

М. А. Семерикова

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА
В СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ**

Рассмотрен метод исследования процесса разрушения материала на основе положений механики сплошной среды. Для оценки состояния материала используется подход эффективного напряжения. Основным интересом представляет характеристика поврежденности — параметр разрушения. Рассмотрено построение определяющих уравнений для параметра разрушения. Поставлена связанная задача термоупругости с разрушением для стержня из хрупкого материала. Описан метод численного решения при помощи метода конечных элементов. Проведен анализ результатов численного моделирования.

E-mail: maria.semerikova@gmail.com

Ключевые слова: механика разрушений, хрупкие материалы, связанная задача термоупругости, метод конечных элементов.

Введение. При анализе работоспособности различных конструкций естественным образом возникает вопрос о ее прочности в заданных условиях. В отличие от хорошо разработанных и достаточно точных методов определения полей напряжений и перемещений задача исследования разрушения конструкций остается сложной и нерешенной [1–3].

Под разрушением подразумевается исчерпание несущей способности тела, произошедшее или вследствие неограниченного изменения формы — вязкое разрушение, или вследствие накопления повреждений — хрупкое разрушение. В случае хрупкого разрушения, являющимся основным для данной работы, материал деформируется незначительно перед началом разрушения и окончательным растрескиванием представительного элемента объема.

Наиболее простым и реалистичным при исследовании разрушения и оценке прочности является анализ состояния материала на основе положений механики сплошной среды с учетом особенностей структуры материала. При этом вводится априорная характеристика поврежденности (параметр разрушения), характер поведения которой устанавливается при помощи сравнения следствий теории с экспериментальными данными.

В данной работе исследована модель хрупкого разрушения, основанная на использовании подхода эффективных напряжений, а также качественно исследована работоспособность модели хрупкого разрушения на ряде простых термомеханических задач.

Модель механического процесса разрушения. Рассмотрим метод учета поврежденности материала, основанный на понятии эффективного напряжения, так как он не требует информации о микроструктуре материала и подходит для описания хрупкого разрушения при малых деформациях. В соответствии с этим методом эффективное напряжение $\tilde{\sigma}$ используется в определяющих уравнениях вместо напряжения Коши в виде $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}$, где параметр D описывает макроскопический эффект износа в поведении материала. Природа параметра D может быть различна, причем выбор факторов, влияющих на D , зависит от свойств материала и характера нагружения, а сам параметр, вообще говоря, может быть как скалярным (изотропное разрушение), так и тензорным. Для хрупких материалов наиболее подходящими считаются способы оценки параметра D по изменению модуля Юнга [1], тогда $D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}$, где \tilde{E} – измененный модуль Юнга материала, в котором происходит разрушение.

Определяющие уравнения. Для записи определяющих уравнений при скалярном параметре D будем использовать скалярный параметр состояния β , характеризующий накопление повреждений, который в модели разрушения играет роль, аналогичную роли параметра изотропного упрочнения r в пластичности [2, 3]. Тогда массовая плотность свободной энергии имеет следующий вид:

$$A = A^e(\tilde{\varepsilon}^e, D) + A^p(\alpha_j) + A^d(\beta),$$

где A^e , A^p , A^d – составляющие массовой плотности свободной энергии, зависящие от характеристик упругости, пластичности и разрушения материала соответственно, α_j некоторые параметры состояния (модельнозависимые), характеризующие упрочнение. В данном случае нет связи между упрочнением и разрушением и существуют две термодинамические силы Y и B , связанные с параметрами D и β соответственно: $Y = -\rho \frac{\partial A^e}{\partial D}$, $B = \rho \frac{\partial A^d}{\partial \beta}$, где ρ – плотность.

В зависимости от того, имеют ли пластичность и разрушение одинаковые механизмы, имеет место наличие общего либо отдельного для каждого явления потенциала диссипации. Для описания хрупких материалов удобно разделять механизмы пластичности и разрушения ($A_j = \rho \frac{\partial A^p}{\partial \alpha_j}$):

$$F_p(\hat{\sigma}, A_j; D), \quad f_p(\hat{\sigma}, A_j; D) \leq 0 \quad \text{— для пластичности};$$

$$F_d(Y, B; D, \beta), \quad f_d(Y, B; D, \beta) \leq 0 \quad \text{— для разрушения},$$

где f_p и f_d – соответствующие критерии, которые в пространстве напряжений и в пространстве термодинамических сил, ассоциирован-

ных с разрушением, соответственно ограничивают упругую и неповрежденную области.

Тогда можно записать кинетические уравнения для пластических деформаций и разрушения [2]:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}^p &= \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \hat{\sigma}}, & \dot{\alpha}_j &= -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial A_j}; \\ \dot{D} &= \dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial Y}, & \dot{\beta} &= -\dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial B}.\end{aligned}\quad (1)$$

Множители $\dot{\lambda}_p$ и $\dot{\lambda}_d$, соответствующие пластичности и разрушению соответственно, определяются из условий согласованности $\dot{f}_p = f_p = 0$, $\dot{f}_d = f_d = 0$ и независимы, когда присутствует только пластичность ($f_d < 0 \Rightarrow \dot{\lambda}_d = 0$) или когда происходит хрупкое разрушение ($f_p < 0 \Rightarrow \dot{\lambda}_p = 0$).

Наиболее распространенный подход для построения критерия разрушения f_d аналогичен построению критерия пластичности. Однако в отличие от пластичности, где параметр упрочнения имеет смысл накопленной во время пластического деформирования энергии, при разрушении смысл параметра β менее естествен. Поэтому часто используется критерий, в котором непрерывно запоминается размер неповрежденной области [2]. В неизотропном случае (параметр разрушения и соответствующая термодинамическая сила представлены тензорами \hat{D} и \hat{y} соответственно) этот критерий имеет вид

$$f_d = \Omega(\hat{y}) - \omega(\hat{D}) \leq 0,$$

в соответствии с которыми

$$\dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial \hat{y}}, \quad \dot{\lambda}_d = \dot{\omega},$$

где параметр ω описывает “память” о максимальном размере неповрежденной области. Функция $\Omega(\hat{y})$ может быть выбрана как некоторая норма $\|\hat{y}\|_j = (\hat{y} : \hat{J} : \hat{y})^{1/2}$, зависящая от тензора свойств материала 4-го ранга \hat{J} . Отметим, что в случае изотропного разрушения тензор \hat{J} становится единичным, а тензор \hat{y} становится скалярной переменной Y .

Связанная задача термоупругости с разрушением. Построим математическую модель нагружения хрупкого стержня длины L в приближении классической термоупругости. Состояние системы описывается двумя уравнениями: уравнением теплопроводности и уравнением движения [4]. Учтем зависимость тензора упругих коэффициентов \hat{C} от параметра разрушения (принято правило суммирования по повторяю-

щимся индексам):

$$\begin{aligned} \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} &= -TC_{ijkl}(D)\alpha_{kl}^{(T)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q \\ &\text{— уравнение теплопроводности,} \\ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}(D) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) \right) + \rho b_i, \quad i = \overline{1,3} \\ &\text{— уравнение движения,} \end{aligned} \quad (2)$$

где T — температура, u_i — компоненты вектора перемещений, ε_{ij} — компоненты тензора малых деформаций, C_{ijkl} — компоненты тензора упругих коэффициентов, зависящих от параметра разрушения, c_ε — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации, $\lambda_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора теплопроводности, $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора температурных деформаций, Q — функция-источник, описывающая объемное тепловыделение, $\alpha_{ij}^{(T)}$ — коэффициент линейного расширения.

Пусть материал стержня является изотропным. Будем рассматривать изотропное разрушение, описываемое скалярным параметром D , $0 \leq D \leq 1$: при $D = 0$ материал не поврежден, $D = 1$ означает, что имеет место трещина. Разрушение развивается вместе с ростом упругих деформаций. Для определения начала разрушения вводится переменный предел разрушения ε_D , характеризующий размер упругой области. Запишем зависимость D от ε :

$$\begin{aligned} dD &= \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^s d\varepsilon, \quad \text{когда } \varepsilon = \varepsilon_D \text{ и } d\varepsilon = d\varepsilon_D > 0; \\ dD &= 0, \quad \text{когда } \varepsilon < \varepsilon_D \text{ или } d\varepsilon \leq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $s > 0$, ε_0 — постоянная величина, а переменный предел деформирования ε_D согласован с критерием деформирования, когда критерии пластичности и разрушения различны и независимы [2].

Для задачи (2) поставим начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_{st}(x); \\ T(0, t) &= T_1, \quad T(L, t) = T_2; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x); \\ u(0, t) &= 0, \quad E(1 - D) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = p(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Система (2)–(4) замкнута, неизвестными являются поле температуры, перемещения, деформации и напряжения в стержне.

Численное решение связанной задачи термоупругости с разрушением. Будем решать безразмерную связанную задачу термоупругости с разрушением методом конечных элементов [5].

Конечноэлементная постановка задачи. На отрезке $[0, 1]$ зададим сетку $\omega_h = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, для которой шаг $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1 \dots (N - 1)$; i -м отрезком разбиения будем считать отрезок $[x_{i-1}, x_i]$.

Выберем пространство пробных функций $\tilde{\varphi}_i$, состоящее из кусочно-линейных финитных функций, носителями которых являются пары соседних отрезков разбиения. Будем аппроксимировать распределение температуры и поле перемещений функциями из данного пространства. Представив распределение температуры в стержне в виде $T = \sum_{i=1}^N T_i \tilde{\varphi}_i(x)$, а поле перемещений в виде $u = \sum_{i=1}^N u_i \tilde{\varphi}_i(x)$, можно записать уравнения теплопроводности и движения в слабой постановке и перейти к системе линейных алгебраических уравнений для уравнений теплопроводности и движения:

$$\frac{1}{\tau} [C] \left(\{ \hat{T} \} - \{ T \} \right) + \left[\tilde{K}(\dot{\varepsilon}, D, \alpha) \right] + [K_T] \{ \hat{T} \} = \{ R_T \},$$

$$\frac{1}{\tau^2} [M] \left(\{ \hat{U} \} - 2 \{ U \} + \{ \check{U} \} \right) + [K(D)] \{ \hat{U} \} = \{ R_U(T) \},$$

где $\{T\}$ — вектор узловых значений температур; $\{U\}$ — вектор узловых значений перемещений; $[C]$ — матрица теплоемкостей; $\left[\tilde{K}(\dot{\varepsilon}, D, \alpha) \right]$ — матрица, характеризующая связь скорости деформаций на предыдущем слое и температуры; $[K_T]$ — матрица теплопроводности; $[M]$ — матрица масс; $[K(D)]$ — матрица жесткости; $\{R_T\}$ — вектор правой части в уравнении теплопроводности; $\{R_U(T)\}$ — вектор нагрузок, зависящий от температуры, в уравнении для перемещений, τ — шаг по времени. На каждом временном слое сначала вычисляется распределение температуры. Затем с использованием найденных значений температуры на той же сетке решается уравнение движения и определяется, не превышают ли значения деформаций на отрезках ε_i , $i = 1 \dots (N - 1)$, значение переменного предела ε_{D_i} , вычисленное на предыдущем слое. Если на некотором отрезке $\varepsilon_i \geq \varepsilon_{D_i}$, то на данном отрезке возрастает параметр D и меняются упругие свойства материала. Если же $\varepsilon_i < \varepsilon_{D_i}$, то на данном отрезке используется значение параметра разрушения с предыдущего временного слоя. Полученное значение параметра D используется для определения температуры на следующем временном слое.

Результаты расчетов. Рассмотрим модельную задачу для хрупкого материала. Зададим размерные параметры задачи с учетом характерных для данного материала свойств:

$$L = 0,02 \text{ м}, \quad \rho = 10800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \lambda = 3,487 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}},$$

$$c_\varepsilon = 310 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad \sigma_f = 1,1 \cdot 10^8 \text{Па}, \quad \alpha = 10^{-5} \text{К}^{-1}, \quad T_0 = 300 \text{К}.$$

Будем считать, что левый конец стержня закреплен, к правому приложено растягивающее напряжение $p(t)$, а в начальный момент времени стержень не деформирован: $u_0(x) = 0$. Положим $v_0(x) = 0$. Зададим на концах стержня фиксированные значения температуры и согласованное с ними начальное распределение.

Для решения связанной задачи термоупругости с разрушением написана программа на языке Fortran 90. Тестирование проводилось на ряде качественных задач. Поскольку важно исследовать поведение стержня качественно, все расчеты проведены на равномерной сетке, состоящей из 200 точек, и все рисунки приведены для безразмерных параметров.

При учете разрушения в связанной задаче термоупругости возможны различные варианты поведения стержня.

Случай, в котором *разрушения не происходит*, вызывает определенный интерес. Его можно проиллюстрировать следующим примером: зададим значение растягивающего напряжения на правом конце стержня равным $2 \cdot 10^7$ Па, значение температуры на левом конце — $T_1 = 300$ К, на правом — $T_2 = 310$ К. Напряжения, деформации и распределение значений параметра разрушения в моменты времени, соответствующие безразмерному параметру Фурье $Fo = 0,1$ (a) и 1 (b) изображены на рис. 1. В данном случае значение параметра разрушения возрастает, но не достигает критического значения. Более того, оно перестает значительно изменяться после первого отражения упругой волны, идущей от нагруженного правого конца стержня, в точке закрепления и (первого) достижения максимума перемещений. Это означает, что значение параметра ε_D , отвечающего за размер неповрежденной области, растет при выполнении условия роста поврежденности. Для дальнейшего роста поврежденности необходимо достичь уже большего значения ε_D , чем при $D = 0$. Из рис. 1 видно, что наличие параметра разрушения делает связь между напряжениями и деформациями нелинейной. Графики приведены в безразмерных координатах, в которых значения напряжений и деформаций совпадают (в случае линейной упругости). Здесь же виден зазор, обусловленный нелинейностью задачи и наличием разрушения; причем зазор тем больше, чем больше параметр D .

Мгновенное разрушение происходит, когда растягивающее напряжение или градиент температур слишком велики, например, при значении растягивающего напряжения $p = 4 \cdot 10^7$ Па и разнице температур в 100 К: $T_1 = 300$ К, $T_2 = 400$ К. В таком случае параметр разрушения на первом шаге по времени достигает критического значения и

при численных расчетах может даже превосходить его в разы. Упругие волны в таком случае не успевают распространиться, и стержень разрушается на правом конце.

Разрушение у закрепленного конца происходит тогда, когда градиент температуры играет меньшую роль в разрушении, чем растягивающая сила, и каждого из этих факторов по отдельности может быть недостаточно для разрушения стержня. Положим значение напряжения на правом конце $p = 3 \cdot 10^7$ Па, температуру на левом конце $T_1 = 300$ К, на правом — $T_2 = 310$ К. В начале процесса значение параметра разрушения не изменяется, однако когда упругая волна доходит до точки закрепления, значение параметра разрушения возрастает до критического достаточно быстро. Наиболее наглядно разрушение демонстрируют графики параметра разрушения D , деформаций ε , напряжений σ в моменты времени $Fo = 0,28$ (а) и $0,67$ (б) на рис. 2.

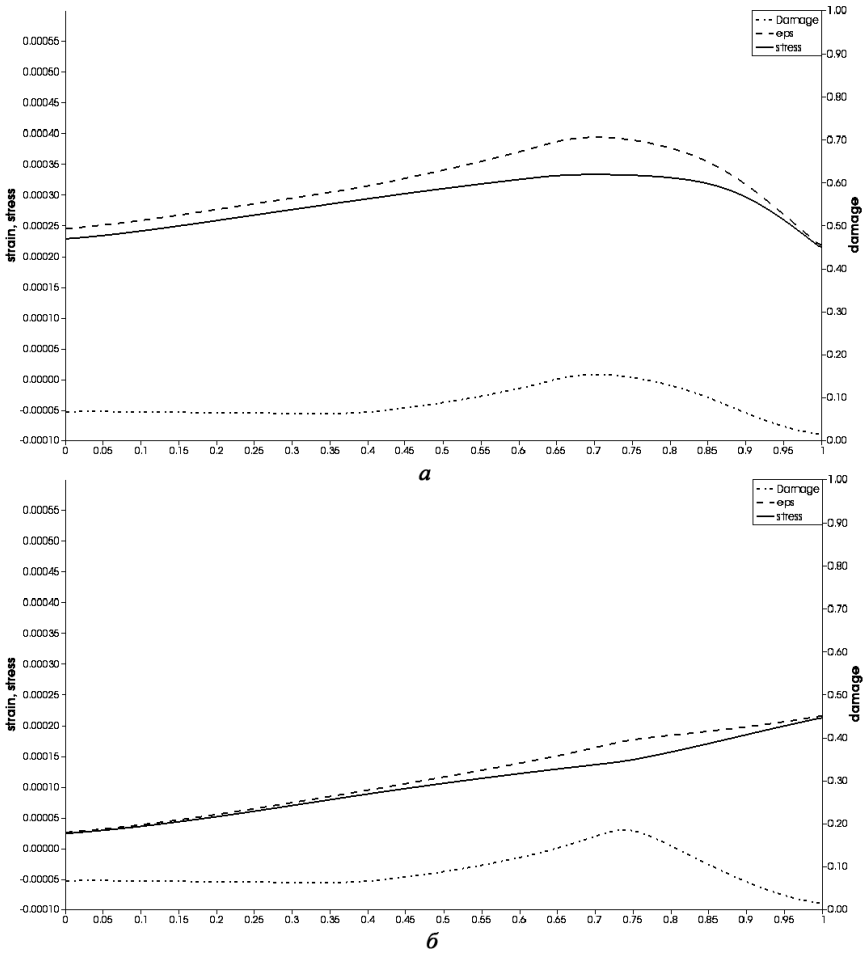


Рис. 1. Деформации, напряжения, параметр разрушения в стержне в связанной задаче термоупругости (нет разрушения)

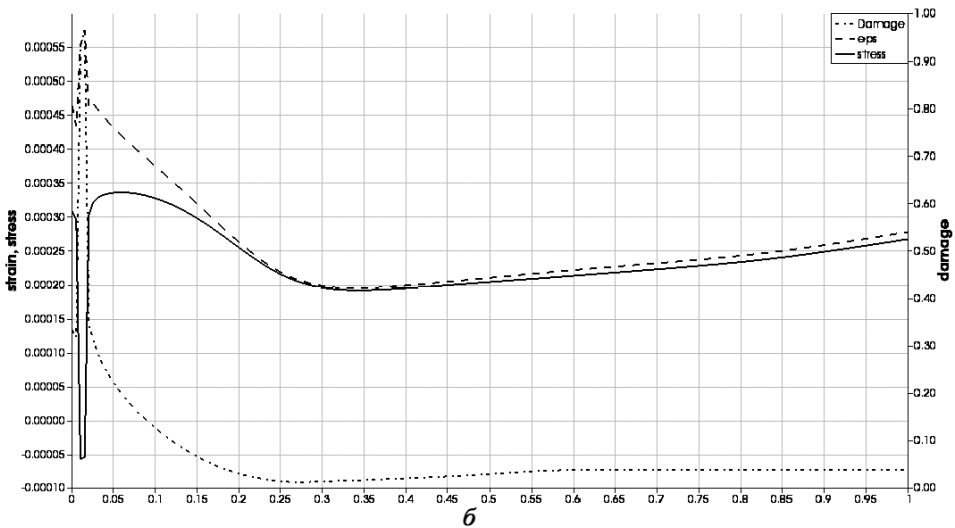
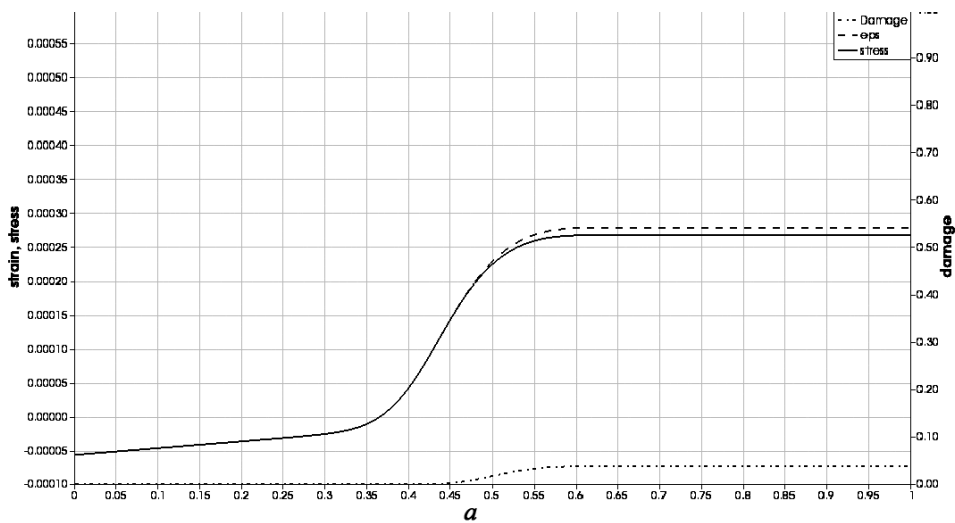


Рис. 2. Деформации, напряжения, параметр разрушения в стержне в связанной задаче термоупругости (разрушение у закрепленного конца) при $Fo = 0,28$ (а) и $0,67$ (б)

Для исследования зависимости разрушения от температуры добавим в уравнение теплопроводности постоянной по времени источник теплоты $Q(x) \sim \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, а растягивающее напряжение заведомо зададим меньшим, чем необходимое для разрушения. Поскольку наиболее сильно нагревается центральная часть стержня, ожидается, что разрушение произойдет именно там. Действительно, как показано на рис. 3, стержень разрушается в центральной части. Заметим, что разгрузка в данном случае наблюдается по обе стороны от места разрушения.

Зависимость модели от параметра s . Исследуем зависимость времени и характера разрушения стержня от параметра s в кинетическом уравнении роста поврежденности (3). Проиллюстрируем ее рис. 4.

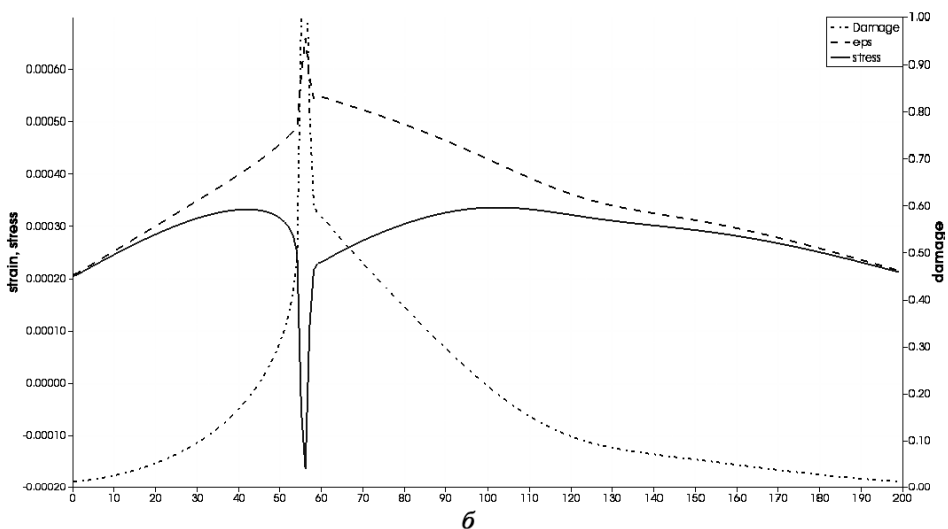
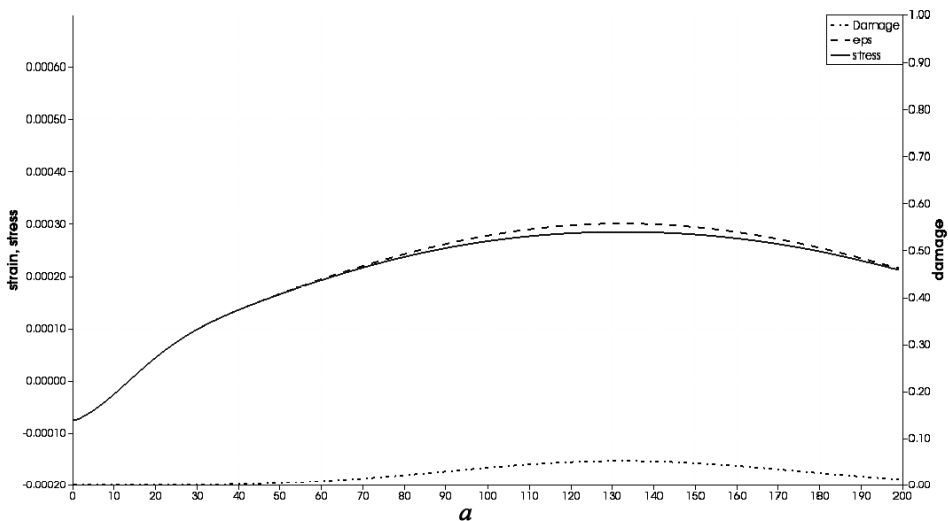


Рис. 3. Деформации, напряжения, параметр разрушения в стержне в связанной задаче термоупругости (разрушение в центральной части)

Отметим, что при росте значения s характер разрушения меняется: при больших значениях ($s = 5, 10$) разрушения не происходит, однако при $s \leq 1,3$ разрушение происходит у закрепленного конца. С увеличением s точка, в которой разрушается стержень, сдвигается дальше от заделанного конца, значения параметра D уменьшаются, время до разрушения увеличивается.

Заключение. В работе рассмотрена математическая модель разрушения одномерного стержня из хрупкого материала в приближении линейной термоупругости с учетом разрушения. Численно проанализированы различные сценарии нагружения стержня с заделанным концом, как приводящие, так и не приводящие к полному разрушению материала.

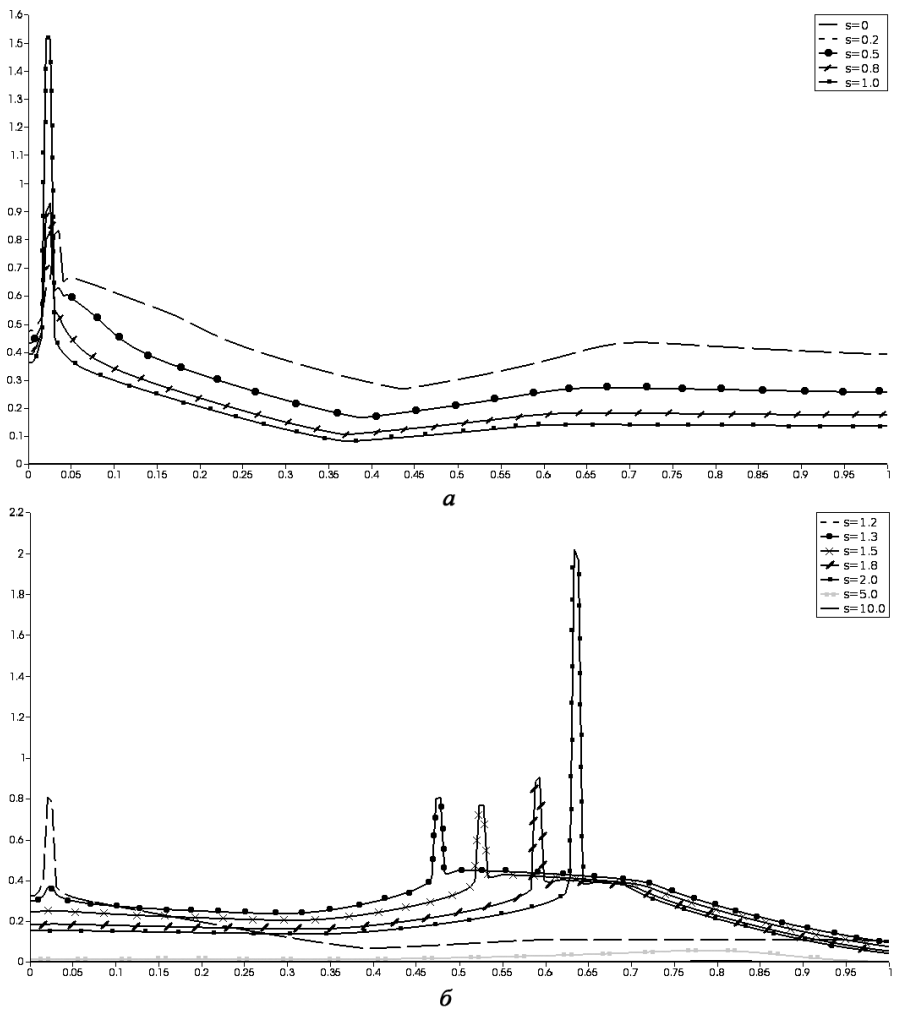


Рис. 4. Распределение значений параметра разрушения в зависимости от параметра s : $s \leq 1$ (а), $s > 1$ (б)

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты № 12-01-00109, № 12-01-31193.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L e m a i t r e J. A Course on Damage Mechanics. – Springer, 1996. – 228 p.
2. B e s s o n J., C a i l l e t a u d G., C h a b o c h e J.-L., F o r e s t S., B l e t r y M. Non-linear Mechanics of Materials. – Springer, 2010. – 450 p.
3. К а ч а н о в Л. М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
4. З а р у б и н В. С., К у в ы р к и н Г. Н. Математические модели термомеханики. – М.: Физматлит, 2002. – 168 с.
5. B a t h e K. -J. Finite Element Procedures. – Prentice-Hall, 1996. – 1037 p.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012