

Деформирование центрально-сжатого гибкого стержня

© А.В. Егоров

ОАО НИАТ, Москва, 117587, Россия

Рассмотрены процессы деформирования прямолинейных идеального и неидеального (неоднородного) стержней с параметром гибкости $\lambda = 867$ при действии осевой сжимающей силы, проведено сравнение этих процессов. Под неоднородным понимается стержень с вкладываем малом объеме и пониженной жесткости, расположенным несимметрично в центре стержня. Стальные стержни на торцах имеют шарнирное крепление. Анализ механического поведения стержней выполнен с применением объемных конечных элементов в программном комплексе LS-DYNA в динамической постановке. В расчетной модели учтены геометрическая и физическая нелинейность, пластичность, изотропность, реальная диаграмма деформирования материала. Результаты расчетов находятся в функции времени, что дает возможность наблюдать процесс деформирования в режиме текущего времени. Приведен видеоролик, иллюстрирующий этот процесс. Показано, что деформации идеального стержня обусловлены эффектом Пуассона, изгибных деформаций нет. Установлено, что для неидеального стержня существует критическая сила, при которой происходит потеря устойчивости стержня, связанная со значительными поперечными перемещениями (прогибами). Величина полученной критической силы согласуется с известным решением Эйлера.

Ключевые слова: *устойчивость стержней, гибкие стержни, потеря устойчивости, деформирование материала, задача Эйлера, эффект Пуассона, технологические отклонения, критическая нагрузка, конечно-элементное моделирование*

Введение. Исследованию механического поведения сжатых стержней посвящено большое количество публикаций, например [1–11]. Рассматривают стержни прямолинейные и криволинейные, сплошные и полые, с учетом и без учета потоков жидкости, с поперечными сечениями различных форм и разными условиями закрепления, в упругой и пластической областях, с переменными по длине геометрическими и механическими свойствами и т. д.

В отличие от известных публикаций в настоящей работе для решения задачи устойчивости центрально-сжатого прямолинейного гибкого стержня предлагается подход, основанный на анализе пространственного напряженно-деформированного состояния стержня и процесса перемещений точек стержня. Подход включает определение всех компонент напряжений, деформаций и перемещений в режиме текущего времени с учетом (неидеальный стержень) и без учета (идеальный стержень) технологических отклонений в стержне. Соответствующие расчеты выполняются с применением объемных конечных элементов в программном комплексе LS-DYNA в динамической постановке. В качестве технологических отклонений принята

местная неоднородность малого объема в центре стержня. Цель работы — проведение численного исследования механического поведения идеального и неидеального стержней и по полученным зависимостям поперечных перемещений от времени выявить условия потери устойчивости гибкого стержня. Процессы разрушения конструкции не рассматриваются.

Построение модели. Проведем анализ деформирования прямолинейного стержня постоянного поперечного сечения, нагруженного вдоль оси продольной сжимающей силой (рис. 1). Стержень имеет шарнирное закрепление: внизу — неподвижный шарнир, сверху — шарнирно-подвижная опора, которая разрешает вертикальные (осевые) перемещения верхнего торца. В центре тяжести торцевого сечения стержня приложена осевая сжимающая сила P .

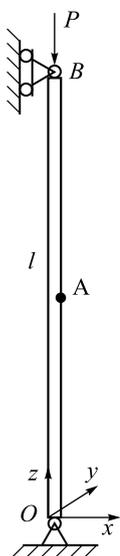


Рис. 1. Схема крепления и нагружения стержня

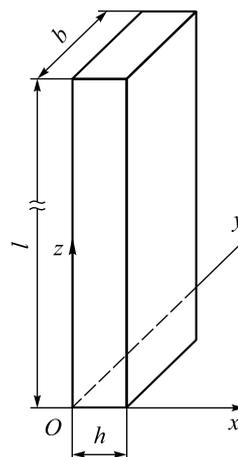


Рис. 2. Форма стержня

Выберем такие размеры стержня, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, чтобы он соответствовал гибким стержням (рис. 2):

Длина l , мм	300
Ширина b , мм	10
Толщина h , мм	1,2

Прямоугольное поперечное сечение $b \times h$ взято с целью обеспечить основные перемещения стержня в плоскости xz , т. е. повороты поперечных сечений будут происходить вокруг центральной оси, параллельной оси y , как оси с наименьшим моментом инерции сечения I_y .

Найдем параметр гибкости стержня λ [1]:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 300}{0,346} = 867,$$

где i — радиус инерции поперечного сечения стержня, $i^2 = \frac{I_y}{bh}$,

$$I_y = \frac{bh^3}{12}; \mu = 1 \text{ — коэффициент приведения длины.}$$

Поскольку $\lambda \gg 100$, то критическую силу $P_{кр}^э$ потери устойчивости стержня можно определить по формуле Эйлера [1]:

$$P_{кр}^э = \sigma_{кр} bh = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} bh = 31,5 \text{ Н,}$$

где $\sigma_{кр}$ — критическое напряжение в стержне; E — модуль упругости материала стержня.

Стержень изготовлен из стали 30ХГСА закаленной:

Модуль упругости E , ГПа	200
Предел текучести σ_t , ГПа	1,2
Предел прочности σ_b , ГПа	1,3

Найденная критическая сила $P_{кр}^э$ устанавливает факт и форму потери устойчивости стержня, но не говорит о процессе перемещений. Определить закон перемещений точек стержня при потере устойчивости можно, привлекая современные численные методы.

В настоящей работе механическое поведение центрально-сжатого стержня анализируется с применением программного комплекса LS-DYNA в динамической постановке и объемных конечных элементов. Данная постановка задачи позволяет определять пространственное напряженно-деформированное состояние стержня в режиме текущего времени и учитывать наличие технологических отклонений, которые имеют место в реальных конструкциях. К технологическим отклонениям можно отнести неоднородность, анизотропность, разнотолщинность, местные малые вырезы и выступы и т. п.

Задачу деформирования стержня решаем в LS-DYNA, учитывая геометрическую и физическую нелинейность, пластичность, изотропность, реальную диаграмму деформирования материала, которая перестраивается в истинную диаграмму деформирования. Механические характеристики материала стержня не зависят от температуры, уровня и скорости изменения деформаций.

Геометрическую модель стержня строим в программном комплексе ANSYS; здесь же проводится автоматическое разбиение

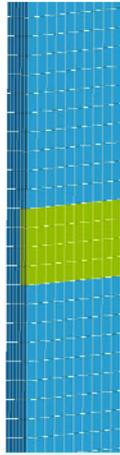


Рис. 3. Конечно-элементная модель стержня

стержня на объемные конечные элементы (рис. 3) с равномерной по осям координат сеткой.

Сформированную конечно-элементную модель стержня передаем в LS-DYNA, где задаем граничные условия, нагрузки, характеристики материалов, и проводим расчет.

Граничные условия в виде шарниров на верхнем и нижнем торцах стержня (см. рис. 1) должны обеспечивать свободные повороты торцов вокруг центральной оси, параллельной оси y . Для этого предложено скреплять узлы, расположенные на центральной оси, что дает возможность поворачиваться торцам относительно данной оси. В результате на торцах стержня появляются жесткие центральные оси, направленные параллельно оси y . Ось нижнего торца закрепляется неподвижно, ось верхнего торца может перемещаться только по координатной оси z .

Запишем геометрические граничные условия для торцов стержня в следующем виде:

при $z = 0$ ось нижнего торца

$$u_x = u_y = u_z = 0, \quad \varphi_x = \varphi_z = 0;$$

при $z = l$ ось верхнего торца

$$u_x = u_y = 0, \quad \varphi_x = \varphi_z = 0.$$

Здесь u и φ — линейные и угловые перемещения осей торцов.

Сжимающая сила P направлена вдоль оси стержня и приложена в центре тяжести верхнего торца.

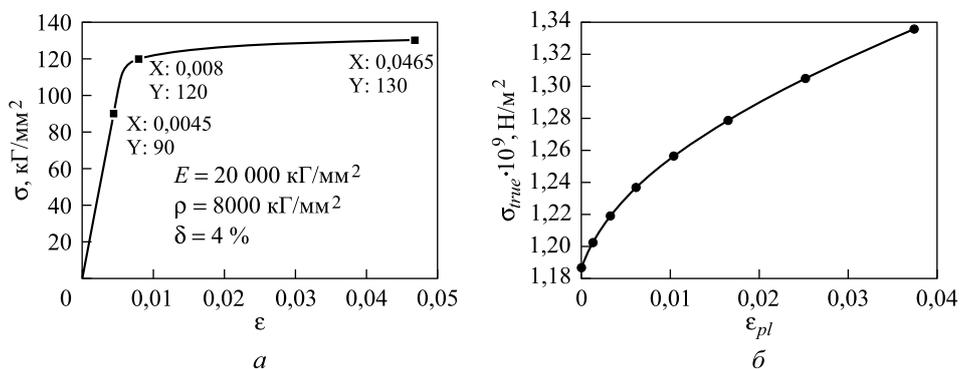


Рис. 4. Построенная (а) и истинная (б) диаграммы деформирования для стали 30ХГСА

Диаграмма деформирования для стали 30ХГСА строится по четырем точкам — $\sigma_{\text{пл}}$, $\sigma_{0,2}$, σ_B , δ (рис. 4, а), затем перестраивается в истинную диаграмму деформирования (рис. 4, б). Расчеты проводим на отрезке времени от 0 до 0,01 с.

Нагрузка P изменяется по закону (рис. 5), включающему линейный участок нарастания силы и средний участок постоянной силы.

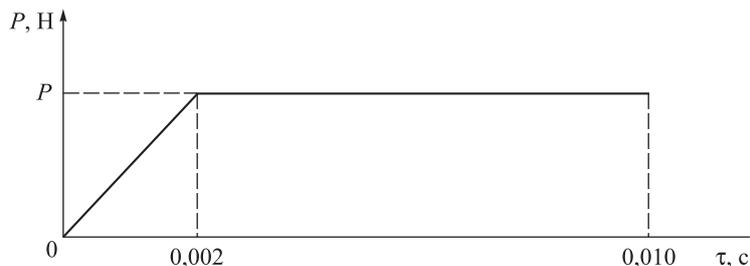


Рис. 5. Закон изменения во времени нагрузки

Деформирование идеального стержня. Вначале исследуем напряженно-деформированное состояние идеального стержня (рис. б) без технологических отклонений. Под действием сжимающей силы $P = 30 \text{ Н}$ в стержне возникает напряженное состояние, близкое к однородному. Незначительные изменения напряженного состояния наблюдаются вблизи боковых свободных и торцевых закрепленных поверхностей стержня. Поперечные нормальные напряжения σ_x и σ_y на три порядка меньше продольных — σ_z .

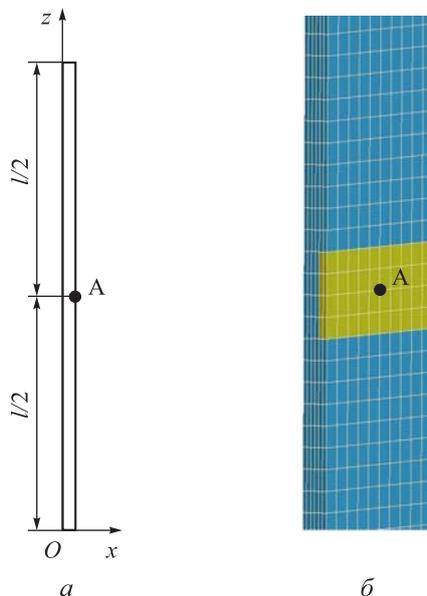


Рис. 6. Схема (а) и конечно-элементная модель (б) идеального стержня

Поэтому изменения во времени напряжений по Мизесу σ_m (рис. 7) и напряжений σ_z — одинаковые. Максимальное напряжение $\sigma_m^{\max} = 2,5$ МПа, что совпадает с классическим решением в сопряmate [1]. Горизонтальные перемещения всех точек широких боковых поверхностей стержня (см. рис. 6, точка А) одинаковы и изменяются согласно закону изменения нагрузки (см. рис. 5). При $\tau = 0,002$ с перемещения выходят на максимум $u_x^m = 2,1 \cdot 10^{-6}$ мм; наличие в последующем некоторых колебаний объясняется применением динамического решения в LS-DYNA без демпфирования. Полученный результат говорит о том, что стержень при сжатии равномерно утолщается в плоскости xz , т. е. в этой плоскости остается прямоугольной формы, за исключением малых концевых зон, что согласуется с принципом Сен-Венана.

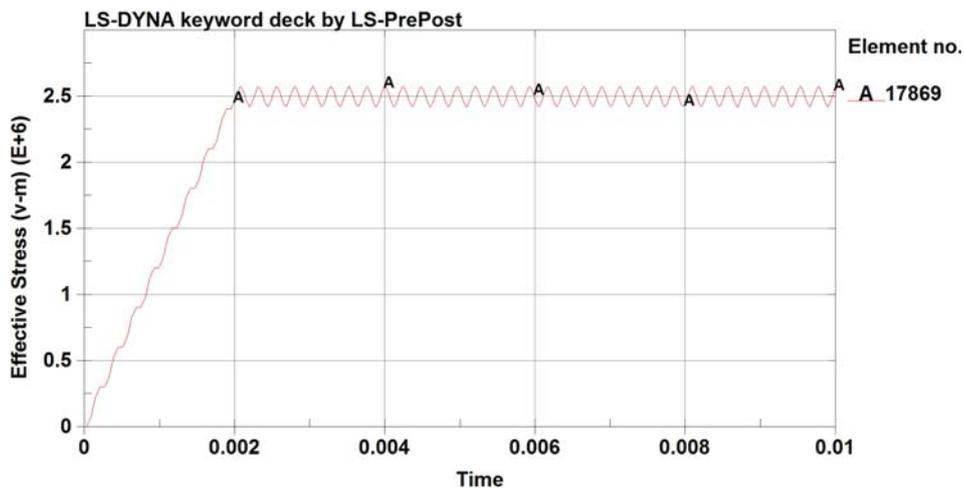


Рис. 7. Изменение во времени напряжений по Мизесу σ_m (однородный стержень)

Если пренебречь малыми поперечными напряжениями σ_x и σ_y , то из закона Гука можно найти продольную деформацию ε_z стержня:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{2,5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} = 1,25 \cdot 10^{-5}.$$

Поперечная деформация ε_x в направлении оси x будет:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta h}{h} = \nu \varepsilon_z = 3,75 \cdot 10^{-6},$$

где ν — коэффициент Пуассона, для стали $\nu = 0,3$.

Отсюда $\Delta h = 1,2 \cdot 3,75 \cdot 10^{-6} = 4,5 \cdot 10^{-6}$ мм.

Поскольку Δh — полное удлинение в направлении оси x сжатого по z стержня, горизонтальные перемещения u_x^n точек больших (широких) граней стержня за счет эффекта Пуассона будут:

$$u_x^n = \frac{1}{2} \Delta h = 2,25 \cdot 10^{-6} \text{ мм.}$$

Видим, что $u_x^m \approx u_x^n$, следовательно, найденные по LS-DYNA перемещения u_x^m объясняются эффектом Пуассона (рис. 8). В этом случае продольная ось (по z) стержня не изгибается, что говорит об отсутствии эффекта потери устойчивости стержня в плоскости xz . Отметим, что подобные деформации имеют место и в плоскости yz .

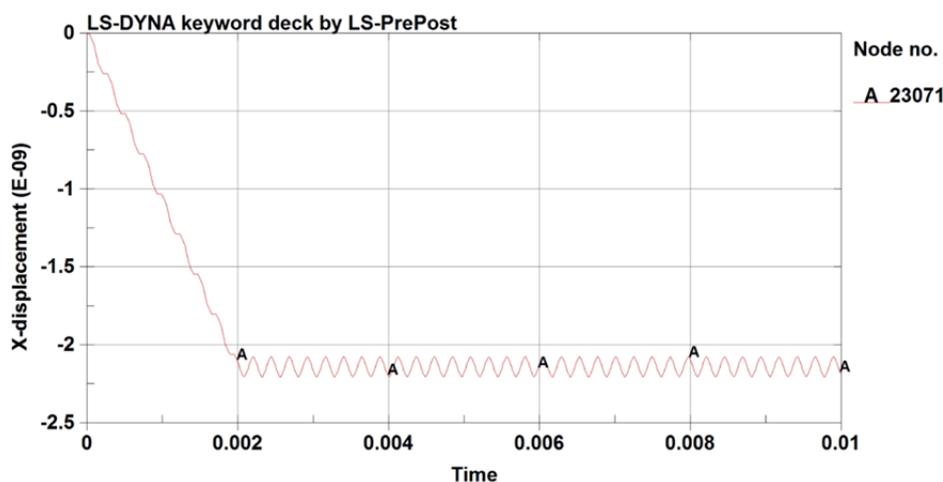


Рис. 8. Изменение во времени перемещений u_x (однородный стержень)

Расчеты также показали, что при возрастании нагрузки ($P > 30$ Н) процесс деформирования идеального стержня не изменяется.

Таким образом, на основе полученного по программе LS-DYNA решения можно сделать следующие выводы. Во-первых, поперечные перемещения всех точек боковых широких граней стержня одинаковы и вызваны эффектом Пуассона. Во-вторых, не происходит изгиба продольной оси стержня, т. е. стержень не теряет устойчивость.

Деформирование неидеального стержня. Рассмотрим теперь механическое поведение неидеального стержня (см. рис. 3) с технологическим отклонением в виде местной неоднородности. Пусть в центре стержня существует малая область с пониженным модулем

упругости E_f . Область имеет форму прямоугольного параллелепипеда глубиной 0,4 мм (по оси x), шириной 2 мм (по оси z), длиной 10 мм (по оси y). Будем называть далее эту область вкладышем. Вкладыш расположен на широкой боковой грани стержня (см. рис. 3), имеет характеристику $E_f = 180$ ГПа, что на 10 % меньше модуля упругости всего стержня.

Неидеальный стержень задаем геометрически в виде двух тел: стержень с вырезом и вкладыш. После сборки этих тел производится автоматическое разбиение конструкции на объемные конечные элементы с равномерной по осям координат сеткой, что обеспечивает полное сопряжение тел и позволяет задавать разные механические характеристики для них.

Нагрузим неоднородный (неидеальный) стержень силой $P = 30$ Н. Продольные нормальные напряжения σ_z сжатия (рис. 9) распределятся по площади поперечного сечения стержня неравномерно: вкладыш стержня нагружен меньше, чем стержень. Распределение напряжений σ_z по толщине стержня, в центральной его части, соответствует эффекту внецентренного сжатия.

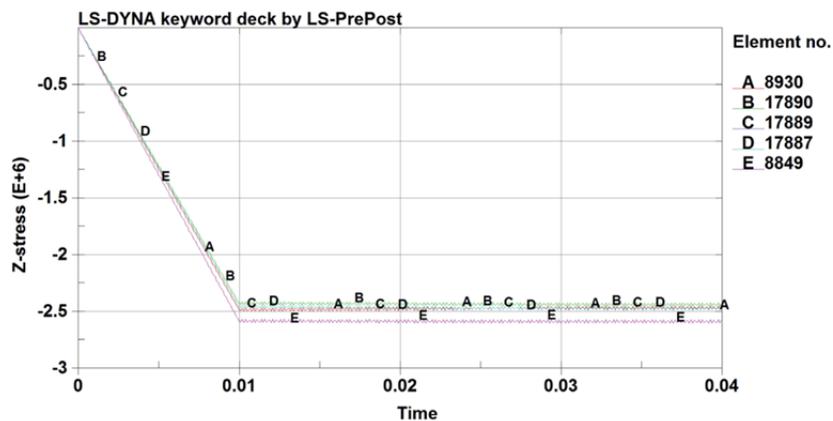


Рис. 9. Распределение продольных нормальных напряжений σ_z сжатия по площади поперечного сечения стержня

Размещение конечных элементов на стержне представлено на рис. 10. Поперечные перемещения точек (координаты по оси x) правой (рис. 11, а) и левой (рис. 11, б) граней стержня положительны (направлены вдоль оси x), имеют малую величину и разные максимальные значения: на правой грани $u_x^{\max} = 1,8 \cdot 10^{-6}$ м, на левой грани $u_x^{\max} = 1,79 \cdot 10^{-6}$ м. Разность перемещений будет $\Delta u_x^{\max} = 10^{-5}$ мм.

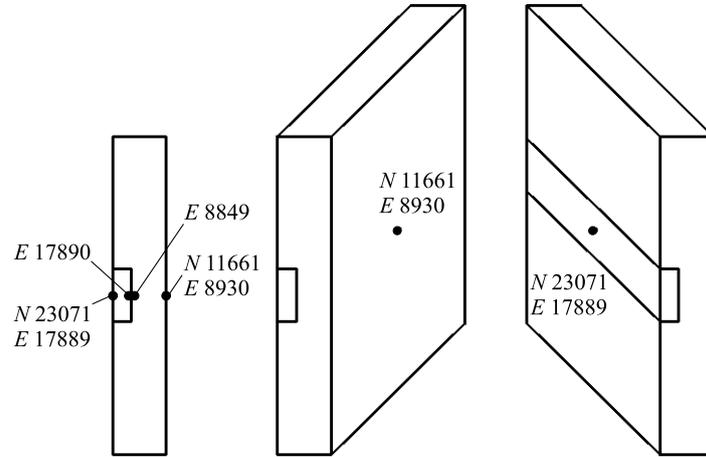


Рис. 10. Размещение узлов N и элементов E в центральной части неоднородного стержня

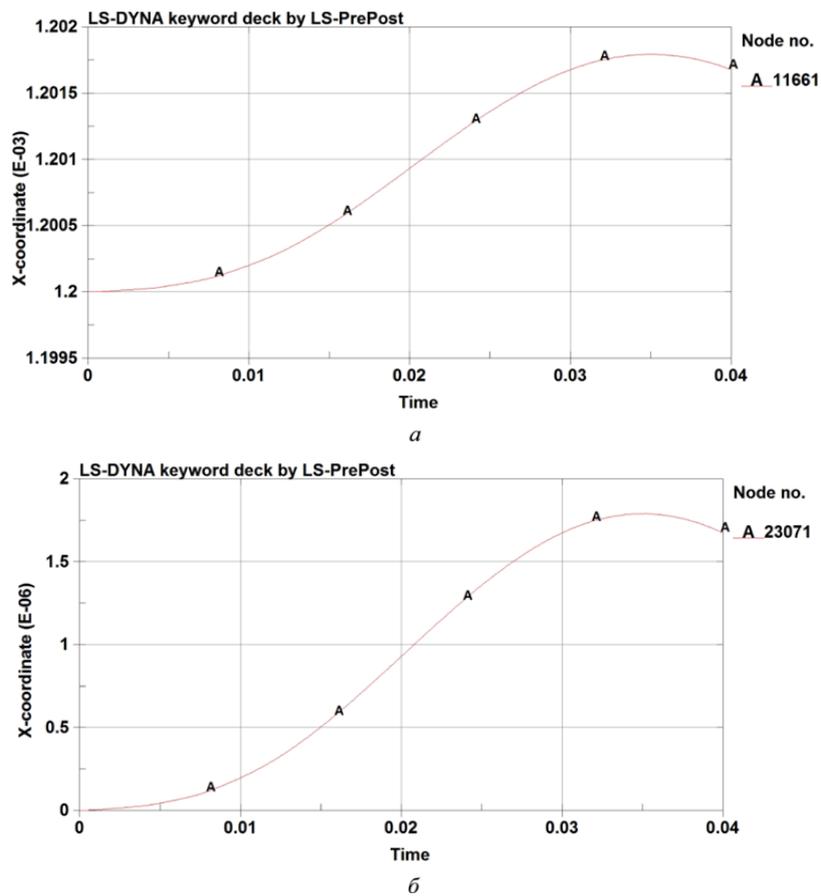


Рис. 11. Координаты u_x точки правой (а) и левой (б) граней неоднородного стержня

Из анализа напряженно-деформированного состояния неоднородного стержня следует, что при сжатии силой $P = 30$ Н стержень испытывает малые изгибные деформации. Перемещения оси стержня ограничены по амплитуде малой величиной ($1,795 \cdot 10^{-3}$ мм), что значительно меньше поперечного размера стержня (толщиной 1,2 мм). Можно считать, что потери устойчивости стержня не происходит, так как нет дальнейшего роста во времени малых поперечных перемещений оси стержня. Об этом свидетельствует и график скорости перемещений (рис. 12).

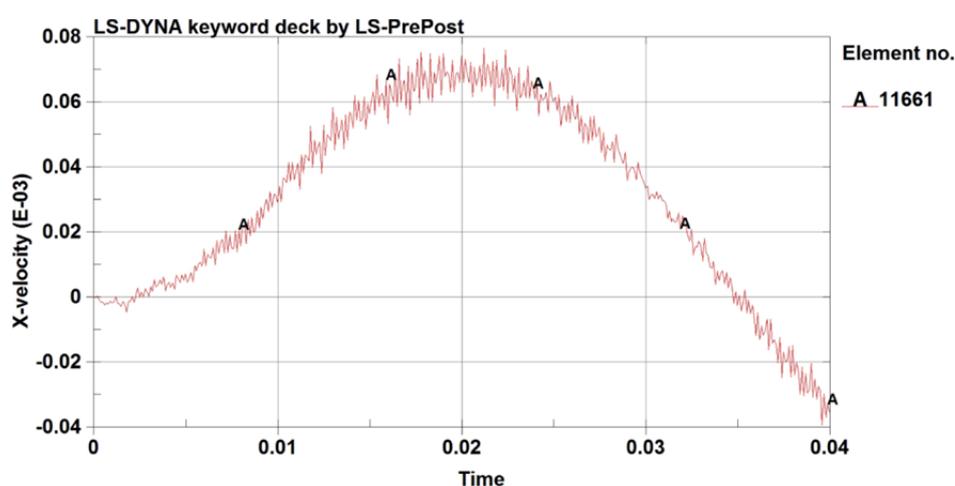


Рис. 12. Изменение скорости перемещений боковой грани неоднородного стержня

При нагружении стержня сжимающей силой $P = 35$ Н процесс деформирования оказывается идентичным предыдущему варианту нагружения силой $P = 30$ Н. Это означает, что потери устойчивости стержня тоже не происходит. Отличие состоит в том, что максимальное перемещение правой боковой грани больше и равно $u_x^{\max} = 4,3 \cdot 10^{-6}$ м (рис. 13) и сам максимум перемещений сдвигается по времени в сторону увеличения.

Если приложить к стержню сжимающую силу $P = 40$ Н, то деформирование стержня переходит из области малых в зону заметных перемещений (рис. 14), когда $u_x > 3,5$ мм. Эти перемещения превышают размеры поперечного сечения стержня и растут до уравновешивания силы P упругим изгибающим моментом изогнутого стержня. Расчеты показывают, что изгиб стержня происходит в упругой области. Появление местных пластических деформаций возможно вблизи жесткой оси на нижнем торце стержня.

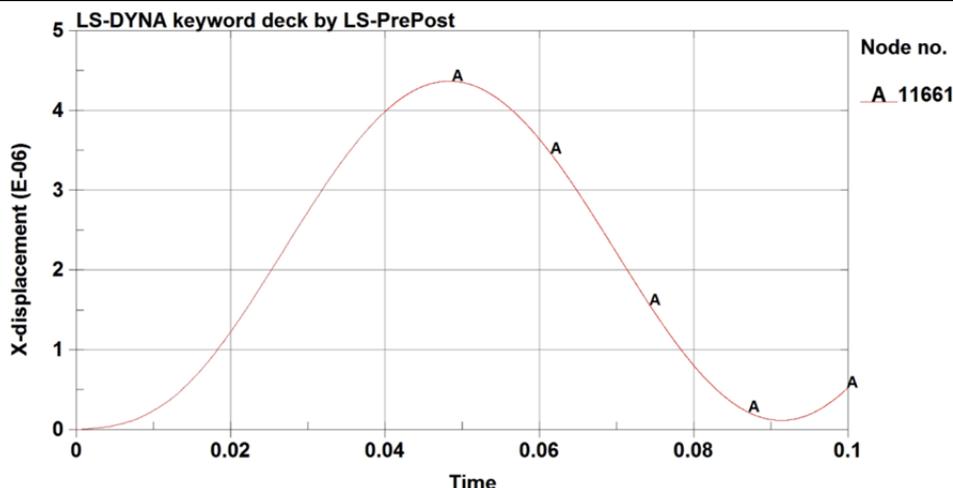


Рис. 13. Перемещение боковой грани неоднородного стержня при $P = 35$ Н

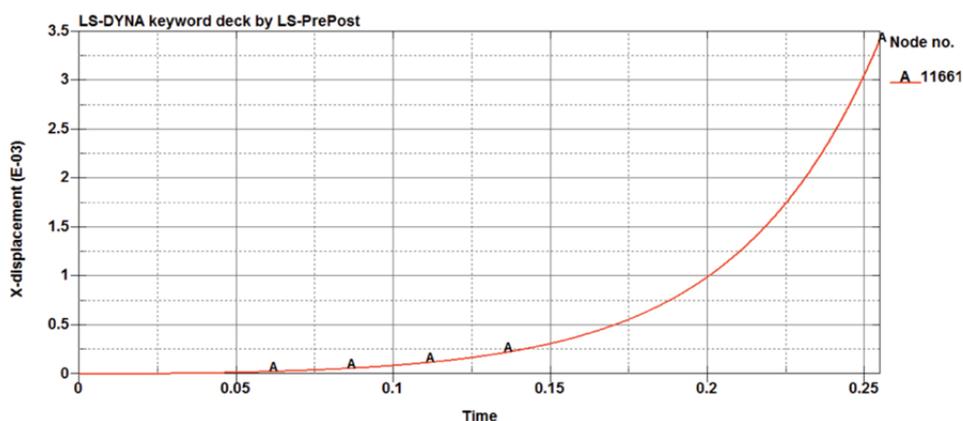


Рис. 14. Перемещение боковой грани неоднородного стержня при $P = 40$ Н

Форма прогиба стержня представляет собой одну полуволну (рис. 15) и соответствует общепринятому понятию потери устойчивости шарнирно-опертого стержня при действии критической силы $P_{кр}$. Поэтому в исследуемом случае неоднородного стержня за критическую нагрузку (с точностью до ± 5 Н) можно принять $P_{кр} = 40$ Н. Это значение на 26 % превышает критическую силу по Эйлеру, равную $P_{кр}^3 = 31,5$ Н. Отметим, что с уменьшением жесткости вкладыша или увеличением его размеров критическая сила $P_{кр}$ будет приближаться к $P_{кр}^3$.

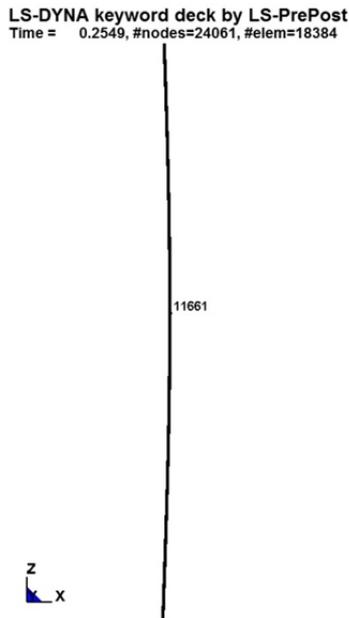


Рис. 15. Форма прогиба неоднородного стержня при $P = 40$ Н

Исследуем далее деформирование стержня при $P = 60$ Н, когда потеря устойчивости стержня сопровождается большими перемещениями $u_x^{\max} = 128$ мм (рис. 16), сравнимыми с длиной стержня. Из-за высокой гибкости стержня ($\lambda = 867$) в начальной стадии нагружения имеет место упругий изгиб, а затем — упругопластический. На видеоролике (<https://youtu.be/ujjJw34mnOk>) представлен процесс деформирования стержня во времени от начальной прямолинейной формы до петлеобразной. На рис. 17, а показана промежуточная форма деформированного стержня, на рис. 17, б — петлеобразная.

Размер петли зависит от величины приложенной силы P . В точке стержня с узлом 8910 выведены напряжения по Мизесу в функции времени (рис. 18). На графике прослеживается момент времени, когда напряжения по Мизесу достигают предельных значений.

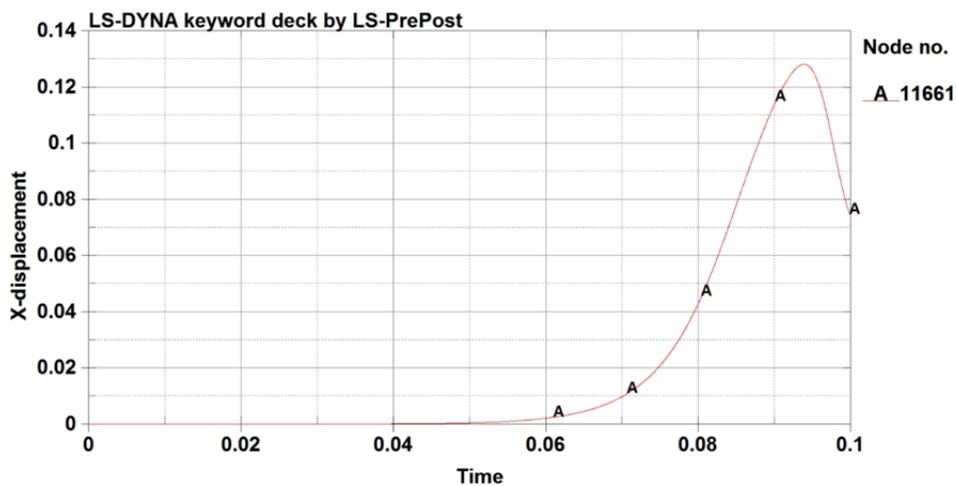


Рис. 16. Перемещения во времени в неоднородном стержне при $P = 60$ Н

LS-DYNA keyword deck by LS-PrePost
Time = 0.09354, #nodes=24061, #elem=18384

LS-DYNA keyword deck by LS-PrePost
Time = 0.1, #nodes=24061, #elem=18384

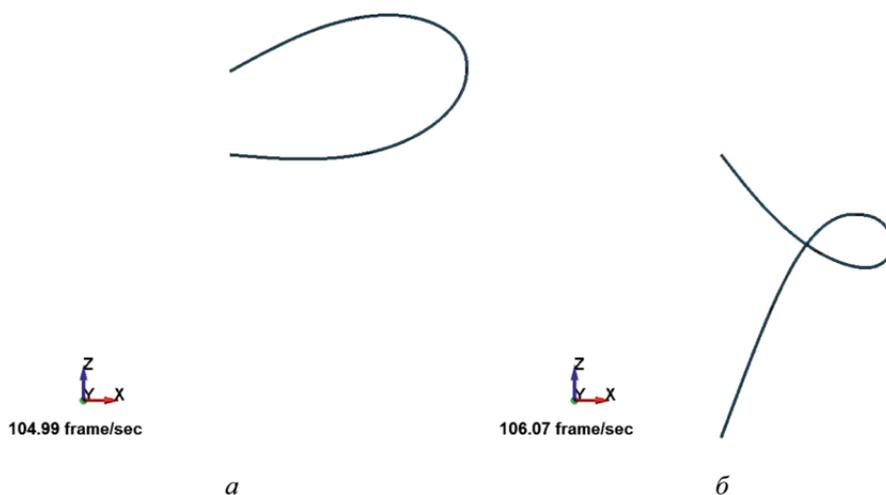


Рис. 17. Деформирование прямолинейного стержня во времени до петлеобразной формы

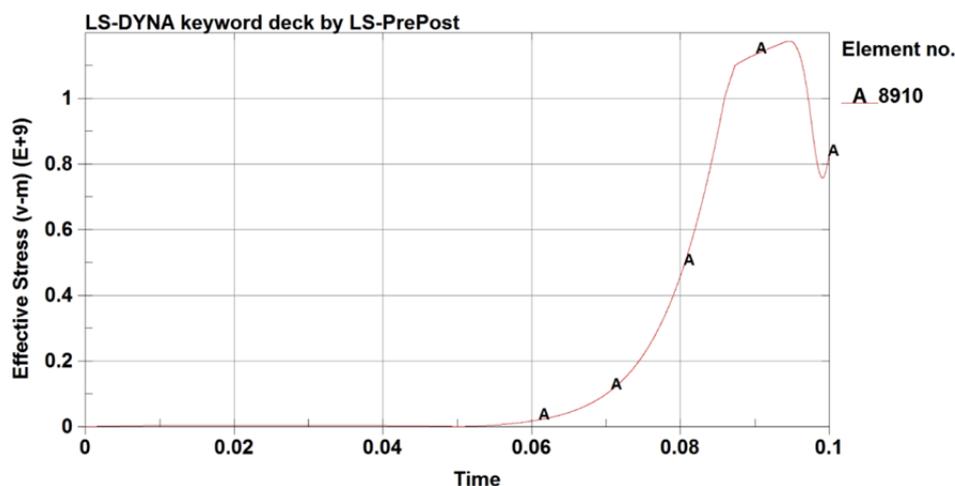


Рис. 18. Напряжения по Мизесу

Заклучение. Проанализировано пространственное напряженно-деформированное состояние идеального и неидеального (неоднородного) прямолинейных гибких стержней и процесс перемещений точек стержня при действии осевой сжимающей силы. Процесс деформирования неоднородного прямолинейного гибкого стержня под

действием сжимающей силы можно условно разделить на три уровня, которые соответствуют малым, заметным и большим перемещениям. Каждый уровень однозначно связан с величиной внешней нагрузки P . Малым перемещениям отвечает задача о продольно-поперечном изгибе стержня. Заметные и большие перемещения происходят при потере устойчивости стержня.

Идеальные прямолинейные гибкие стержни при осевом сжатии не изгибаются.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. 16-е изд., испр. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 543 с.
- [2] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. 5-е изд. Москва, Наука. Физматлит, 1996, 368 с.
- [3] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1961, 340 с.
- [4] Тимошенко С.П. *Устойчивость стержней, пластин и оболочек*. Москва, Наука, 1971, 808 с.
- [5] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука. Физматлит, 1967, 984 с.
- [6] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. 2-е изд., перераб. и доп. Москва, Машиностроение, 1991, 336 с.
- [7] Светлицкий В.А. *Строительная механика машин. Механика стержней. В 2 томах. Том 1. Статика*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2009, 408 с.
- [8] Лагозинский С.А., Соколов А.И. Устойчивость прямолинейных стержней, нагруженных следящими силами. *Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин. Сборник статей*. В.А. Светлицкий, О.С. Нарайкин, ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 244–259.
- [9] Seyranian A.P., Elishakoff I., eds. *Modern Problems of Structural Stability*. Wien, Springer-Verlag, 2002, 398 p. ISBN 3211836977. URL: <http://www.springer.com/us/book/9783211836972#> (дата обращения 07.03.2018).
- [10] Ferretti M., Luongo A. Flexural-Torsional Flutter and Buckling of Braced Foil Beams under a Follower Force. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017 (2):1–10. DOI: 10.1155/2017/2691963
- [11] Di Egidio A., Luongo A., Paolone A. Linear and nonlinear interactions between static and dynamic bifurcations of damped planar beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, vol. 42 (1), pp. 88–98. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2006.12.010

Статья поступила в редакцию 28.03.2018

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Егоров А.В. Деформирование центрально-сжатого гибкого стержня. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 4.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1750>

Егоров Антон Витальевич — канд. техн. наук, старший научный сотрудник ОАО НИАТ. Автор четырех научных статей в области расчета емкостных конструкций, трех патентов. e-mail: antegor177@mail.ru

Straining an axially loaded slender column

© A.V. Egorov

Public JSC National Institute of Aviation Technologies, Moscow, 117587, Russia

The article considers processes of straining rectilinear ideal and nonideal (inhomogeneous) bars with the flexibility parameter $\lambda = 867$ caused by an axial compressive force, and these processes are compared. A bar is assumed to be inhomogeneous when a liner of small volume and reduced stiffness is located asymmetrically in the center of the bar. Steel bars are articulated on the ends. The analysis of the mechanical behavior of the bars is carried out using volumetric finite elements in the program complex LS-DYNA in a dynamic formulation. The design model takes into account geometric and physical non-linearity, plasticity, isotropy, the real diagram of material deformation. The results of analysis are in the function of time, which makes it possible to observe the deformation process in the running time mode. A video illustrating this process is given. It is shown that the deformations of an ideal bar are due to the Poisson effect, there are no bending deformations. It is found that for a nonideal bar there is a critical force at which buckling of bar occurs, which is associated with significant transverse displacements (deflections). The value of the obtained critical force agrees with the well-known Euler's solution.

Keywords: bar stability, flexible bars, buckling, material straining, Euler problem, Poisson effect, technological deviations, critical load, finite element simulation

REFERENCES

- [1] Feodosyev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, BMSTU Publ., 2016, 543 p.
- [2] Feodosyev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniu materialov* [Selected tasks and questions on the strength of materials]. Moscow, Nauka. Fizmatlit Publ., 1996, 368 p.
- [3] Bolotin V.V. *Nekonservativnyye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti* [Nonconservative problems of the theory of elastic stability]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1961, 340 p.
- [4] Timoshenko S.P. *Ustoychivost sterzhney, plastin i obolochek* [Stability of bars, plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 808 p.
- [5] Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemykh system* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka. Fizmatlit Publ., 1967, 984 p.
- [6] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh system* [Basics of calculating the stability of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991, 336 p.
- [7] Svetlitsky V.A. *Stroitel'naya mekhanika mashin. Mekhanika sterzhney. V 2 to-makh. Tom 1. Statika* [Structural mechanics of machines. Mechanics of rods. In 2 volumes. Vol. 1. Statics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 408 p.
- [8] Lagozinsky S.A., Sokolov A.I. *Ustoychivost pryamolineynykh sterzhney, nagruzhennykh sledyashchimi silami* [Stability of rectilinear rods loaded with tracking force]. *Sbornik statey "Problemy prikladnoy mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin"* [Collection of articles "Problems of applied mechanics, dynamics and strength of machines"]. Svetlitsky V.A., Naraykin O.S., eds. Moscow, BMSTU Publ., 2005, pp. 244–259.

- [9] Seyranian A.P., Elishakoff I., eds. *Modern Problems of Structural Stability*. Wien, Springer-Verlag, 2002, 398 p. ISBN 3211836977. Available at: <http://www.springer.com/us/book/9783211836972#>
- [10] Ferretti M., Luongo A. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, (2):1–10. DOI: 10.1155/2017/2691963
- [11] Di Egidio A., Luongo A., Paolone A. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, vol. 42 (1), pp. 88–98. DOI:10.1016/j.ijnonlinmec.2006.12.010

Egorov A.V., Cand. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Public JSC National Institute of Aviation Technologies. Author of 4 research publications in the field of analysis of capacitive structures and 3 patents. e-mail: antegor177@mail.ru