. Optimal Symmetric Flight with an Intermediate Vehicle Model. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1983, vol. 8, no. 3, pp. 312–319.
- [10] Grevtsov N.M., Efimov O.E., Melts I.O. *Uchenye zapiski TsAGI — TsAGI Science Journal*, 1995, vol. XXVI, no. 3–4, pp. 98–110.
- [11] Isaev V.K. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 1961, vol. XXII, no. 8, pp. 986–1001.
- [12] Zarodnyuk A.V., Cherkasov O.Yu. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2017, no. 4, pp. 3–10.
- [13] Vratantar B., Saje M. On the Analytical Solution of the Brachistochrone Problem in a Non-conservative Field. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1998, vol. 33, no. 3, pp. 489–505.
- [14] Chen D., Liao G., Wang J. The Solution of Brachistochrone Problem Based on the Genetic Algorithm. *Int. J. of Mechanics Research*, 2015, vol. 4, no. 4, pp. 76–88.
- [15] Thomas V. *The Use of Variational Techniques in the Optimization of Flight Trajectories: Diss. for degree Doctor of Philosophy*. University of Arizona, USA, 1963.
- [16] Drummond J.E., Downes G.L. The Brachistochrone with Acceleration: A Running Track. *J. of Optim. Theory and Appl.*, 1971, vol. 7, no. 6, pp. 444–449.
- [17] Vondrukhov A.S., Golubev Yu.F. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya - Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, no. 6, pp. 42–57.
- [18] Vondrukhov A.S., Golubev Yu.F. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, no. 3, pp. 13–23.
- [19] Bryson A.E., Jr., Yu-Chi Ho. *Applied optimal control. Optimization, estimation, and control*. Taylor & Francis Group, New York, London, 1975, 481 p. [In Russ.: Bryson A.E., Jr., Yu-Chi Ho. *Prikladnaya teoriya optimalnogo upravleniya*. Moscow, Mir Publ., 1972, 544 p.].
- [20] Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 393 p.

Zarodnyuk A.V., post-graduate student, Department of Applied Mechanics and Control, Lomonosov Moscow State University. Author of 14 research publications and 16 reports at international conferences in the field of control and optimization of the dynamical systems. e-mail: alenaz_90@inbox.ru

Zakirov A.N., student, Department of Applied Mechanics and Control, Lomonosov Moscow State University. Research interests: applied optimal control problems. e-mail: zak350@mail.ru

Cherkasov O.Yu., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Applied Mechanics and Control, Lomonosov Moscow State University. Author of over 30 research publications in the field of control and optimization of dynamical systems. e-mail: oyuche@yandex.ru