УДК 531.1, 531.3 DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1753

О задаче моделирования кинематики и динамики управляемых систем с программными связями

© О.В. Матухина

Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет», Нижнекамск, 423570, Россия

Работа посвящена вопросам математического моделирования кинематических свойств и управления динамикой управляемых систем с программными связями. Предложена система дифференциальных уравнений, используемая для составления уравнений нестационарных дифференциальных связей. Рассмотрена задача построения уравнений динамики на основе интегрального вариационного принципа. Для решения задачи стабилизации связей введены уравнения программных связей. Применение приведенных методов моделирования продемонстрировано на примере задачи управления движением колесной системы с обходом подвижных препятствий. В ходе решения задачи построены уравнения кинематики системы, выраженные в виде уравнений нестационарных дифференциальных связей, и модель динамики управляемой системы с программными связями. Определены выражения управляющих сил, действующих на систему с целью обеспечить выполнение уравнений связей, наложенных на систему. Результаты решения рассмотренной задачи подтверждают эффективность приведенных методов. Предлагаемые в работе методы применимы для решения траекторных задач, задач управления движением электромеханических систем и управления динамикой экономических, производственных и технических систем.

Ключевые слова: *управление динамикой, устойчивость, стабилизация, программные связи*

Введение. Вопросы моделирования кинематики и динамики управляемых механических систем остаются достаточно актуальными вследствие широкого внедрения робототехники в различные отрасли науки и производства, развития космических технологий, транспортных систем и применения в быту. К управляемым механическим системам можно отнести роботы-манипуляторы, мобильные роботы, космические объекты и т. п. Большинство возникающих задач исследования механических систем можно свести к двум взаимосвязанным научным проблемам: моделированию кинематики и динамики систем и управлению их движением.

В задачах моделирования кинематики и динамики механических систем широко применяется предложенный в работе [1] метод построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую на плоскости. В частности, в работе [2] рассмотрена задача построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегральные многообразия, методом, предложенным в работе [1], и определена структура систем дифференциальных уравнений из условия устойчивости этих многообразий. В работе [3] построена автономная система дифференциальных уравнений по заданному распределению фазовых траекторий на плоскости, определены коэффициенты системы исходя из вида интегральных кривых и особых точек. В работе [4] предложена система дифференциальных уравнений, позволяющая описать кинематические свойства механической системы уравнениями дифференциальных связей. Изложенные в работах [3, 4] методы построения динамических систем эффективно используются для программирования движения управляемых механических систем, соответствующего заданным свойствам. Программное движение осуществляется посредством дополнительных управляющих сил. Поэтому основная задача управления сводится к определению сил, прикладываемых к управляемой системе в соответствии с поставленной целью.

При численном решении систем дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений динамики и уравнений связей, возникает проблема стабилизации связей. В работе [5] приведена модификация уравнений динамики систем со связями, позволяющая решить эту задачу. В работе [6] введены в рассмотрение уравнения программных связей.

В предлагаемой работе рассмотрена задача построения уравнений динамики механических систем с заранее заданными кинематическими свойствами, которые описываются m_1 уравнениями голономных и m_2 уравнениями неголономных связей:

$$\Phi(q, t) = 0;\ \ \Psi(q, \dot{q}, t) = 0; \tag{1}$$

$$\Phi = \left(\varphi_\mu\right);\ \ \Psi = \left(\psi_\eta\right);\ \ \mu = 1, \ldots, m_1, \quad \eta = 1, \ldots, m_2.$$

Моделирование кинематических свойств. Уравнения неголономных связей $\Psi(q, \dot{q}, t) = 0$ механической системы, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1,\ q_2, \ldots, q_m$, могут быть получены в соответствии со структурой множества неавтономных систем дифференциальных уравнений, определенной в виде [4]

$$\frac{dx_j}{dt} = P_j(x, t) + Q(x, t)\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{k=j+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2},$$

$$j = 1, \ldots, n,\ \ f = f_0 f_1 \ldots f_r f_{r+1} \equiv 1,\ \ f_0 \equiv 1,\ \ f_{r+1} \equiv 1. \tag{2}$$

Для этого необходимо записать выражения координат $x_1, x_2, ..., x_n$ и их производных $\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, ..., \dfrac{dx_n}{dt}$ через обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$ и скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$ механической системы и подставить полученные выражения в систему уравнений (2).

В системе уравнений (2) заданные функции $f_i(x, t)$, $i = 1, ..., r$, являются ее частными интегралами [3, 4]. Предполагается, что при любом t функции $f_i(x, t)$ всюду в области G непрерывны и обладают непрерывными частными производными $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, \dfrac{\partial f_i}{\partial t}$, $j = 1, ..., n$, $\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2 \neq 0$, $Q(x, t)$ — произвольная непрерывная функция, $P_j(x, t)$ — непрерывные функции, обращающиеся в нуль вдоль многообразия (2).

Построение уравнений динамики. Для построения уравнений динамики системы должны быть известны ее кинетическая $T^0 = T^0(q, \dot{q})$ и потенциальная $P^0 = P^0(q, t)$ энергии, диссипативная функция $D^0 = D^0(q, \dot{q}, t)$, элементарная работа $\delta A = Q\delta q + R\delta q$, где Q_ν, $\nu = 1, ..., m$, — обобщенные непотенциальные внешние силы, R_ν — управляющие силы, действующие на систему для обеспечения выполнения уравнений связей (1).

Вектор R определяется равенством [6]

$$R = \Theta^T \lambda, \tag{3}$$

где $\lambda = \left(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1+m_2}\right)$ — вектор произвольных множителей,

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Phi_q \\ \Psi_{\dot{q}} \end{pmatrix}, \ \Phi_q = \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q}\right), \ \Psi_{\dot{q}} = \left(\frac{\partial \psi_\eta}{\partial \dot{q}}\right). \tag{4}$$

Для стабилизации связей необходимо учитывать отклонения от уравнений (1) и вводить уравнения программных связей [6]:

$$\Phi(q, t) = y(t); \ \Phi = \left(\varphi_\mu\right), \ \mu = 1, ..., m_1; \tag{5}$$

$$\Phi_q \dot{q} + \Phi_t = \dot{y}(t); \ \Phi_q = \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q_\nu}\right); \ \Phi_t = \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t}\right), \ \nu = 1, ..., m; \tag{6}$$

$$\Psi(\dot{q}, q, t) = y'(t); \ \Psi = \left(\psi_\eta\right), \ \eta = 1, ..., m_2. \tag{7}$$

Правые части $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $y'(t)$ равенств (5)–(7) определяются как решения дифференциальных уравнений возмущений связей:

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = g(y,\, \dot{y},\, y',\, q,\, \dot{q},\, t); \quad \frac{dy'}{dt} = h(y,\, \dot{y},\, y',\, q,\, \dot{q},\, t); \tag{8}$$

$$g\left(0,\, 0,\, 0,\, q,\, \dot{q},\, t\right) = 0; \quad h\left(0,\, 0,\, 0,\, q,\, \dot{q},\, t\right) = 0.$$

Уравнения (8) должны быть рассмотрены совместно с уравнениями динамики и начальными условиями

$$q(t_0) = q_0; \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0; \quad y(t_0) = \Phi^0; \quad \dot{y}(t_0) = \dot{\Phi}^0; \quad y'(t_0) = \Psi^0.$$

Основным условием вывода уравнения динамики в виде уравнений Лагранжа является независимость обобщенных координат системы. Для построения системы дифференциальных уравнений можно воспользоваться интегральным вариационным принципом Гамильтона—Остроградского [7].

В результате применения основной леммы вариационного исчисления, используя выражение элементарной работы обобщенных управляющих сил, получаем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \Theta^T \lambda + Q. \tag{9}$$

Уравнения возмущений связей (8) можно получить из равенств

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0; \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y'} + \frac{\partial D}{\partial y'} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Для определения выражения вектора множителей λ необходимо продифференцировать уравнения связей (6) и (7) с учетом выражений (9) и (10), разрешенных относительно старших производных.

Вектор обобщенных управляющих сил определяется в виде [6]

$$R = \Theta^T \lambda.$$

Пример моделирования движения колесной системы с обходом подвижных препятствий. Уравнения кинематики. Шасси трехколесной системы, движущейся по горизонтальной плоскости, состоит из оси переднего колеса и кузова, жестко скрепленного с осью задних колес. Общая схема колесной системы представлена на рис. 1, на котором положительному значению углов q_3, q_4 соответствует поворот колес влево.

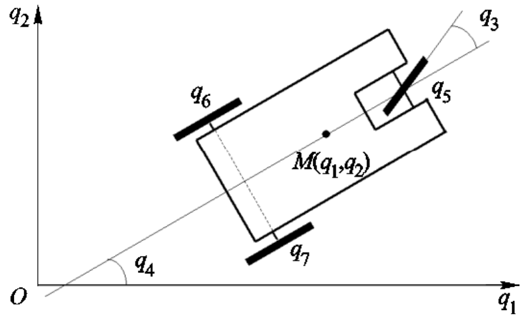

Рис. 1. Схема колесной системы:

$M(q_1, q_2)$ — центр масс системы; q_3 — угол поворота переднего колеса, отсчитываемый от оси симметрии системы; q_4 — угол между осью симметрии колесной системы и осью Ox; q_5, q_6, q_7 — углы поворотов соответственно переднего, левого и правого колес задней оси

Введем следующие обозначения констант: $m = m_0 + 3m_1$ — масса всей колесной системы; m_0 — масса кузова; m_1 — масса каждого колеса; $L = l_1 + l_2$ — база системы; l_1, l_2 — расстояния от центра масс системы до ее передней и соответственно задней оси; r — радиус колес; h — длина задней полуоси; A — момент инерции колеса относительно диаметра; C — осевой момент инерции.

Будем считать, что управление колесной системой осуществляется моментами M_1, M_2 и R_3, приложенными соответственно к левому и правому колесам задней оси и к рулевому приводу. Необходимо определить выражения для моментов M_1, M_2, R_3, такие, чтобы точка $M(q_1, q_2)$ совершала движение из произвольной точки пространства XOY к движущейся точке, образованной пересечением прямых $q_1 = -k_1 t$ и $q_2 = 0$, с обходом двух препятствий, ограниченных кривыми, которые заданы уравнениями:

$$\begin{gathered}(q_1 + 2 + k_2 t)^2 + 4q_2^2 = 1;\\ \frac{1}{4}(q_1 - 1 + k_3 t)^2 + \frac{16}{9}(q_2 - \frac{3}{2})^2 = 1.\end{gathered} \tag{11}$$

Фазовое состояние колесной системы определяется обобщенными координатами q_i и скоростями $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$ $(i = 1, \ldots, 7)$. Требуемые движения колесной системы будут осуществляться, если на координаты q_1, q_2 и скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ точки M наложить дифференциальные связи, уравнения которых получены в соответствии с системой уравнений (2):

$$
\begin{aligned}
&\dot q_1 = -\frac{16}{39} f_1 f_3 f_4 - 4q_2 f_1 f_2 f_4 - \frac{8}{9}\left(2q_2 - 3\right) f_1 f_2 f_3 - g_1 g_3 g_4;\\
&\dot q_2 = -\frac{42}{29} f_2 f_3 f_4 + (q_1 + 2 + k_2 t) f_1 f_2 f_4 + (q_1 - 1 + k_3 t) f_1 f_2 f_3 - g_2 g_3 g_4.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Здесь функции

$$f_1(q_1, q_2, t) = q_1 + k_1 t; \quad f_2(q_1, q_2, t) = q_2;$$

$$f_3(q_1, q_2, t) = \frac{1}{2}\left((q_1 + 2 + k_2 t)^2 + 4q_2^2 - 1\right);$$

$$f_4(q_1, q_2, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(q_1 - 1 + k_3 t)^2 + \frac{16}{9}\left(q_2 - \frac{3}{2}\right)^2 - 1\right)$$

являются частными интегралами системы уравнений (12);

$$
\begin{aligned}
&g_1(q_1, q_2, t) = f_2 f_3 f_4 + (q_1 + 2 + k_2 t) f_1 f_2 f_4 + (q_1 - 1 + k_3 t) f_1 f_2 f_3;\\
&g_2(q_1, q_2, t) = f_1 f_3 f_4 + 4q_2 f_1 f_2 f_4 + \frac{8}{9}\left(2q_2 - 3\right) f_1 f_2 f_3;\\
&g_3(q_1, q_2, t) = k_1 f_2 f_3 f_4 + k_2 (q_1 + 2 + k_2 t) f_1 f_2 f_4 + k_3 (q_1 - 1 + k_3 t) f_1 f_2 f_3;\\
&g_4(q_1, q_2, t) = \left[g_1^2 + g_2^2\right]^{-1}.
\end{aligned}
$$

Условия качения без проскальзывания и отсутствия бокового проскальзывания всех колес приводят к следующим уравнениям дифференциальных связей:

$$\dot q_1 \cos\left(q_3 + q_4\right) + \dot q_2 \sin\left(q_3 + q_4\right) + \dot q_4\, l_1 \sin q_3 - r\dot q_5 = 0; \tag{13}$$

$$\dot q_1 \cos q_4 + \dot q_2 \sin q_4 - h\dot q_4 - r\dot q_6 = 0; \tag{14}$$

$$\dot q_1 \cos q_4 + \dot q_2 \sin q_4 + h\dot q_4 - r\dot q_7 = 0; \tag{15}$$

$$\dot q_1 \sin\left(q_3 + q_4\right) - \dot q_2 \cos\left(q_3 + q_4\right) - \dot q_4\, l_1 \cos q_3 = 0; \tag{16}$$

$$\dot q_1 \sin q_4 - \dot q_2 \cos q_4 + l_2 \dot q_4 = 0. \tag{17}$$

Выражения (13)–(15), (17) можно представить в виде

$$\dot q_k = \sum_{j=1}^{3} b_{kj} \dot q_j, \quad b_{kj} = b_{kj}\left(q_1, \ldots, q_7\right), \; k = 4, \ldots, 7, \tag{18}$$

где

$$b_{41} = -\frac{1}{l_2}\sin q_4; \qquad b_{42} = \frac{1}{l_2}\cos q_4;$$

$$b_{51} = \frac{1}{r}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{L}{l_2}\sin q_3 \sin q_4\right);$$

$$b_{52} = \frac{1}{r}\left(\cos q_3 \sin q_4 + \frac{L}{l_2}\sin q_3 \cos q_4\right);$$

$$b_{61} = \frac{1}{r}\left(\cos q_4 + \frac{h}{l_2}\sin q_4\right); \qquad b_{62} = \frac{1}{r}\left(\sin q_4 - \frac{h}{l_2}\cos q_4\right); \tag{19}$$

$$b_{71} = \frac{1}{r}\left(\cos q_4 - \frac{h}{l_2}\sin q_4\right); \qquad b_{72} = \frac{1}{r}\left(\sin q_4 + \frac{h}{l_2}\cos q_4\right);$$

$$b_{k3} = 0, \; k = 5,\, 6,\, 7.$$

Исключая из уравнения (16) скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_4,$ с учетом выражений (12), (17) получаем уравнение голономной связи:

$$\begin{gathered}\left(\sin q_3 \cos q_4 + \frac{L}{l_2}\cos q_3 \sin q_4\right)F_1(q_1, q_2, t) + \\ + \left(\sin q_3 \sin q_4 - \frac{L}{l_2}\cos q_3 \cos q_4\right)F_2(q_1, q_2, t) = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Уравнения неголономных связей системы примут вид

$$\dot{q}_1 - F_1(q_1,\, q_2,\, t) = 0; \tag{21}$$

$$\dot{q}_2 - F_2(q_1,\, q_2,\, t) = 0, \tag{22}$$

где $F_1(q_1, q_2, t)$, $F_2(q_1, q_2, t)$ представляют собой правые части уравнений (12).

Уравнения динамики колесной системы с программными связями. Для составления уравнений динамики определим кинетическую энергию колесной системы:

$$\begin{gathered}T = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \frac{A}{2}\dot{q}_3^2 + \frac{J}{2}\dot{q}_4^2 + A\dot{q}_3\dot{q}_4 + m_1\left(l_1 - 2l_2\right)\times \\ \times\left(\dot{q}_2 \cos q_4 - \dot{q}_1 \sin q_4\right)\dot{q}_4 + \frac{C}{2}\left(\dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2 + \dot{q}_7^2\right),\end{gathered} \tag{23}$$

где $J = m_0 k_0^2 + m_1\left(l_1^2 + 2l_2^2 + 2h^2\right) + 3A$ — момент инерции системы относительно вертикальной оси, проходящей через точку $M(q_1,\ q_2)$.

Подставив выражение (18) в равенство (23), получим выражение для приведенной кинетической энергии системы:

$$2T^* = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$\begin{gathered}
a_{11}^* = \frac{m}{2} + \frac{J}{2l_2^2}\sin^2 q_4 + \frac{m_1}{l_2}\left(l_1 - 2l_2\right)\sin^2 q_4 + \\
+\frac{C}{2r^2 l_2^2}\left[2l_2^2\cos^2 q_4 + 2h^2\sin^2 q_4 + \left(L\sin q_3 \sin q_4 - l_2\cos q_3\cos q_4\right)^2\right]; \\
a_{12}^* = a_{21}^* = -\frac{J}{4l_2^2}\sin 2q_4 - \frac{m_1}{2l_2}\left(l_1 - 2l_2\right)\sin 2q_4 + \\
+\frac{C}{4r^2 l_2^2}\left[l_2^2\sin 2q_3\cos 2q_4 - 3l_2^2\sin 2q_4 - \right. \\
\left. -2h^2\sin 2q_4 - l_1^2\sin^2 q_3\sin 2q_4 - 2l_1 l_2\sin q_3\cos\left(q_3 + 2q_4\right)\right]; \\
a_{22}^* = \frac{m}{2} + \frac{J}{2l_2^2}\cos^2 q_4 + \frac{m_1}{l_2}\left(l_1 - 2l_2\right)\cos^2 q_4 + \\
+\frac{C}{2r^2 l_2^2}\left[2l_2^2\sin^2 q_4 + 2h^2\cos^2 q_4 + \left(l_1\sin q_3\cos q_4 + l_2\sin\left(q_3 + q_4\right)\right)^2\right]; \\
a_{13}^* = a_{31}^* = -\frac{A}{2l_2}\sin q_4; \quad a_{23}^* = a_{32}^* = \frac{A}{2l_2}\cos q_4; \quad a_{33}^* = \frac{A}{2}.
\end{gathered} \tag{24}$$

Полагая, что внешние силы отсутствуют, составим уравнения динамики системы в форме уравнений Воронца:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} - \sum_{k=4}^{7}\frac{\partial T^*}{\partial q_k}b_{ki} + \sum_{k=4}^{7}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\beta_{ij}^k \dot{q}_j = Q_i + R_i,\ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{25}$$

В уравнениях (25) силы Q_i соответствуют управляющим моментам M_1 и M_2:

$$Q_i = b_{6i}M_1 + b_{7i}M_2;$$

R_1, R_2 — реакции связи (20); R_3 — управляющий момент; $\beta_{ij}^k = $ $= \dfrac{\partial b_{kj}}{\partial q_i} + \sum\limits_{l=4}^{7}\dfrac{\partial b_{kj}}{\partial q_l}b_{li} - \dfrac{\partial b_{ki}}{\partial q_j} - \sum\limits_{l=4}^{7}\dfrac{\partial b_{ki}}{\partial q_l}b_{lj}$.

С учетом равенств (20)–(22) введем уравнения программных связей [6]:

$$y_1 = \varphi_1\left(q_1, q_2, q_3, q_4, t\right), \tag{26}$$

$$z_1 = \psi_1\left(\dot{q}_1, q_1, q_2, t\right); \tag{27}$$

$$z_2 = \psi_2\left(\dot{q}_2, q_1, q_2, t\right); \tag{28}$$

$$\varphi_1 \equiv \left(\sin q_3 \cos q_4 + \frac{L}{l_2}\cos q_3 \sin q_4\right) F_1\left(q_1, q_2, t\right) +$$

$$+\left(\sin q_3 \sin q_4 - \frac{L}{l_2}\cos q_3 \cos q_4\right) F_2\left(q_1, q_2, t\right);$$

$$\psi_1(\dot{q}_1, q_1, q_2, t) \equiv \dot{q}_1 - F_1(q_1, q_2, t);$$

$$\psi_2(\dot{q}_2, q_1, q_2, t) \equiv \dot{q}_2 - F_2(q_1, q_2, t).$$

Переменные $y_1,\ y_1',\, y_2'$ в уравнениях (26)–(28) оценивают отклонения соответственно от уравнений связей (20)–(22) и должны удовлетворять уравнениям возмущений связей:

$$\dot{\rho} = \Delta\rho,\ \ \rho = \left(\dot{y}_1,\ z_1,\ z_2\right);\ \ \Delta\rho = \left(\frac{d\rho_j}{dt}\right),\ \ j = 1,\ 2,\ 3. \tag{29}$$

Полагая связи (26)–(28) идеальными, в соответствии с работой [6] запишем выражения для R_i:

$$R_i = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\lambda,\ \ i = 1, 2, 3, \tag{30}$$

где λ — произвольный множитель.

Уравнения (25) представим в развернутом виде:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^{*}\ddot{q}_j + a_i = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}u_j, \quad i = 1,\ 2, 3. \tag{31}$$

В выражениях (31)

$$a_i = \sum_{j,l=1}^{3} \alpha_{jl}^{i}\dot{q}_j\dot{q}_l; \tag{32}$$

$$d_{i1} = b_{5i},\ \ d_{i2} = b_{6i},\ \ d_{i3} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}; \tag{33}$$

$$u_1 = M_1,\ \ u_2 = M_2,\ \ u_3 = \lambda; \tag{34}$$

$$\alpha_{11}^{1}=\frac{1}{2l_2^2}m_1\left(l_1-2l_2\right)\sin q_4\sin 2q_4;$$

$$\alpha_{12}^{1}=\alpha_{21}^{1}=\frac{m_1}{4l_2^2}\left(2l_2-l_1\right)\left(\sin 3q_4+\sin q_4\right)-\frac{1}{2r^2l_2^3}\left(2Ch^2-Jr^2\right)\sin q_4-$$

$$-\frac{C}{8r^2l_2^3}\Big[2l_1^2\left(1-\cos 2q_3\right)\sin q_4-l_1l_2\left(3\sin\left(2q_3+q_4\right)-\sin\left(2q_3-q_4\right)-4\sin q_4\right)-$$

$$-4l_2^2\cos\left(q_3+q_4\right)\sin q_3\Big];$$

$$\alpha_{13}^{1}=\alpha_{31}^{1}=\frac{C}{8r^2l_2^2}\Big[l_1^2\left(1-\cos 2q_4\right)\sin 2q_3+2l_1l_2\sin 2q_3-2l_2L\sin\left(2q_3+2q_4\right)\Big];$$

$$\alpha_{22}^{1}=\frac{m_1}{8l_2^2}\left(2l_1-3l_2\right)\left(\cos 3q_4+3\cos q_4\right)+\frac{1}{2r^2l_2^3}\left(2Ch^2+Jr^2\right)\cos q_4+$$

$$+\frac{C}{4r^2l_2^3}\Big[2l_1^2\left(1-\cos 2q_3\right)\cos q_4-l_1l_2\left(3\cos\left(2q_3+q_4\right)+\cos\left(2q_3-q_4\right)-4\cos q_4\right)+$$

$$+4l_2^2\sin\left(q_3+q_4\right)\sin q_3\Big];$$

$$\alpha_{23}^{1}=\alpha_{32}^{1}=\frac{1}{8r^2l_2^2}\Big[4Ar^2-Cl_1^2\sin 2q_3\sin 2q_4+2Cl_2\left(l_1+l_2\right)\left(\cos\left(2q_3+2q_4\right)+1\right)\Big];$$

$$\alpha_{11}^{2}=-\frac{1}{4l_2^2}m_1\left(l_1-2l_2\right)\left(\sin 3q_4-3\sin q_4\right)+\frac{1}{r^2l_2^3}\left(2Ch^2+Jr^2\right)\sin q_4+$$

$$+\frac{C}{4r^2l_2^3}\Big[2l_1^2\left(1-\cos 2q_3\right)\sin q_4-l_1l_2\left(3\sin\left(2q_3+q_4\right)-\sin\left(2q_3-q_4\right)-4\sin q_4\right)-$$

$$-4l_2^2\cos\left(q_3+q_4\right)\sin q_3\Big];$$

$$\alpha_{12}^{2}=\alpha_{21}^{2}=\frac{1}{4r^2l_2^2}m_1r^2\left(l_1-2l_2\right)\left(\cos 3q_4-\cos q_4\right)-\frac{1}{2r^2l_2^3}\left(2Ch^2+Jr^2\right)\cos q_4-$$

$$-\frac{C}{8r^2l_2^3}\Big[2l_1^2\left(1-\cos 2q_3\right)\cos q_4-l_1l_2\left(3\cos\left(2q_3+q_4\right)+\cos\left(2q_3-q_4\right)-4\cos q_4\right)+$$

$$+4l_2^2\sin\left(q_3+q_4\right)\sin q_3\Big];$$

$$\alpha_{13}^{2}=\alpha_{31}^{2}=-\frac{1}{8r^2l_2^2}\Big[4Ar^2+Cl_1^2\sin 2q_3\sin 2q_4-2Cl_2\left(l_1+l_2\right)\left(\cos\left(2q_3+2q_4\right)-1\right)\Big];$$

$$\alpha_{22}^{2}=\frac{m_1}{2l_2^2}\left(l_1-2l_2\right)\cos q_4\sin 2q_4;$$

$$\alpha_{23}^{2}=\alpha_{32}^{2}=\frac{C}{8r^2l_2^2}\Big[l_1^2\left(1+\cos 2q_4\right)\sin 2q_3+2l_1l_2\sin 2q_3+2l_2L\sin\left(2q_3+2q_4\right)\Big];$$

$$\alpha_{jl}^{3}=0,\ j,l=1,\ 2,\ 3.$$

Запишем систему уравнений (31) в матричном виде

$$A^{*}\ddot{q}+a=Du, \tag{35}$$

$$A^{*}=\left(a_{ij}^{*}\right),\ \ a=\left(a_{i}\right),\ \ D=\left(d_{ij}\right),\ \ q=\left(q_{i}\right),\ \ u=\left(u_{i}\right),\ \ i,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

Определение вектора управляющих воздействий. Для определения управляющего вектора u необходимо продифференцировать дважды функцию φ_1 и по одному разу функции ψ_1, ψ_2 с учетом выражения (18):

$$\begin{gathered}\dot{\varphi}_1=\dot{y}_1;\\ \ddot{\varphi}_1=\ddot{y}_1;\\ \dot{\psi}_\eta=\dot{z}_\eta,\ \ \eta=1,2;\end{gathered} \tag{36}$$

$$\dot{\varphi}_1=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_j}+\sum_{k=4}^{7}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k}b_{kj}\right)\dot{q}_j+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t};$$

$$\ddot{\varphi}_1=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_j}+\sum_{k=4}^{7}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k}b_{kj}\right)\ddot{q}_j+$$

$$+\sum_{j,i=1}^{3}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q_j\partial q_i}+\sum_{k=4}^{7}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q_k\partial q_i}b_{kj}+\sum_{k=4}^{7}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k}\frac{\partial b_{kj}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_i+$$

$$+\sum_{j,i=1}^{3}\sum_{l,k=4}^{7}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q_j\partial q_l}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q_k\partial q_l}b_{kj}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k}\frac{\partial b_{kj}}{\partial q_l}\right)b_{li}\dot{q}_j\dot{q}_i+$$

$$+2\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q_j\partial t}+\sum_{k=4}^{7}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q_k\partial t}b_{kj}\right)\dot{q}_j+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2};$$

$$\dot{\psi}_\eta=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial\dot{q}_j}\ddot{q}_j+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi_\eta}{\partial q_j}+\sum_{k=4}^{7}\frac{\partial\psi_\eta}{\partial q_k}b_{kj}\right)\dot{q}_j+\frac{\partial\psi_\eta}{\partial t}.$$

Запишем систему уравнений (36) в матричном виде с учетом равенств (29), (26)–(28):

$$\Theta\ddot{q}+s-\Delta S=0; \tag{37}$$

$$\Delta S=\left(\frac{dS_j}{dt}\right),\ \ S=\dot{\varphi}_1,\ \psi_1,\ \psi_2; \tag{38}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Phi_q \\ \Psi_{\dot{q}} \end{pmatrix}; \; \Phi_q = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_j} + \sum_{k=4}^{7} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} b_{kj} \right); \; \Psi_{\dot{q}} = \left(\frac{\partial \psi_\eta}{\partial \dot{q}_j} \right),$$

$$j = 1,\ 2,\ 3,\ \ \eta = 1,\ 2, \tag{39}$$

$$s = s_1,\ s_2,\ s_3; \tag{40}$$

$$s_1 = \sum_{j,i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_j \partial q_i} + \sum_{k=4}^{7} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_k \partial q_i} b_{kj} + \sum_{k=4}^{7} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} \frac{\partial b_{kj}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_i +$$

$$+ \sum_{j,i=1}^{3} \sum_{l,k=4}^{7} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_j \partial q_l} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_k \partial q_l} b_{kj} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} \frac{\partial b_{kj}}{\partial q_l} \right) b_{li} \dot{q}_j \dot{q}_i +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_j \partial t} + \sum_{k=4}^{7} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q_k \partial t} b_{kj} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q_j} + \sum_{k=4}^{7} \frac{\partial \psi_1}{\partial q_k} b_{kj} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \psi_1}{\partial t};$$

$$s_3 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial q_j} + \sum_{k=4}^{7} \frac{\partial \psi_2}{\partial q_k} b_{kj} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \psi_2}{\partial t}.$$

Систему уравнений (35) можно представить в виде, разрешенном относительно старших производных $\ddot{q}$:

$$\ddot{q} = \left(A^* \right)^{-1} \left(Du - a \right). \tag{41}$$

Подстановка (41) в систему уравнений (37) приводит к следующему выражению:

$$\Theta \left(A^* \right)^{-1} \left(Du - a \right) + s = \Delta S. \tag{42}$$

Разрешив уравнения (42) относительно u, получим выражение для вектора управления:

$$u = \left(\Theta \left(A^* \right)^{-1} D \right)^{-1} \left(\Delta S - s + \Theta \left(A^* \right)^{-1} a \right), \tag{43}$$

где $A^* = \left(a^*_{ij} \right)$, $a = \left(a_i \right)$, $D = \left(d_{ij} \right)$, S, Θ, s, $i, j = 1, 2, 3$, определяются соответственно выражениями (24), (30), (33), (37), (39) и (40).

В соответствии с выражениями (30), (34) можно записать выражения управляющих моментов M_1, M_2, R_3 и реакций связей R_1, R_2:

$$M_1 = u_1;$$

$$M_2 = u_2;$$

$$R_3 = \left[F_1 \left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{L}{l_2} \sin q_3 \sin q_4 \right) + F_2 \left(\cos q_3 \sin q_4 + \frac{L}{l_2} \sin q_3 \cos q_4 \right) \right] u_3;$$

$$R_1 = \left[\frac{\partial F_1}{\partial q_1} \left(\sin q_3 \cos q_4 + \frac{L}{l_2} \cos q_3 \sin q_4 \right) + \frac{\partial F_2}{\partial q_1} \left(\sin q_3 \sin q_4 - \frac{L}{l_2} \cos q_3 \cos q_4 \right) \right] \lambda;$$

$$R_2 = \left[\frac{\partial F_1}{\partial q_2} \left(\sin q_3 \cos q_4 + \frac{L}{l_2} \cos q_3 \sin q_4 \right) + \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \left(\sin q_3 \sin q_4 - \frac{L}{l_2} \cos q_3 \cos q_4 \right) \right] \lambda.$$

С учетом уравнений (41), (43) запишем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dq}{dt} = \dot{q}; \\ &\frac{d\dot{q}}{dt} = \left(A^*\right)^{-1} \left[D\left(\Theta\left(A^*\right)^{-1} D\right)^{-1} \left(\Delta S - s + \Theta\left(A^*\right)^{-1} a\right) - a \right]. \end{aligned} \tag{44}$$

Система уравнений (44), состоящая из шести уравнений с шестью неизвестными $q_1,\ q_2,\ q_3,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \dot{q}_3,$ интегрируется совместно с уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{dq^*}{dt} = \dot{q}^*; \\ &\frac{d\dot{q}^*}{dt} = B\dot{q}, \end{aligned} \tag{45}$$

где $q^* = q_4, \ldots, q_7,\ \dot{q}^* = \dot{q}_4, \ldots, \dot{q}_7,\ B = b_{kj},\ b_{kj},\ k = 4, 5, 6, 7,\ j = 1, 2, 3,$ определяются в соответствии с выражениями (19). Движение, описываемое уравнениями (44), (45), должно удовлетворять уравнениям программных связей (26)–(28).

Определение выражений управляющих моментов $M_1,\ M_2,\ R_3,$ построение и решение систем дифференциальных уравнений (44) и (45) проводилось с помощью системы компьютерной математики Maple. Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2. В результате решения уравнений динамики (44) и (45) получена траектория движения (см. рис. 2) центра масс M колесной системы с обходом двух препятствий, уравнения движения которых заданы в виде (11).

Для построения множества траекторий, огибающих движущиеся навстречу друг другу препятствия, составляют уравнения нестационарных неголономных связей в соответствии с уравнениями (2). Задача моделирования сводится к решению системы семи уравнений динамики и трех уравнений программных связей. Для построения уравнений, решения задачи управления и численного моделирования использована система компьютерной математики Maple. В результате численного моделирования получена траектория движения центра масс системы с обходом подвижных препятствий, движущихся со скоростями $k3$ и $k4$ (см. рис. 2).

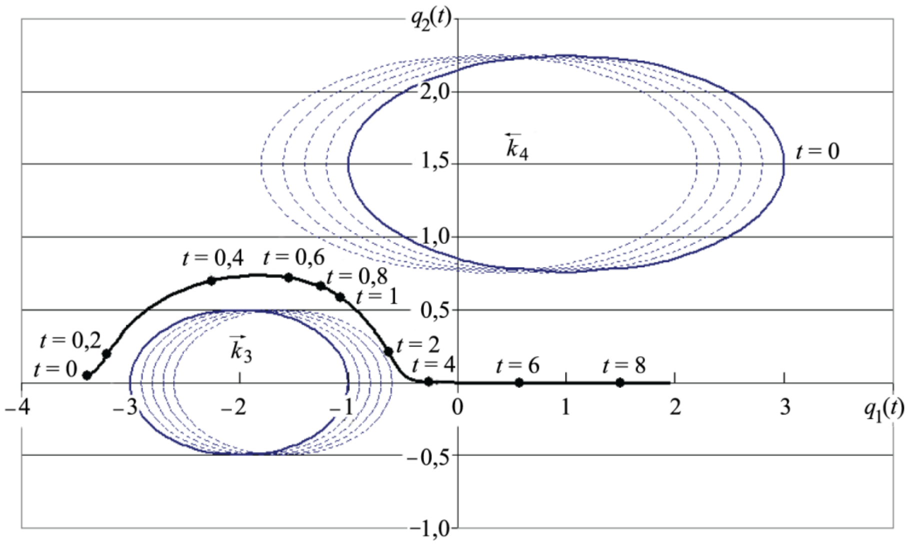

Рис. 2. Траектория движения центра масс колесной системы с обходом подвижных препятствий

Заключение. Результаты исследований и численных экспериментов [7–9] свидетельствуют об эффективности приведенных методов математического моделирования кинематических свойств и построения уравнений динамики механических систем с программными связями, а также их применимости для решения прикладных задач управления движением механических систем. Вследствие динамических аналогий [10, 11] предложенные в работе методы моделирования могут найти применение в задачах управления системами, содержащими элементы различной физической природы [12], в том числе механическими, оптическими [13], электрическими [14], робототехническими и экономическими системами [15–20].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, номер проекта 16-08-00558.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. *Прикладная математика и механика*, 1952, т. XVI, с. 659–670.

[2] Мухарлямов Р.Г. Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы. *Дифференциальные уравнения,* 1967, т. 3, № 2, с. 180–192.

[3] Мухарлямов Р.Г. К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 1967, т. 3, № 10, с. 1673–1681.

[4] Ибушева О.В., Мухарлямов Р.Г. Построение неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданной совокупности частных интегралов в многомерном пространстве. *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки*, 2008, т. 150, кн. 3, с. 133–139.

[5] Baumgarte J. Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems. *Computer Methods in Applied in Mechanics and Engineering,* 1972, vol. 1, no. 1, pp. 1–16.

[6] Мухарлямов Р.Г. Стабилизация движения механических систем на заданных многообразиях фазового пространства. *Прикладная математика и механика*, 2006, т. 70, № 2, с. 236–249.

[7] Ибушева О.В., Мухарлямов Р.Г. О построении уравнений динамики механических систем с программными связями. *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева,* 2010, № 1, с. 75–80.

[8] Матухина О.В. Компьютерные технологии в управлении системой с программными связями. *Вестник Казанского технологического университета*, 2013, т. 16, № 2, с. 199–202.

[9] Матухина О.В. Управление движением колесной системы по заданной траектории с обходом препятствий. *Вестник Казанского технологического университета*, 2012, т. 15, № 11, с. 272–274.

[10] Ольсон Г. *Динамические аналогии.* Москва, Государственное издательство иностранной литературы, 1947, 224 с.

[11] Layton R.A. *Principles of Analytical System Dynamics*. New York, Springer, 1998, 158 p.

[12] Мухарлямов Р.Г., Матухина О.В., Ахметов А.А. Управление динамикой систем, содержащих элементы различной физической природы. *Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета*, 2011, № 2, с. 25–37.

[13] Мухарлямов Р.Г. Управление программным движением адаптивной оптической системы. *Вестник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика,* 1994, № 1, с. 22–40.

[14] Шемелова О.В. Управление динамикой электромеханических систем. *Вестник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика*, 2003, № 1, с. 63–71.

[15] Сиразетдинов Т.К. Динамическая модель прогнозирования и оптимальное управление экономическим объектом. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника,* 1972, № 4, с. 3–8.

[16] Сиразетдинов Т.К., Родионов В.В., Сиразетдинов Р.Т. *Динамические модели экономического региона*. Казань, Изд-во «Фэн», 2005, 320 с.

[17] Сиразетдинов Р.Т., Бражкина А.А. Универсальная структурная модель типового экономического кластера. *Управление большими системами: сборник трудов*. Москва, ИПУ РАН, 2010, вып. 29, с. 152–166.

[18] Мухарлямов Р.Г. Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями. *Вестник РУДН. Сер. Физико-математические науки*, 2007, № 1, с. 25–34.

[19] Ахметов А.А., Мухарлямов Р.Г. Применение методов моделирования механических систем для управления экономическими объектами. *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева*, 2008, № 2, с. 81–84.

[20] Мухаметзянов И.А., Матухина О.В., Чекмарева О.И. Управление динамикой производственного предприятия для приведения в состояние эталонной модели. *Вестник Казанского технологического университета,* 2015, т. 18, № 11, с. 210–212.

Статья поступила в редакцию 01.03.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Матухина О.В. О задаче моделирования кинематики и динамики управляемых систем с программными связями. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 4. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1753

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики FAPM–2017», посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24 – 27 октября 2017 г.

Матухина Олеся Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных систем и технологий Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет». Область деятельности и научных интересов: информационные технологии, математическое моделирование, численные методы, дифференциальные уравнения, теория управления, теоретическая и аналитическая механика.
e-mail: ovmatukhina@gmail.com

On the problem of simulating kinematics and dynamics of controllable systems with software links

© O.V. Matukhina

Nizhnekamsk Institute for Chemical Technology,
Branch of the FSBEI HPE Kazan National Research Technological University,
Nizhnekamsk, 423570, Russia

The article discusses mathematical simulation of kinematic properties and control of dynamics of systems with software links. The construction of differential equation systems used for generation of nonstationary differential link equations is proposed. The problem of generating equations of dynamics based on the integral variational principle is considered. To solve the problem of link stabilization the equations of software links are introduced into consideration. The application of the described simulation methods is shown on the example of the problem of controlling the wheel system movement with moving obstacles bypassing. In the course of solving, system kinematics equations are generated, expressed in the form of equations of nonstationary differential links. A model of the system dynamics with software links is constructed. Expressions for control forces affecting the system are determined to ensure the fulfillment of the link equations governing the system. The results of solving this problem illustrate the effectiveness of the described methods. The methods proposed in the work are applicable for solving trajectory problems, tasks of controlling electromechanical system movement, tasks of controlling the dynamics of economic, production and technical systems.

Keywords: *controlling the dynamics, stability, stabilization, software links*

REFERENCES

[1] Yerugin N.P. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1952, vol. XVI, pp. 659–670.
[2] Mukharlyamov R.G. *Differentsialnye uravneniya — Differential Equations*, 1967, vol. 3, no. 2, pp. 180–192.
[3] Mukharlyamov R.G. *Differentsialnye uravneniya — Differential Equations*, 1967, vol. 3, no. 10, pp. 1673–1681.
[4] Ibusheva O.V., Mukharlyamov R.G. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki — Proceeding of Kazan University. Physics and Mathematics Series*, 2008, vol. 150, no. 3, pp. 133–139.
[5] Baumgarte J. *Computer Math. Appl. Mech. Eng.*, 1972, vol. 1, no. 1, pp. 1–16.
[6] Mukharlyamov R.G. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, no. 2, pp. 236–249.
[7] Ibusheva O.V., Mukharlyamov R.G. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva (Herald of Kazan State Technical University named after A.N. Tupolev)*, 2010, no. 1, pp. 75–80.
[8] Matukhina O.V. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta — Herald of Kazan Technological University*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 199–202.
[9] Matukhina O.V. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta — Herald of Kazan Technological University*, 2012, vol. 15, no. 11, pp. 272–274.
[10] Olson H.F. *Dynamical Analogies.* New York, D. Van Nostrand Company, Inc. Publ., 1943, 278 p. [In Russ.: Olson H.F. Dinamicheskie analogii. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1947, 224 p.].

[11] Layton R.A. *Principles of Analytical System Dynamics*. New York, Springer, 1998, 158 p.

[12] Mukharlyamov R.G., Matukhina O.V., Akhmetov A.A. *Vestnik Tatarskogo gosudarstvennogo gumanitarno-pedagogicheskogo universiteta (Bulletin of Tatar State University of Humanities and Education)*, 2011, no. 2, pp. 25–37.

[13] Mukharlyamov R.G. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov, seriya Prikladnaya matematika i informatika — Peoples' Friendship University of Russia Journal of Mathematics Informatics and Physics*, 1994, no. 1, pp. 22–40.

[14] Shemelova O.V. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov, seriya Prikladnaya matematika i informatika — Peoples' Friendship University of Russia Journal of Mathematics Informatics and Physics*, 2003, no. 1, pp. 63–71.

[15] Sirazetdinov T.K. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatsionnaya tekhnika — Proceedings of Higher Educational Institutions. Aviation Technology*, 1972, no. 4, pp. 3–8.

[16] Sirazetdinov T.K., Rodionov V.V., Sirazetdinov R.T. *Dinamicheskie modeli ekonomicheskogo regiona* [Dynamic models of the economic region]. Kazan, Fen Publ., 2005, 320 p.

[17] Sirazetdinov R.T., Brazhkina A.A. Universalnaya strukturnaya model tipovogo ekonomicheskogo klastera [The universal structural model of a typical economic cluster]. In: *Upravlinie bolshimi sistemami. Sbornik trudov* [Control of large systems. Collection of works]. Moscow, Institute of Control Sciences of RAS Publ., 2010, no. 29, pp. 152–166.

[18] Mukharlyamov R.G. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov, seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki — Peoples' Friendship University of Russia Journal of Mathematics Informatics and Physics*, 2007, no. 1, pp. 25–34.

[19] Akhmetov A.A., Mukharlyamov R.G. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva (Herald of Kazan State Technical University named after A.N. Tupolev)*, 2008, no. 2, pp. 81–84.

[20] Mukhametzyanov I.A., Matukhina O.V., Chekmareva O.I. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta — Herald of Kazan Technological University*, 2015, vol. 18, no. 11, pp. 210–212.

Matukhina O.V., Cand. Sc. (Phys. & Math.), Associate Professor, Department of Information Systems and Technologies, Nizhnekamsk Institute for Chemical Technology, Branch of the FSBEI HPE Kazan National Research Technological University. Research interests: information technology, mathematical modeling, numerical methods, differential equations, control theory, theoretical and analytical mechanics.
e-mail: ovmatukhina@gmail.com