УДК 532.5:533 DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1739

Вибратор Ландау — Лифшица в уравнениях газовой динамики

© В.М. Овсянников

Московская государственная академия водного транспорта — филиал Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Москва, 117105, Россия
Ноябрьский институт нефти и газа — филиал Тюменского индустриального университета, Ноябрьск, 629802, Тюменская обл., Ямало-Ненецкий авт. округ, Россия

В статье удалось представить неоднородные члены волнового уравнения, которые возникают из конвективных членов уравнения движения, через якобианы второго порядка вектора скорости, приведенные ранее Л. Эйлером в уравнении неразрывности. Неоднородная часть выведенного Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем волнового уравнения, преобразованная к сумме якобианов второго порядка вектора скорости, позволяет конкретизировать рассчитанное ранее поле скорости гидродинамических течений и получить оценку интенсивности генерации периодических волн, создаваемых стационарным потоком. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем установлено, что при использовании метода акустической аналогии М.Дж. Лайтхилла конвективные члены уравнения движения газовой динамики проникают в неоднородную часть волнового уравнения. Они создают генерацию звука и автоколебаний, не связанных с внешними воздействиями на поток. Это неоднородное волновое уравнение можно рассматривать в качестве вибратора, раскачивающего как аналитическое решение, так и решение численными методами задач обтекания тел потоком газа.

Ключевые слова: *конвективные члены уравнения движения, автоколебания, неоднородное волновое уравнение, метод акустической аналогии*

Введение. Еще в 1940-х годах проблема объяснения причин турбулентности волновала Л.Д. Ландау. Так, в 1944 г. в журнале ЖТФ он отмечал [1] наличие большого количества работ по турбулентности, в которых изучается характер турбулентных пульсаций, но малое или полное отсутствие исследований, раскрывающих причины возникновения пульсаций. Значительно позже, после представления знаменитого метода акустической аналогии М.Дж. Лайтхилла, будучи уже зрелыми учеными, Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц указали причину возникновения пульсаций, преобразовав классическую систему уравнений газовой динамики в неоднородное волновое уравнение, правая неоднородная часть которого порождает гармонические синусоидальные колебания [2]. Похоже, Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц не ощутили в полной мере важности своего открытия, поместив этот материал в параграфе 75 учебника [2], посвященном возникновению турбулентности.

Причины образования волнообразного синусоидального движения могут быть выявлены на основании того, что Ландау и Лифшиц не просто вывели неоднородное волновое уравнение, а показали эквивалентность в некоторой степени волнового уравнения и системы уравнений газовой динамики. Таким образом, можно получить волновое уравнение из системы уравнений газовой динамики математическими операциями, не привлекая посторонних соотношений и не ставя какие-либо ограничения.

Важную роль в выводе волнового уравнения сыграл М.Дж. Лайтхилл [3], который предложил в 1952–1954 гг. метод акустической аналогии, описывающий возникновение турбулентных пульсаций в виде гармонических колебаний. М.Дж. Лайтхилл линеаризовал систему уравнений газовой динамики, взял производную по времени t от нестационарного уравнения неразрывности для газа, содержащего производную $\partial\rho/\partial t$, и, вычитая из результата производную по x от уравнения движения вдоль оси x, содержащего $\partial p/\partial x$, производную по y от уравнения движения вдоль y, содержащего $\partial p/\partial y$, и производную по z от того же уравнения движения вдоль z, содержащего $\partial p/\partial z$, получил в левой части равенства члены однородного волнового уравнения:

$$\partial^2\rho/\partial t^2 - \partial p^2/\partial x^2 - \partial^2 p/\partial y^2 - \partial^2 p/\partial z^2.$$

Поскольку Лайтхилл добавил в первоначальную классическую систему турбулентные члены — и в уравнение неразрывности, и в уравнение движения, в правой части волнового уравнения он получил члены — турбулентные источники гармонических колебаний.

Целью настоящей статьи является желание упростить и конкретизировать результат, полученный Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем, — приведенное ими в параграфе 75 [2] волновое уравнение, чтобы можно было аналитически оценить интенсивность звука и автоколебаний, возникающих в потоке при отсутствии внешних воздействий.

Волновое уравнение Ландау — Лифшица. Повторяя путь Лайтхилла, Ландау и Лифшиц выполнили линеаризацию, отбросив часть членов высокого порядка малости; турбулентные члены при этом не добавляли, но искусственно оставили конвективные члены уравнения движения:

по оси x

$$u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y + w\partial u/\partial z,$$

по оси y

$$u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y + w\partial v/\partial z,$$

по оси z

$$u\partial w/\partial x + v\partial w/\partial y + w\partial w/\partial z.$$

У Лайтхилла конвективные члены при линеаризации выпали. Предвидение Ландау и Лифшица оказалось верным и очень результативным. После проведения всех операций метода акустической аналогии было получено волновое уравнение; в его правой неоднородной части имелся комплекс, содержавший два суммирования по повторяющемуся индексу:

$$\rho_0\partial(v_k\,\partial v_i/\partial x_k)/\partial x_i.$$

Через x_i Ландау и Лифшиц обозначали декартовы координаты, а через v_i — скорости вдоль этих координат.

Приведем это выражение к привычному виду:

$$\rho_0\partial(v_k\,\partial v_i/\partial x_k)/\partial x_i = \rho_0[\partial(v_1\,\partial v_1/\partial x_1)/\partial x_1 + \partial(v_1\,\partial v_2/\partial x_1)/\partial x_2 +$$
$$+\partial(v_1\,\partial v_3/\partial x_1)/\partial x_3 + \partial(v_2\,\partial v_1/\partial x_2)/\partial x_1 + \partial(v_2\,\partial v_2/\partial x_2)/\partial x_2 + \partial(v_2\,\partial v_3/\partial x_2)/\partial x_3 +$$
$$+\partial(v_3\,\partial v_1/\partial x_3)/\partial x_1 + \partial(v_3\,\partial v_2/\partial x_3)/\partial x_2 + \partial(v_3\,\partial v_3/\partial x_3)/\partial x_3] = \rho_0[(\partial v_1/\partial x_1)^2 +$$
$$+ (\partial v_1/\partial x_2)(\partial v_2/\partial x_1) + (\partial v_1/\partial x_3)(\partial v_3/\partial x_1) + (\partial v_2/\partial x_1)(\partial v_1/\partial x_2) + (\partial v_2/\partial x_2)^2 +$$
$$+ (\partial v_2/\partial x_3)(\partial v_3/\partial x_2) + (\partial v_3/\partial x_1)(\partial v_1/\partial x_3) + (\partial v_3/\partial x_2)(\partial v_2/\partial x_3) + (\partial v_3/\partial x_3)^2].$$

Используя вытекающие из уравнения неразрывности

$$\partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 + \partial v_3/\partial x_3 = 0$$

равенства

$$(\partial v_1/\partial x_1)^2 = -(\partial v_1/\partial x_1)(\partial v_2/\partial x_2) - (\partial v_1/\partial x_1)(\partial v_3/\partial x_3),$$
$$(\partial v_2/\partial x_2)^2 = -(\partial v_2/\partial x_2)(\partial v_1/\partial x_1) - (\partial v_2/\partial x_2)(\partial v_3/\partial x_3),$$
$$(\partial v_3/\partial x_3)^2 = -(\partial v_3/\partial x_3)(\partial v_1/\partial x_1) - (\partial v_3/\partial x_3)(\partial v_2/\partial x_2),$$

можно продолжить преобразования правой неоднородной части волнового уравнения с суммированием по повторяющимся индексам следующим образом:

$$\rho_0\partial(v_k\,\partial v_i/\partial x_k)/\partial x_i =$$
$$= -2\rho_0\begin{vmatrix}\partial u/\partial x & \partial u/\partial y\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y\end{vmatrix} - 2\rho_0\begin{vmatrix}\partial v/\partial y & \partial v/\partial z\\ \partial w/\partial y & \partial w/\partial z\end{vmatrix} - 2\rho_0\begin{vmatrix}\partial w/\partial z & \partial w/\partial x\\ \partial u/\partial z & \partial u/\partial x\end{vmatrix}.$$

В правой части полученного равенства декартовы координаты x_1, x_2, x_3 обозначены как x, y, z, а компоненты скорости вдоль них — как u, v, w.

Правая часть волнового уравнения, выведенного Ландау и Лифшицем, представляет собой сумму удвоенных якобианов второго порядка вектора скорости, умноженную на среднюю плотность ρ_0 и взятую со знаком минус.

Представляется разумным вообще не проводить линеаризацию и выполнить все операции метода акустической аналогии Лайтхилла применительно к полной, классической системе уравнений газовой динамики. При этом следует отнести все мелкие члены в правую неоднородную часть волнового уравнения [4, 5], а потом для его упрощения и приведения к виду, понятному акустикам и математикам, воспользоваться приближением слабосжимаемой жидкости — малости изменения плотности ρ по координатам x и y. В результате получается волновое уравнение с удвоенными якобианами второго порядка в правой неоднородной части волнового уравнения:

$$\partial^2\rho/\partial t^2 - \partial p^2/\partial x^2 - \partial^2 p/\partial y^2 - \partial^2 p/\partial z^2 =$$

$$= -2\rho_0 \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} - 2\rho_0 \begin{vmatrix} \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{vmatrix} - 2\rho_0 \begin{vmatrix} \partial w/\partial z & \partial w/\partial x \\ \partial u/\partial z & \partial u/\partial x \end{vmatrix}.$$

Идентичность решений волнового уравнения и уравнений газовой динамики. Можно считать, что волновое уравнение и система уравнений газовой динамики имеют почти одинаковое решение, различающееся лишь вследствие пренебрежения изменением плотности по координатам. Иными словами, поля $p(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$, $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ будут удовлетворять и системе уравнений газовой динамики, и волновому уравнению. Во многих курсах уравнений математической физики (например, в курсе С.К. Годунова [6, с. 62]) система гиперболических уравнений первого порядка, где линеаризованное уравнение неразрывности имеет вид

$$\partial p/\partial t + \rho_0 c_0^2\, \partial u/\partial x = 0,$$

линеаризованное уравнение движения

$$\partial u/\partial t + \rho_0^{-1}\, \partial p/\partial x = 0,$$

рассматривается как одно гиперболическое уравнение второго порядка для давления p:

$$\partial^2 p/\partial t^2 - c_0^2 \partial p^2/\partial x^2 = 0.$$

Здесь c_0 — скорость звука; ρ_0 — средняя плотность.

Эта гипотеза может быть подтверждена решением некоторых модельных задач численным методом при использовании мелких шагов по времени Δt и по координатам Δx, Δy, Δz, что достаточно для разрешения синусоидальных волн.

Обычно специалистов по газодинамике удовлетворяет стационарное решение задачи обтекания тела, поэтому систему уравнений решают, используя довольно крупный шаг сетки по x, y и z. Так, расчет пограничного слоя иногда ведут при числе точек 10–20 в поперечном направлении.

Можно выдвинуть следующую гипотезу, подлежащую проверке. Раскачка стационарного решения системы уравнений газовой динамики, проводимого при довольно крупном шаге, отражает обязательное условие того, чтобы решение удовлетворяло также и волновому уравнению. Раскачка решения должна иметь бóльшую амплитуду там, где якобианы вектора скорости имеют бóльшее абсолютное значение. И наоборот, раскачка меньше, где модуль якобианов вектора скорости меньше. Так ли это, или существуют какие-либо иные, пока невидимые подводные камни, можно будет узнать после численной проверки высказанной гипотезы. Теоретические аспекты возможности одинакового решения для волнового уравнения и системы уравнений газовой динамики рассмотрены в [7].

Косвенной численной проверкой высказанной гипотезы можно считать расчеты, выполняемые по квазигазодинамическим уравнениям [8–10]. Эти уравнения уменьшают раскачку решения, поскольку в них используются дополнительные члены, подавляющие колебания и, возможно, инициированные конвективными членами уравнения движения. В [11] получено, что члены, добавляемые в уравнения газовой динамики, как раз и содержат якобианы второго порядка вектора скорости.

Заключение. Уравнения газовой динамики не позволяют получить чисто стационарные решения, исключением являются ускоренные течения, которые подчиняются экспоненциальному лагранжеву закону движения.

Волновое уравнение, выведенное Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем, показывает, что при отличии от нуля трех якобианов второго порядка вектора скорости поток будет генерировать звук и автоколебания, не связанные с внешним воздействием.

Применение метода теории функций комплексного переменного при расчете потенциальных течений позволяет для простых течений рассчитывать флаттер и автоколебания аналитически, без использования трудоемких и затратных по машинному времени численных методов.

Получаемые аналитическим методом решения для простейших течений могут быть эталоном при проверке правильности шага сетки, используемой в расчетах численным методом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л.Д. О турбулентности. *ЖТФ*, 1944, т. XIV, с. 240.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. Москва, Наука, 1988, 736 с.

[3] Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. Part I. General theory. Part II. Turbulence a source sound. *Proc. Royal Society*, A211, 1952, A222, 1954.

[4] Овсянников В.М. *Волнообразование и конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера*. Москва, Спутник +, 2017, 487 с.

[5] Овсянников В.М. История вывода уравнения неразрывности. *Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам*

теоретической и прикладной механики. Казань, 20–24 августа 2015 г., с. 2823–2824.

[6] Годунов С.К. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука, 1971, 16 с.

[7] Овсянников В.М. Образование волн в стационарном ламинарном течении. *Вестник Московского городского педагогического университета. Сер. Естественные науки*, 2016, № 4 (24), с. 51–59.

[8] Четверушкин Б.Н. *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*. Москва, МАКС Пресс, 2004, 332 с.

[9] Елизарова Т.Г. *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений*. Москва, Научный мир, 2007, 352 с.

[10] Шеретов Ю.В. *Регуляризованные уравнения гидродинамики*. Тверь, Тверской государственный университет, 2016, 222 с.

[11] Ovsyannikov V.M. Comparison of Additional Second-Order Terms in Finite-Difference Euler Equations and Regularized Fluid Dynamics Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 5, pp. 876–880. Pleiades Publishing, Ltd., 2017. Original Russian Text published in Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki, 2017, vol. 57, no. 5, pp. 876–880. DOI**:** 10.1134/S0965542517050098

Статья поступила в редакцию 22.01.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Овсянников В.М. Вибратор Ландау — Лифшица в уравнениях газовой динамики. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 4.
http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1739

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики FAPM–2017», посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 октября 2017 г.

Овсянников Владислав Михайлович окончил Московский физико-технический институт и его аспирантуру. Д-р техн. наук, профессор. До 1991 г. работал в промышленности. В настоящее время — преподаватель Московской государственной академии водного транспорта — филиала Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова и Ноябрьского института нефти и газа — филиала Тюменского индустриального университета. Область научных интересов: радиационная газовая динамика, течение двухфазных смесей, автоколебания. e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru

Landau — Lifshits vibrator in the equations of gas dynamics

Moscow State Academy of Water Transport — Branch of Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Moscow, 117105, Russia
Noyabrsk Institute of Oil and Gas — branch of Tyumen Industrial University, Noyabrsk, 629802, Tyumen Region, Yamal-Nenets Autonomous area, Russia

The problem of explaining the causes of turbulence excited L.D. Landau back in the 1940s. Much later, after the presentation of the famous method of the acoustic analogy of M.J. Lighthill, in the textbook "Hydrodynamics" by L.D. Landau and E.M. Lifshits (1988) members responsible for the formation of periodic waves against a background of steady laminar flow appeared in a complete nonstationary system of equations of gas dynamics. They were the convective terms of the equation of motion. Convective terms, as the source of the oscillations appearance, attracted attention of A.S. Predvoditelev, who introduced the coefficient 1-β to the equation of motion to describe turbulence. In the article it became possible to represent the inhomogeneous terms of the wave equation arising from the convective terms, through second-order Jacobians of the velocity vector, previously given by Euler in the equation of continuity. The inhomogeneous part of the wave equation for the velocity vector having derived by L.D. Landau and E.M. Lifshits, transformed to the sum of second-order Jacobians, makes it possible to specify the velocity fields of the hydrodynamic flows calculated earlier, to obtain an estimate of the generation intensity of periodic waves produced by a stationary flow. L.D. Landau and E.M. Lifshitz established that when using the M.J. Lighthill method of acoustic analogy the convective terms of the gas dynamics equation of motion penetrate into the inhomogeneous part of the wave equation, which corresponds to the generation of sound and self-oscillations not associated with external influences on the flow. The wave equation which they derived from the system of gas dynamics equations without involving extraneous relations can have the same solution as the indicated system of equations. This inhomogeneous wave equation can be regarded as a vibrator building-up both its analytical solution and the solution of problems of gas flow around bodies by numerical methods.

Keywords: *convective terms of the equation of motion, self-excited oscillations, inhomogeneous wave equation, acoustic analogy method*

REFERENCES

[1] Landau L.D. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki AN SSSR — Journal of Technical Physics USSR AS*, 1944, vol. XIV, p. 240.
[2] Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 736 p.
[3] Lighthill M.J. *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences*, 1952, no. 211, 1954, no. 222.
[4] Ovsyannikov V.M. *Volnoobrazovanie i konechno-raznostnoe uravnenie nerazryvnosti Leonarda Eylera* [Wave formation and the finite-difference continuity equation of Leonhard Euler]. Moscow, Sputnik+ Publ., 2017, 487 p.
[5] Ovsyannikov V.M. Istoriya vyvoda uravneniya nerazryvnosti [The history of the equation of continuity derivation]. *Sbornik dokladov XI vserossiyskogo sezda po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Kazan, 20–24 avgusta 2015 g.* [Proceedings of the XI All-Russian congress on the fun-

damental problems of theoretical and applied mechanics. Kazan, August 20–24, 2015]. Kazan, 2015, pp. 2823–2824.

[6] Godunov S.K. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 16 p.

[7] Ovsyannikov V.M. *Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Ser. Estestvennye nauki — Bulletin of the Moscow City Pedagogical University. Ser. Natural Sciences*, 2016, no. 4 (24), pp. 51–59.

[8] Chetverushkin B.N. *Kineticheskie skhemy i kvazigazodinamicheskaya sistema uravneniy* [Kinetic schemes and quasi-gas-dynamic system of equations]. Moscow, MAKS Press Publ., 2004, 332 p.

[9] Elizarova T.G. *Kvazigazodinamicheskie uravneniya i metody rascheta vyazkikh techeniy* [Quasi-gasdynamic equations and methods for analysis of viscous flows]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 2007, 352 p.

[10] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki* [Regularized equations of hydrodynamics]. Tver, Tver State University Publ., 2016, 222 p.

[11] Ovsyannikov V.M. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 5, pp. 876–880. Pleiades Publishing, Ltd. [In Russian: Ovsyannikov V.M. *Vychislitelnaya Matematika i Matematicheskaya Fizika*, 2017, vol. 57, no. 5, pp. 876–880. DOI: 10.1134/S0965542517050098].

Ovsyannikov V.M. graduated from Moscow Institute of Physics and Technology, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Moscow State Academy of Water Transport — Branch of Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping and Noyabrsk Institute of Oil and Gas — Branch of Tyumen Industrial University. Research interests: radiation gasdynamics, flow of two-phase mixtures, self-excited oscillations.
e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru