УДК 532.5:533 DOI: 10.18698/2308-6033-2018-5-1756

Эллипсоид деформации Н.Е. Жуковского с учетом членов второго порядка малости

© В.М. Овсянников

Московская государственная академия водного транспорта — филиал ФГБОУ ВО «Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова», Москва, 117105, Россия

Ноябрьский институт нефти и газа — филиал Тюменского индустриального университета, г. Ноябрьск, 629802, Ямало-Ненецкий автономный округ, Тюменская обл., Россия

Статья посвящена изучению физического смысла членов второго порядка малости уравнения неразрывности. В работе показано, что обычно отбрасываемые члены высокого порядка малости уравнения неразрывности также дают вклад, например, в генерацию периодических волн, увеличивая более чем в 2 раза интенсивность колебаний, вычисленных Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем. С пренебрежением членами второго порядка малости по времени деформаций или времени течения Н.Е. Жуковским составлено уравнение неразрывности при построении эллипсоида деформации. Н.Е. Жуковский вычислил некоторые из дополнительных членов уравнения, поэтому можно было составить баланс количества вещества с учетом членов второго и третьего порядков малости. Была установлена также неточность в выражении ротора вектора скорости через угловую скорость вращения: на уровне точности членов второго порядка малости. В связь ротора скорости с угловой скоростью вращения должны входить дополнительные члены. Проведенный анализ уравнения неразрывности, обнаруженного в одной из статей Л. Эйлера, содержание которой в 1752 г. он включил в доклад в Берлинской Королевской академии наук, показал, что для несжимаемой жидкости дополнительные члены уравнения создают локальное несохранение. Этот случай следует рассматривать только как модельный, нереализуемый. Для сжимаемого газа локальное несохранение принимает периодический характер и описывает действительно реализуемые течения с периодическими волнами давления или звука, генерируемыми потоком. Установлено, что в уравнениях газовой динамики для сжимаемого газа члены второго порядка малости по времени движения в неоднородной части волнового уравнения приводят к генерации звука и автоколебаний, не связанных с внешними воздействиями на поток.

Ключевые слова: *уравнение неразрывности, члены высокого порядка по времени, автоколебания, волновое уравнение, эллипсоид деформации*

Введение. В 1997–1999 гг. изучая работы Н.Е. Жуковского [1], профессор В.А. Бубнов [2, 3] установил, что при построении эллипсоида деформации уравнение неразрывности было составлено с пренебрежением членами второго порядка малости по времени деформаций или по времени течения. Это отмечается также в первом томе известного учебника по теоретической гидромеханике [4]. Н.Е. Жуковский вычислил некоторые из дополнительных членов уравнения.

Поэтому можно составить баланс количества вещества с учетом членов второго и третьего порядков малости. Затем была обнаружена неточность в выражении ротора вектора скорости через угловую скорость вращения ω. На уровне точности членов второго порядка малости в связь ротора скорости с ω должны входить дополнительные члены. После их учета в 2006 г. получили уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости с членами второго и третьего порядков малости. Была предложена также аналогичная форма уравнения неразрывности для сжимаемого газа. Поскольку автор настоящей статьи имел представление о виде дополнительных членов уравнения неразрывности, ему удалось обнаружить их в малоизвестной статье Л. Эйлера «Принципы движения жидкости» [5], написанной на латыни и доложенной 31 августа 1752 г. в Берлинской Королевской академии наук. Причем более поздняя работа Л. Эйлера с таким же названием, написанная на французском языке, уже не содержала членов высокого порядка малости.

Созданием дифференциального и интегрального исчисления параллельно занимались Г.В. Лейбниц на европейском континенте — в виде теории бесконечно малых и И. Ньютон в Англии — в виде теории исчезающе малых величин. Известно о диспуте между Г.В. Лейбницем и И. Ньютоном о сходстве и различиях теорий и первенстве построения. В теории Лейбница дифференциал рассматривался как малая, но конечная величина $dt = t - t_0$. В теории Ньютона аналог дифференциалов — моменты — должны были сводиться к нулю после завершения построений. Как пишет Л. Карно, Л. Эйлер был приверженцем теории Ньютона и поэтому приравнял члены высокого порядка малости к нулю при выводе уравнения неразрывности.

Цель настоящей работы — изучение физического смысла членов второго порядка малости уравнения неразрывности, обычно отбрасываемых. Законы сохранения как основа математической физики должны быть четко обоснованы. Приведенные в данной статье материалы основаны на выполнении следующих двух положений.

1. Для математической физики важна не словесная формулировка закона сохранения, а его математическое выражение и согласованность с имеющимся полем скорости жидкости или газа.

2. Геометрические построения, применяемые при выводе закона сохранения количества вещества по времени движения жидкости, должны быть выполнены и доведены до конечного результата для объема конечных размеров и конечного интервала времени Δt его перемещения и деформации, для которых справедлива элементарная геометрия конечных величин, а не для бесконечно малых. При преждевременных предельных переходах устремления к нулю размеров контрольной

фигуры пути перемещения жидкой частицы и интервала времени перемещения теряется обоснованность геометрических построений.

О выводе Н.Е. Жуковским уравнения неразрывности. Магистерская диссертация Н.Е. Жуковского [1, 6] посвящена закону сохранения, ставшему центральным принципом в математической физике. Поэтому построение эллипсоида деформации было первой темой, рассмотренной в учебнике [4], по которому преподавали гидрогазодинамику в 1940–1970 гг. В диссертации Н.Е. Жуковского и в учебнике [4, с. 10] имеются замечания о том, что построение эллипсоида выполняют только «с точностью до величин второго порядка малости». Это также отметил В.А. Бубнов в работах [2, 3]. Таким образом, оказывается, что важнейший принцип математической физики отражается математическими соотношениями с неполной степенью точности. Исходя из геометрических построений Н.Е. Жуковского, которые сопровождались подробным расчетом, были установлены и следующие, неучтенные члены, добавленные к левой части уравнения $\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$ ($\mathbf{V}$ — вектор скорости).

Выяснилось, что при построении эллипсоида деформации использовалось скошение координатных осей и вращение, учитываемое ротором вектора скорости. При этом оператор rot V отражает угловую скорость вращения только в первом приближении, а при более точном подходе следует учитывать еще и дополнительные члены.

С учетом дополнительных членов в 2006 г. были получены уравнения неразрывности [6, 7]:

для плоского двумерного течения несжимаемой жидкости

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \Delta t\,[(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y) - (\partial u/\partial y)(\partial v/\partial x)] = 0$$

и для сжимаемого газа

$$\partial\rho/\partial t + \partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y + \Delta t\,\rho\,[(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y) - (\partial u/\partial y)(\partial v/\partial x)] = 0.$$

Здесь u, v — компоненты скорости жидкости или газа вдоль осей x, y; ρ — плотность жидкости; t — время движения жидкой частицы или деформации контрольной фигуры.

О выводе Л. Эйлером уравнения неразрывности. Такие же дополнительные члены уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости были обнаружены в докладе Л. Эйлера [5]. Результаты Н.Е. Жуковского с приведенной выше поправкой совпали с результатом Л. Эйлера. Для плоского двумерного течения уравнение неразрывности, полученное Л. Эйлером, имеет вид

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \Delta t \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = 0.$$

К. Трусделл [7], излагая в 1954 г. содержание доклада Л. Эйлера, выразил дополнительные члены уравнения неразрывности через якобианы вектора скорости второго $\partial(u, v)/\partial(x, y)$, $\partial(v, w)/\partial(y, z)$, $\partial(w, u)/\partial(z, x)$ и третьего $\partial(u, v, w)/\partial(x, y, z)$ порядков.

Для трехмерного течения несжимаемой жидкости уравнение неразрывности Эйлера представлено в виде

$$\mathrm{div}\mathbf{V} + \Delta t\,[\partial(u, v)/\partial(x, y) + \partial(v, w)/\partial(y, z) + \partial(w, u)/\partial(z, x)] + \\ + (\Delta t)^2\,\partial(u, v, w)/\partial(x, y, z) = 0.$$

Использование векторно-скалярного произведения для вывода уравнения неразрывности. Пусть контрольная фигура в начальный момент времени имеет вид куба с единичным размером ребер. Компоненты скорости u, v, w вдоль осей x, y, z через интервал времени Δt деформируют куб в наклонный параллелепипед. Тогда координаты трех ее угловых точек будут иметь следующий вид:

$$1 + \Delta t\partial u/\partial x,\quad \Delta t\partial u/\partial y,\quad \Delta t\partial u/\partial z;$$

$$\Delta t\partial v/\partial x,\quad 1 + \Delta t\partial v/\partial y,\quad \Delta t\partial v/\partial z;$$

$$\Delta t\partial w/\partial x,\quad \Delta t\partial w/\partial y,\quad 1 + \Delta t\partial w/\partial z.$$

Объем параллелепипеда можно выразить через определитель

$$\begin{vmatrix} 1 + \Delta t\partial u/\partial x, & \Delta t\partial u/\partial y, & \Delta t\partial u/\partial z \\ \Delta t\partial v/\partial x, & 1+\Delta t\partial v/\partial y, & \Delta t\partial v/\partial z \\ \Delta t\partial w/\partial x, & \Delta t\partial w/\partial y, & 1+\Delta t\partial w/\partial z \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель на отдельные слагаемые и объединим их в три определителя второго порядка и один определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 + \Delta t\partial u/\partial x, & \Delta t\partial u/\partial y, & \Delta t\partial u/\partial z \\ \Delta t\partial v/\partial x, & 1+\Delta t\partial v/\partial y, & \Delta t\partial v/\partial z \\ \Delta t\partial w/\partial x, & \Delta t\partial w/\partial y, & 1+\Delta t\partial w/\partial z \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \Delta t\partial v/\partial y + \Delta t\partial w/\partial z + (\Delta t)^2(\partial v/\partial y)(\partial w/\partial z) + \Delta t\partial u/\partial x + \\ + (\Delta t)^2(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y) + (\Delta t)^2(\partial w/\partial z)(\partial u/\partial x) + (\Delta t)^3(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y)(\partial w/\partial z) + \\ + (\Delta t)^3(\partial u/\partial y)(\partial w/\partial x)(\partial v/\partial z) + (\Delta t)^3(\partial v/\partial x)(\partial w/\partial y)(\partial u/\partial z) - (\Delta t)^2(\partial u/\partial z) \times \\ \times (\partial w/\partial x) - (\Delta t)^3(\partial w/\partial x)(\partial v/\partial y)(\partial u/\partial z) - (\Delta t)^3(\partial v/\partial x)(\partial u/\partial y)(\partial w/\partial z) - \\ - (\Delta t)^2(\partial u/\partial y)(\partial v/\partial x) - (\Delta t)^2(\partial v/\partial z)(\partial w/\partial y) - (\Delta t)^3(\partial u/\partial x)(\partial w/\partial y)(\partial v/\partial z) = \\ = 1 + \Delta t(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z) + (\Delta t)^2\,\{[(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y) - (\partial u/\partial y)(\partial v/\partial x)] + \\ + [(\partial v/\partial y)(\partial w/\partial z) - (\partial v/\partial z)(\partial w/\partial y)] + [(\partial w/\partial z)(\partial u/\partial x) - (\partial u/\partial z)(\partial w/\partial x)]\} +$$

$$+ (\Delta t)^3 \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{vmatrix}.$$

Приравняем объем призмы к объему единичного куба, сократим единицы в левой и правой частях равенства и разделим каждый член на интервал времени Δt. Тогда получим

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z) + (\Delta t)\{[(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y) - (\partial u/\partial y)(\partial v/\partial x)] +$$

$$+ [(\partial v/\partial y)(\partial w/\partial z) - (\partial v/\partial z)(\partial w/\partial y)] + [(\partial w/\partial z)(\partial u/\partial x) - (\partial u/\partial z)(\partial w/\partial x)\ ]\} +$$

$$+ (\Delta t)^2 \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, получено уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени деформации простым компактным методом. Результат совпадает с промежуточным результатом Л. Эйлера, предшествующим предельному переходу к нулю членов высокого порядка малости по времени.

Перевод с латыни на русский язык разделов доклада Л. Эйлера [5], посвященных выводу уравнения неразрывности для плоского двумерного течения, и переводы на английский, немецкий, французский, испанский, португальский, итальянский и болгарский языки имеются в работах [8–10].

Локальное несохранение. Возникает парадокс локального несохранения. Л. Эйлер и Н.Е. Жуковский, исходя из требования сохранения, при линейном законе деформаций установили изменение площади и объема контрольной фигуры во времени. Оба ученых разрешили этот парадокс путем отбрасывания членов второго и третьего порядков малости. В настоящее время при изучении автоколебаний, возникающих в потоке без внешнего воздействия, парадокс локального несохранения разрешается переходом к учету сжимаемости газа и жидкости [10, 11] и взятием производной по времени от уравнения неразрывности. Для исключения членов высокого порядка малости предлагается повысить порядок дифференциального уравнения, а не уничтожать их предельным переходом. Производная от уравнения неразрывности по времени используется в методе Лайтхилла акустической аналогии [12], применение которого дает волновое уравнение. В этом случае дополнительные члены, содержащие якобианы второго порядка, поступают в неоднородную часть волнового уравнения и приводят к генерации периодических синусоидальных волн давления звука и автоколебаний. Интегральное сохранение общего количества вещества, отстаивавшееся М.В. Ломоносовым, при этом сохраняется.

Использование членов второго порядка малости уравнения неразрывности в волновом уравнении. Формальный вывод волнового уравнения для сжимаемого газа был сделан М.Дж. Лайтхиллом в 1952–1954 гг. [12], который добавил турбулентные члены в уравнение неразрывности и уравнение движения, взял производную по времени от уравнения неразрывности, а по координатам — от уравнения движения, вычел один результат из другого и получил неоднородное волновое уравнение.

Имея в уравнении неразрывности дополнительные члены, вычисленные Л. Эйлером, уже не требуется добавлять неизвестные неопределенные турбулентные члены для получения неоднородной части волнового уравнения. Дополнительные члены, полученные точным геометрическим расчетом, приведут к генерации гармонических колебаний. Для плоского двумерного течения волновое уравнение примет вид

$$\partial^2\rho/\partial t^2 - \partial^2 p/\partial x^2 - \partial^2 p/\partial y^2 = -\rho_0 \begin{vmatrix} u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix},$$

где p — давление; ρ, ρ_0 — плотность и среднее значение плотности жидкости; u, v — компоненты скорости вдоль осей x и y.

Решение волнового уравнения методом запаздывающих потенциалов позволяет вычислить интенсивность возникающих волн автоколебаний [13]:

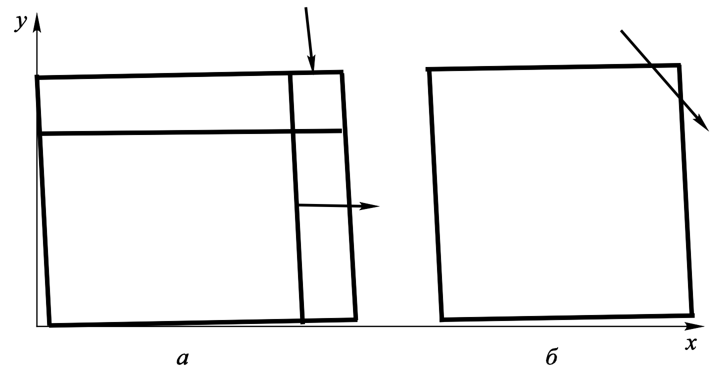
$$I[\text{Вт/м}^2] = \rho_0 V_1^2 J^2/(16\pi^2 c_0 \mathbf{r}^2),$$

где ρ_0 — плотность жидкости; c_0 — скорость звука; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор расстояния наблюдения интенсивности колебаний от источника; V_1 — объем, генерирующий волны.

Ряд рецензентов указал на невыполнение для уравнения неразрывности с дополнительными членами высокого порядка малости по времени преобразований Галилея, применяемых для выбора неподвижной системы координат или движущейся относительно нее равномерно и прямолинейно. Следует напомнить, что эти колебания будут происходить с ускорением, изменяющимся по синусоидальному закону; движение будет неравномерным. Поэтому требовать от уравнения неразрывности с дополнительными членами выполнения преобразования Галилея, относящегося к прямолинейному равномерному движению, нельзя.

Дополнительные члены второго порядка малости отражают парность [14] деформаций контрольной фигуры, т. е. учитывают, что, например, результат растяжения вдоль оси x будет еще подправлен сжатием вдоль оси y (рисунок, поз. *а*).

Такой тонкий геометрический учет процесса деформации можно сделать только при рассмотрении конечных величин Δx, Δy, Δt, а не бесконечно малых.



Контрольная фигура:
а — парность деформаций; *б* — пересечения жидкими частицами границ контрольной фигуры

В выводе уравнения неразрывности с использованием формулы Гаусса — Остроградского члены высокого порядка малости по времени не появляются вследствие пренебрежения парностью движения жидкой частицы относительно границы контрольной фигуры. Приравнивание к нулю тангенциальной скорости движения жидкой частицы к границе контрольной фигуры в формуле Гаусса — Остроградского с направляющими косинусами [15, формула (5) из раздела 651] исключает из рассмотрения жидкие частицы, совершающие двойные пересечения за время Δt границы контрольной фигуры (см. рисунок, поз. *б*).

Расчет баланса вещества по полной формуле Гаусса — Остроградского [15, формула (4) из раздела 651] с заменой интегралов интегральными суммами [10] дает результат, совпадающий с результатом, который получен Л. Эйлером при выводе уравнения неразрывности с членами высокого порядка малости [5].

Использование членов второго порядка малости уравнения неразрывности приведено в работе [16].

Приведем также уравнение неразрывности с членами второго и третьего порядков малости для трехмерного течения сжимаемого газа [17]:

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) + \Delta t\,\rho[\partial(u, v)/\partial(x, y) + \partial(v, w)/\partial(y, z) + \partial(w, u)/\partial(z, x)] +$$
$$+ (\Delta t)^2\,\rho\,\partial(u, v, w)/\partial(x, y, z) = 0.$$

Заключение. Исследование физического смысла членов второго порядка малости уравнения неразрывности, обычно отбрасываемых, показало, что члены второго порядка малости по времени движения в правой неоднородной части волнового уравнения приводят к дополнительной генерации периодических волн давления потоком сжимаемого газа.

Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем было выведено волновое уравнение, генерирующее периодические волны за счет учета конвективных членов уравнения движения. Члены второго порядка малости уравнения неразрывности увеличивают интенсивность генерации волн, вычисленных Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем. Наряду с вибратором Ландау — Лифшица можно говорить о вибраторе Эйлера — Жуковского: оба вибратора суммируют интенсивность генерируемых периодических волн.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кинематика жидкого тела Н.Е. Жуковскаго. Москва. Въ Университетской типографии (Катковъ). На Страстном бульваре, 1876. *Математические диссертации,* т. 5, 5.12.

[2] Бубнов В. А. Физические принципы гидродинамических движений. *Вестник Московского педагогического университета. Сер. Естественные науки*, 1997, вып. 4, с. 206–269.

[3] Бубнов В.А. Кинематика жидкой частицы. *Вестник Московского педагогического университета. Сер. Естественные науки*, 1999, вып. 7, с. 11–29.

[4] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*. Ч. II. Москва, Физматгиз, 1941, т. 1, 348 с.

[5] Euler L. Principes generaux du mouvement des fluides. *Memoires de l'Academie royale des sciences et belles letters*. Berlin, 1757, t. II (1755), pp. 274–315 = Opera Omnia, ser. II, vol. 12, pp. 54–91.

[6] Жуковский Н.Е. *Полное собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика*. Москва, Ленинград, ОНТИ, НКТП СССР, 1935.

[7] Euleri L. *Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Pertinentes. Volumen Prius*. Edidit C.A. Truesdell. Lausannae, 1954.

[8] Овсянников В.М. *Локальное дифференциальное несохранение при интегральном сохранении в газовой динамике*. Москва, Спутник +, 2017, 273 с.

[9] Ейлъер Л. Принципи на движението на течности. *Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике*, 2017, № 31, с. 19–24.

[10] Овсянников В.М. *Волнообразование и конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера*. Москва, Спутник +, 2017, 487 с.

[11] Овсянников В.М. История вывода уравнения неразрывности. *Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20–24 августа 2015 г.* Казань, 2015, с. 2823–2824.

[12] Lighthill M.J. On Sound Generated Aerodynamically. Part I. General Theory. Part II. Turbulence a Source Sound. *Proceedings of the Royal Society,* A211, 1952; A222, 1954.

[13] Овсянников В.М. Конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. *Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике*. *Сборник статей № 26*. Москва, Спутник +, 2013, 222 с.

[14] Овсянников В.М. Парность деформаций — причина возникновения членов высокого порядка малости по времени в выводе Эйлера уравнения неразрывности. *Тезисы докладов Седьмых Поляховских чтений Международной научной конференции по механике*. *Санкт-Петербург, 2–6 февраля 2015 г.* Санкт-Петербург, 2015, с. 135.

[15] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 3. Москва, Ленинград, Физматгиз, 1960, 656 с.

[16] Ovsyannikov V.M. Comparison of Additional Second-Order Terms in Finite-Difference Euler Equations and Regularized Fluid Dynamics Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 5, pp. 876—880. DOI: 10.1134/S0965542517050098

[17] Овсянников В.М. Введение в аксиоматическую механику жидкости, основанную на базисных экспериментах с жидкостью. *Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике*, 2006, № 15, с. 19–51.

Статья поступила в редакцию 06.03.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Овсянников В.М. Эллипсоид деформации Н.Е. Жуковского с учетом членов второго порядка малости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 5. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1756

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики FAPM–2017», посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24 – 27 октября 2017 г.

Овсянников Владислав Михайлович окончил Московский физико-технический институт и его аспирантуру. Д-р техн. наук, профессор Московской государственной академии водного транспорта — филиала ФГБОУ ВО «Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова», Ноябрьского института нефти и газа — филиала Тюменского индустриального университета. Основные работы в области радиационной газовой динамики, течения двухфазных смесей, автоколебаний. e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru

N.E. Zhukovsky's strain ellipsoid taking into account terms of the second order of smallness

© V.M. Ovsyannikov

Moscow State Academy of Water Transport — Branch of Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Moscow, 117105, Russia
Noyabrsk Institute of Oil and Gas (branch) of Industrial University of Tyumen, Noyabrsk, 629802, Yamalo-Nenets Autonomous Okrug, Tyumen Region, Russia

The study deals with the physical interpretation of the terms of the second order of smallness found in the continuity equation. The article shows that these terms, which are usually discarded, also contribute to, for instance, periodic wave generation, increasing the vibration intensity computed by L.D. Landau and E.M. Lifshitz more than twofold. N.E. Zhukovsky disregarded the terms of the second order of smallness with respect to strain time or flow time when writing down the continuity equation for plotting the strain ellipsoid. He did calculate a number of additional terms; this is why he could have balanced the amount of substance taking into account terms of the second and third orders of smallness. We also identified that the expression for the curl of the velocity vector in terms of angular velocity is inaccurate: at the level of accuracy defined by terms of the second order of smallness there should be additional terms in the velocity curl as a function of angular velocity. We analysed the continuity equation found in one of the articles by L. Euler that he presented in 1752 at the Royal Prussian Academy of Sciences, and we show that for incompressible fluid those additional terms create local nonconservation. This case should only be considered as a model one that is not possible in reality. For compressible gas this local nonconservation becomes periodic and describes actually existing flows with periodic pressure waves, or sound, generated by the flow. We determined that in equations of compressible gas dynamics these terms of the second order of smallness with respect to motion time found in the non-homogeneous part of the wave equation lead to generation of sound and self-excited vibrations that are not connected to external factors affecting the flow.

Keywords: *continuity equation, terms of higher orders of smallness with respect to time, self-excited vibrations, wave equation, strain ellipsoid*

REFERENCES

[1] Zhukovsky N.E. *Kinematika zhidkogo tela*. *Diss. mag. prikl. matem*. [Kinematics of the fluid body. Master of applied math. diss.]. Moscow, University Press, 1876, 155 p.

[2] Bubnov V.A. Fizicheskie printsipy gidrodinamicheskikh dvizheniy [Physical principles of hydrodynamic motion]. *Problemy aksiomatiki v gidrogazodinamike* [Axiomatics problems in fluid and gas dynamics], 1997, no. 4, pp. 206–269.

[3] Bubnov V.A. Kinematika zhidkoy chastitsy [Kinematics of a fluid particle]. *Problemy aksiomatiki v gidrogazodinamike* [Axiomatics problems in fluid and gas dynamics], 1999, no. 7, pp. 11–29.

[4] Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical fluid mechanics]. Part II. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1941, vol. 1, 348 p.

[5] Euler L. Principes generaux du movement des fluids [General principles of fluid motion]. *Opera omnia*, Ser. II, vol. 12, pp. 54–91.

[6] Zhukovsky N.E. *Polnoe sobranie sochineniy* [Collected works]. *Vol. 2: Gidrodinamika* [Fluid dynamics]. Moscow, Leningrad, United Science and Engineering Publishing House of People's Commissariat of Heavy Industry, 1935.

[7] Euler L. *Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Pertinentes* [Studies in mechanics: on the theory of relevant bodies]. Vol. 1. C.A. Truesdell, ed. Lausannae, 1954.

[8] Ovsyannikov V.M. *Lokalnoe differentsialnoe nesokhranenie pri integralnom sokhranenii v gazovoy dinamike* [Local differential nonconservation combined with integral conservation in gas dynamics]. Moscow, Sputnik Plyus Publ., 2017, 273 p.

[9] Euler L. Principia motus fluidorum [Principles of Fluid Motion]. *Opera omnia*, Ser. II, vol. 12, pp. 133–168. [In Bulg.: Euler L. Printsipi na dvizhenieto na technosti. *Problemy aksiomatiki v gidrogazodinamike* [Axiomatics problems in fluid and gas dynamics], 2017, no. 31, pp. 19–24].

[10] Ovsyannikov V.M. *Volnoobrazovanie i konechnoraznostnoe uravnenie nerazryvnosti Leonarda Eylera* [Wave generation and Leonhard Euler's finite-difference continuity equation]. Moscow, Sputnik Plyus Publ., 2017, 487 p.

[11] Ovsyannikov V.M. Istoriya vyvoda uravneniya nerazryvnosti [History of deriving the continuity equation]. *Sbornik dokladov XI Vserossiyskogo sezda po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Kazan, 20–24 avgusta 2015* [Proc. of the 11th All-Russian congress on basic problems of theoretical and applied mechanics. Kazan, Aug. 20–24, 2015]. Kazan, 2015, pp. 2823–2824.

[12] Lighthill M.J. *Proceedings of the Royal Society*, A211, 1952; A222, 1954.

[13] Ovsyannikov V.M. Konechno-raznostnoe uravnenie nerazryvnosti Leonarda Eylera [Leonhard Euler's finite-difference continuity equation]. *Problemy aksiomatiki v gidrogazodinamike* [Axiomatics problems in fluid and gas dynamics], 2010, no. 20, 119 p.

[14] Ovsyannikov V.M. Parnost deformatsiy — prichina vozniknoveniya chlenov vysokogo poryadka malosti po vremeni v vyvode Eylera uravneniya nerazryvnosti [Strain coupling as the reason behind terms of higher orders of magnitude with respect to time emerging in Euler's derivation of the continuity equation]. *Tezisy dokladov Sedmykh Polyakhovskikh chteniy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii po mekhanike. Sankt-Peterburg, 2–4 fevralya 2015 g.* [Proc. of the 7th Polyakhov readings of International scientific conference in mechanics. Saint Petersburg, February 2–4, 2015]. Saint Petersburg, 2015, p. 135.

[15] Fikhtengolts G.M. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 3. Moscow, State Publishing House for Physical and Mathematical Literature, 1960, 656 p.

[16] Ovsyannikov V.M. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 5, pp. 876—880. DOI: 10.1134/S0965542517050098

[17] Ovsyannikov V.M. Vvedenie v aksiomaticheskuyu mekhaniku zhidkosti, osnovannuyu na bazisnykh eksperimentakh s zhidkostyu [Introduction to axiomatic fluid mechanics based on reference fluid experiments]. *Problemy aksiomatiki v gidrogazodinamike* [Axiomatics problems in fluid and gas dynamics], 2006, no. 15, pp. 19–51.

Ovsyannikov V.M. graduated from Moscow Institute of Physics and Technology and completed postgraduate studies there. Dr. Sc. (Eng.), Professor, Moscow State Academy of Water Transport — Branch of Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Noyabrsk Institute of Oil and Gas (branch) of Industrial University of Tyumen. Specialises in radiation gas dynamics, two-phase mixture flows and self-excited vibrations. e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru