УДК 532.51 DOI: 10.18698/2308-6033-2018-3-1738

Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах

© Ю.И. Димитриенко, И.О. Богданов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена математическая модель многомасштабного процесса фильтрации слабосжимаемых жидкостей в периодических пористых средах. Поскольку достаточно грубым методом оценки параметров пористой среды со сложной внутренней геометрией являются расчетные модели фильтрации, основанные на законе Дарси, часто использующие экспериментальные данные о проницаемости пористой среды или приближенные эмпирические соотношения для параметров локальных течений в порах, нами на основе метода асимптотического осреднения сформулированы и представлены трехмерные локальные задачи. Это стационарные задачи о течении некоторой фиктивной линейно-вязкой несжимаемой среды. Показана зависимость их результатов и решений от внутренней геометрии пор. Выполнено осреднение локальных уравнений, на основании чего получена глобальная задача неустановившейся фильтрации слабосжимаемых жидкостей.

Ключевые слова: *фильтрация, пористые среды, метод асимптотического осреднения, метод конечных элементов*

Введение. Раздел гидродинамики, посвященный исследованию движения жидкостей и газов через пористые среды [1], называется теорией фильтрации. Пористые среды очень широко распространены и отличаются большим разнообразием как в естественных, так и в искусственных материалах. Поэтому изучение процессов фильтрации занимает важное место в биологии, гидрологии, гидродинамике, а также в машиностроении, производстве композиционных материалов [2–6] и др. Практический интерес представляет многомасштабное моделирование процесса фильтрации, под которым подразумевается исследование движения фаз в отдельных порах и пористой среде в целом. Отсюда к задачам первого рода относят локальные, к задачам второго рода — глобальные (или макроскопические). Глобальные задачи переноса, в основе которых лежит закон Дарси, описывающий медленные течения жидкостей в пористых средах, достаточно подробно освещены в отечественной и зарубежной литературе [7, 8]. Вопросы двухфазной фильтрации рассмотрены в работах [9, 10]. Для описания фильтрации вязкой жидкости через пористую среду использован закон Бринкмана [11].

Однако классические подходы чаще всего обоснованы экспериментальным определением коэффициентов проницаемости пористой среды, учтенных законом Дарси, или использованием различных эмпирических соотношений для описания локальных процессов переноса. В результате получаются довольно грубые оценки реальных процессов, происходящих внутри пор со сложной геометрией, что приводит к существенным отклонениям при определении проницаемости. Таким образом, важной частью исследования фильтрации является анализ локальных процессов переноса для отдельно взятой поры.

В настоящей статье в продолжение исследования процессов фильтрации, начатого в работах [12–16], рассматривается моделирование фильтрации слабосжимаемых жидкостей в пористой среде.

Цель работы — разработка численного метода расчета характеристик пористой среды (пористости и коэффициентов проницаемости) на основе анализа микропроцессов в пределах отдельной поры.

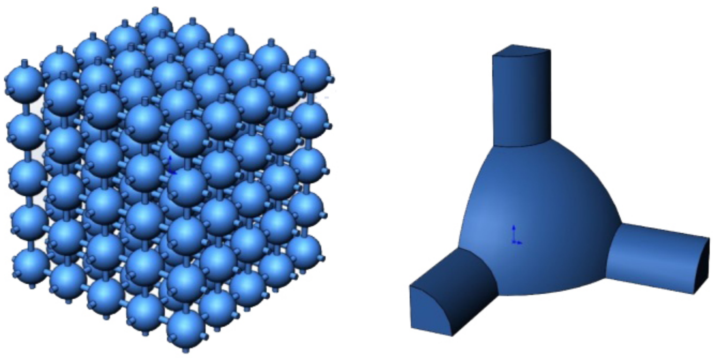
В работе поставлены три задачи:

1) формулировка общей проблемы фильтрации слабосжимаемой жидкости в недеформируемой пористой среде на основе системы уравнений Стокса;

2) применение метода асимптотического осреднения для постановки локальных задач, описывающих процессы фильтрации в пределах отдельной поры;

3) выведение осредненных локальных уравнений, закона фильтрации Дарси и соотношений для расчета характеристик пористой среды (пористости и коэффициента проницаемости).

Принятые допущения и геометрическая модель расчетной области. Принято, что жидкость представляет собой изотропную линейно-вязкую слабосжимаемую среду. Процесс фильтрации считается изотермическим, плотность массовых сил полагается равной нулю.



а *б*

Рис. 1. Геометрическая модель расчетной области:
а — периодическая пористая структура; *б* — 1/8 ячейки периодичности

Рассмотрим модель пористой среды (рис. 1). Предполагается, что пористая структура характеризуется периодичностью, отличается отсутствием тупиковых пор, ячейки периодичности геометрически и физически симметричны относительно координатных плоскостей местной декартовой системы координат.

Воспользуемся следующими обозначениями: V_{ξ} — ячейка периодичности; V_{ξ_p} — одна пора; $\Sigma_{\xi_{sp}}$ — граница поры с твердым телом.

Исходная постановка задачи фильтрации слабосжимаемой жидкости в пористой среде. Рассмотрим медленное движение слабосжимаемой жидкости в пористой среде, описываемое системой уравнений [17]:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v_i \right) = 0, \ \ \tilde{x}_i \in V, \\
&2)\ -\nabla_i p + \left(\lambda' + \mu' \right) \nabla_i \nabla_j v_j + \mu' \nabla_j \nabla_j v_i = 0, \ \ \tilde{x}_i \in V, \\
&3)\ p = p_0 + \tilde{K} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right), \\
&4)\ v_i = 0, \ \ \tilde{x}_i \in \Sigma_{sl}, \\
&5)\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $K = \dfrac{\tilde{K}}{\hat{p}}$ — безразмерный модуль объемного сжатия, безразмерные коэффициенты вязкости имеют вид

$$
\lambda' = \kappa^2 \lambda^0 = \frac{\lambda \hat{v}}{\hat{L} \hat{p}};
$$

$$
\mu' = \kappa^2 \mu^0 = \frac{\mu \hat{v}}{\hat{L} \hat{p}} = \frac{1}{\mathrm{Eu}\,\mathrm{Re}},
$$

где λ^0, μ^0 — главные части безразмерных вязкостей, имеющие порядок O(1); λ, μ — размерные вязкости, $\text{Па} \cdot \text{с}$; $\mathrm{Eu} = \dfrac{\hat{p}}{\hat{\rho} \hat{v}^2}$ — число Эйлера; $\mathrm{Re} = \dfrac{\hat{\rho} \hat{v} \hat{L}}{\mu}$ — число Рейнольдса; κ — малый параметр, рассматриваемый ниже.

Введены безразмерные функции:

$$
x_i = \frac{\tilde{x}_i}{\hat{L}}, \ \ \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\hat{\rho}}, \ \ p = \frac{\tilde{p}}{\hat{p}}, \ \ v_i = \frac{\tilde{v}_i}{\hat{v}}, \ \ \tilde{t} = \frac{t}{\hat{t}}, \ \ \hat{t} = \frac{\hat{L}}{\hat{v}}, \tag{2}
$$

где $\hat{L}$ — характерный размер всей области среды, м; $\hat{\rho}$ — характерная плотность, кг/м^3; $\hat{p}$ — характерное давление, Па; $\hat{v}$ — модуль вектора характерной скорости, м/с; символ ~ обозначает соответствующие размерные функции.

Уравнение состояния жидкости (уравнение 3) в системе (1)) получено на основе уравнения сжимаемости, предложенного М. Маскетом [8]:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 e^{\tilde{\beta}(\tilde{p} - \tilde{p}_0)}, \tag{3}$$

где $\tilde{\rho}_0$ — плотность жидкости в начальный момент времени, кг/м^3; $\tilde{\beta}$ — коэффициент сжимаемости, Па$^{-1}$; $\tilde{p}_0$ — гидростатическая часть давления в жидкости (неизвестная величина), отвечающая за изменение давления без изменения плотности жидкости, Па.

На практике часто не учитывают степени $\tilde{\beta}$ выше первой при разложении в ряд Тейлора выражения (3), полагая, что

$$\tilde{\rho}_l \approx \tilde{\rho}_{0l} + \tilde{\beta}\tilde{\rho}_{0l}\left(\tilde{p}_l - \tilde{p}_{0l}\right). \tag{4}$$

Выражая давление через плотность в соотношении (4), получаем искомое уравнение состояния для жидкой фазы:

$$\tilde{p}_l = \tilde{p}_{0l} + \tilde{K}\left(\frac{\tilde{\rho}_l}{\tilde{\rho}_{0l}} - 1\right), \tag{5}$$

где $\tilde{K} = \dfrac{1}{\tilde{\beta}}$ — модуль объемного сжатия, Па.

Наличие второго порядка малости в коэффициентах вязкости μ' и λ' является допущением задачи и физически обосновывается малой вязкостью рассматриваемой жидкости.

Система уравнений (1) содержит неизвестные функции p, ρ и v_i и является незамкнутой. Доопределим систему следующим образом: представим неизвестные функции в аддитивном виде:

$$p = p_0 + p_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad v_i = v_{0i} + v_{1i}, \tag{6}$$

где ρ_0 и p_0 определены выше.

Подставим выражения (6) в систему (1) и разобьем ее на две отдельные системы:

$$\begin{aligned} &\nabla_i v_{0i} = 0, \quad \tilde{x}_i \in V, \\ &-\nabla_i p_0 + (\lambda' + \mu')\nabla_i \nabla_j v_{0j} + \mu' \nabla_j \nabla_j v_{0i} = 0, \quad \tilde{x}_i \in V, \\ &v_{0i} = 0, \quad \tilde{x}_i \in \Sigma_{sl} \end{aligned} \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} &\rho_{1t} + \nabla_i (\rho_0 v_{1i} + \rho_1 v_{0i} + \rho_1 v_{1i}) = 0, \quad \tilde{x}_i \in V, \\ &-\nabla_i p_1 + (\lambda' + \mu')\nabla_i \nabla_j v_{1j} + \mu' \nabla_j \nabla_j v_{1i} = 0, \quad \tilde{x}_i \in V, \\ &p_1 = \frac{\tilde{K}}{\rho_0}\rho_1, \\ &v_{1i} = 0, \quad \tilde{x}_i \in \Sigma_{sl}. \end{aligned} \tag{8}$$

Если выполняются системы (7) и (8), то автоматически выполняется и исходная система (1). Системы (7) и (8) являются замкнутыми: система (7) представляет собой постановку задачи о медленном движении несжимаемой жидкости относительно функций p_0, v_{0i}, а система (8) — относительно функций p_1, v_{1i}, в ней функции p_0, v_{0i} рассматриваются как входные данные.

Основные положения метода асимптотического осреднения. Суть метода асимптотического осреднения (МАО) состоит в следующем [18, 19]. Пусть $\hat{l}$ — линейный размер ячейки периодичности V_ξ среды. В рамках МАО вводятся малый параметр $\kappa = \dfrac{\hat{l}}{\hat{L}} << 1$ и два типа безразмерных координат: глобальные $\tilde{x}_i = \dfrac{x_i}{\hat{L}}$ и локальные $\xi_i = \dfrac{x_i}{\hat{l}} = \dfrac{\tilde{x}_i}{\kappa}$. В этом случае все функции (обозначим их Θ), описывающие течение газа или жидкости в порах, можно считать квазипериодическими, т. е. зависящими от локальных ξ_i и глобальных $\tilde{x}_i$ координат и времени t:

$$\Theta = \Theta(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t), \ \tilde{\mathbf{x}} \in V, \ \boldsymbol{\xi} \in V_\xi.$$

Тогда дифференцирование* этих функций осуществляется с помощью следующего правила:

* Знаки «,» и «/» в нижних индексах здесь и далее обозначают дифференцирование соответственно по глобальным и локальным координатам.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}_i} \to \frac{1}{\kappa}\Theta_{/i} + \Theta_{,i}, \tag{9}$$

где $\Theta_{/i} = \partial\Theta/\partial\xi_i$ и $\Theta_{,i} = \dfrac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}_i}$.

Условие квазипериодичности заключается в том, что функции Θ медленно изменяются по аргументу $\tilde{x}_i$ на расстояниях порядка $\hat{L}$ и являются периодическими относительно аргумента ξ_j, т. е.

$$\begin{gathered}
\Theta\left(\xi_1 - \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) = \Theta\left(\xi_1 + \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right), \\
\Theta\left(\xi_1, \xi_2 - \frac{1}{2}, \xi_3\right) = \Theta\left(\xi_1, \xi_2 + \frac{1}{2}, \xi_3\right), \\
\Theta\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 - \frac{1}{2}\right) = \Theta\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 + \frac{1}{2}\right).
\end{gathered} \tag{10}$$

Далее для соотношений (10) воспользуемся обозначением $[\![\Theta]\!] = 0$.

В рамках МАО вводится операция осреднения функций по области $V_{\xi p}$:

$$\langle \Theta \rangle = \frac{1}{\varphi}\int_{V_{\xi p}} \Theta dV, \tag{11}$$

где $\varphi = \int_{V_{\xi p}} dV$ — пористость среды.

Тогда, осредняя функции p_q, ρ_q, v_{qi}, получаем

$$\langle \rho_q v_{qi} \rangle = \overline{\rho_q v_{qi}}; \quad \langle \rho_q \rangle = \bar{\rho}_q; \quad \langle p_q \rangle = \bar{p}_q; \quad q = 0,1, \tag{12}$$

где $\bar{\rho}_q$, $\bar{v}_{qi}$, $\bar{p}_q$ — средние значения функций.

Соотношения (12) следует понимать как дополнительные условия, предъявляемые к локальным параметрам течения в одной поре $V_{\xi p}$, либо как обозначения для вычисленных осредненных функций.

Постановка локальных задач фильтрации на ячейке периодичности. В соответствии с общей концепцией МАО решим системы (7) и (8) в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра κ, которые соответственно имеют вид

$$\begin{gathered}
v_{0i}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t) = v_{0i}^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t) + \kappa v_{0i}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t) + \mathrm{O}(\kappa^2), \\
p_0(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t) = p_0^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t) + \kappa p_0^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t) + \mathrm{O}(\kappa^2)
\end{gathered} \tag{13}$$

и

$$\begin{aligned} v_{1i}\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right) &= v_{1i}^{(0)}\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right)+\kappa v_{1i}^{(1)}\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right)+\mathrm{O}(\kappa^2),\\ \rho_1\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right) &= \rho_1^{(0)}\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right)+\kappa\rho_1^{(1)}\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right)+\mathrm{O}(\kappa^2),\\ p_1\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right) &= p_1^{(0)}\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right)+\kappa p_1^{(1)}\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right)+\mathrm{O}(\kappa^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя разложения (13) в уравнения (7), с учетом правила дифференцирования квазипериодических функций (9) и соотношений (11), (12) получаем локальную задачу нулевого уровня:

$$v_{0i/i}^{(0)}=0, \tag{15}$$

$$p_{0/i}^{(0)}=0, \tag{16}$$

$$v_{0i}^{(0)}\Big|_{\Sigma_{\xi sl}}=0, \tag{17}$$

$$\left\langle p_0^{(0)}\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right)\right\rangle=\overline{p}_0, \tag{18}$$

и локальную задачу первого уровня:

$$v_{0i,i}^{(0)}+v_{0i/i}^{(1)}=0, \tag{19}$$

$$-p_{0,i}^{(0)}-p_{0/i}^{(1)}+\left(\lambda_l^0+\mu_l^0\right)v_{0\,j/ij}^{(0)}+\mu_l^0 v_{0\,i/jj}^{(0)}=0, \tag{20}$$

$$v_{0i}^{(1)}\Big|_{\Sigma_{\xi sl}}=0, \tag{21}$$

$$\left\langle p_0^{(1)}\left(\tilde{\mathbf{x}},\xi,t\right)\right\rangle=0. \tag{22}$$

Из уравнения (16) получаем, что $p_0^{(0)}$ не зависит от локальных координат ξ_i:

$$p_0^{(0)}=p_0^{(0)}\left(\tilde{\mathbf{x}}\right). \tag{23}$$

Тогда, присоединяя к уравнению неразрывности (15) и граничному условию в равенстве (17) уравнение равновесия жидкости (20), условие осреднения (22) и условия периодичности, получаем локальную задачу на ячейке периодичности для несжимаемой жидкости в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} & v_{0\,i/\mathrm{i}}^{(0)}=0,\\ & -p_{0,\,i}^{(0)}-p_{0/i}^{(1)}+\left(\lambda_l^0+\mu_l^0\right)v_{0\,j/ij}^{(0)}+\mu_l^0 v_{0\,i/jj}^{(0)}=0,\\ & \left\langle p_0^{(1)}\right\rangle=0,\quad \left[\!\left[v_{0\,i}^{(0)}\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[p_0^{(1)}\right]\!\right]=0,\\ & v_{0i}^{(0)}\Big|_{\Sigma_{\xi sl}}=0. \end{aligned} \tag{24}$$

Неизвестными в этой системе являются функции $v_{0i}^{(0)}$, $p_0^{(1)}$, а градиент давления $p_{0,i}^{(0)}$ рассматривается как один из входных данных.

Подставляя разложения (14) в уравнения (8), с учетом правила дифференцирования квазипериодических функций (9) и соотношений (11), (12) получаем локальную задачу нулевого уровня:

$$\left(\rho_0 v_{1i}^{(0)} + \rho_1^{(0)} v_{0i}^{(0)} + \rho_1^{(0)} v_{1i}^{(0)}\right)_{/i} = 0, \tag{25}$$

$$p_{1/i}^{(0)} = 0, \tag{26}$$

$$p_1^{(0)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(0)}, \tag{27}$$

$$v_{1i}^{(0)}\Big|_{\Sigma_{\xi sl}} = 0, \tag{28}$$

$$\left\langle p_1^{(0)}\left(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right)\right\rangle = \bar{p}_1, \tag{29}$$

и локальную задачу первого уровня:

$$\begin{gathered}\rho_{1t}^{(0)} + \left(\rho_0 v_{1i}^{(0)} + \rho_1^{(0)}\left(v_{0i}^{(0)} + v_{1i}^{(0)}\right)\right)_{,i} + \\ + \left(\rho_0 v_{1i}^{(1)} + \rho_1^{(1)}\left(v_{0i}^{(0)} + v_{1i}^{(0)}\right) + \rho_1^{(0)}\left(v_{0i}^{(1)} + v_{1i}^{(1)}\right)\right)_{/i} = 0,\end{gathered} \tag{30}$$

$$-p_{1,i}^{(0)} - p_{1/i}^{(1)} + \left(\lambda_l^0 + \mu_l^0\right) v_{1\,j/ij}^{(0)} + \mu_l^0 v_{1\,i/jj}^{(0)} = 0, \tag{31}$$

$$p_1^{(1)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(1)}, \tag{32}$$

$$v_{1i}^{(1)}\Big|_{\Sigma_{\xi sl}} = 0, \tag{33}$$

$$\left\langle p_1^{(1)}\left(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right)\right\rangle = 0. \tag{34}$$

Из уравнения (26) получаем, что $p_1^{(0)}$ не зависит от локальных координат ξ_i:

$$p_1^{(0)} = p_1^{(0)}\left(\tilde{\mathbf{x}}\right). \tag{35}$$

Следовательно, и $\rho_1^{(0)}$ не зависит от ξ_i. Тогда, присоединяя к уравнению неразрывности (25) и граничному условию (28) уравнение равновесия жидкости (31), уравнение состояния (32), условие осреднения (29) и условия периодичности

$$\left[\!\left[v_{1i}^{(0)} \right]\!\right] = 0, \quad \left[\!\left[p_1^{(1)} \right]\!\right] = 0, \tag{36}$$

после преобразований получаем локальную задачу на ячейке периодичности для несжимаемой жидкости в нулевом приближении:

$$
\begin{aligned}
& v_{1\,i/i}^{(0)}=0, \\
& -p_{0,i}^{(0)}-p_{0/i}^{(1)}+\left(\lambda_l^0+\mu_l^0\right) v_{0\,j/ij}^{(0)}+\mu_l^0 v_{0\,i/jj}^{(0)}=0, \\
& p_1^{(1)}=\frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(1)}, \ \left\langle p_1^{(1)}\right\rangle=0, \ \left[\!\left[v_{1i}^{(0)}\right]\!\right]=0, \ \left[\!\left[p_1^{(1)}\right]\!\right]=0, \\
& \left.v_{1i}^{(0)}\right|_{\Sigma_{\xi sl}}=0 .
\end{aligned} \tag{37}
$$

Из систем (24) и (37) видно, что данные задачи в точности формально совпадают и поиск их решения может осуществляться в одинаковом виде. Поэтому индексы 0 и 1 далее опускаем.

Постановка локальных задач фильтрации с учетом трехмерной структуры пор. Рассмотрим далее трехмерную пористую структуру, у которой течение среды осуществляется вдоль одной из трех осей $O\xi_i$. Для решения локальных задач воспользуемся методом разделения переменных. В этом случае вследствие линейности задач (24) и (37) решаем их в виде линейных функций от входных данных, т. е. $p_{,i}^{(0)}$:

$$
p^{(1)}(\mathbf{x},\xi)=-\sum_{\alpha=1}^{3} P^{(\alpha)}(\xi)\, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad v_i^{(0)}(\mathbf{x},\xi)=-\frac{1}{\mu^0}\sum_{\alpha=1}^{3} W_i^{(\alpha)}(\xi)\, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}), \tag{38}
$$

где введены функции $P^{(\alpha)}(\xi)$ и $W_i^{(\alpha)}(\xi)$, зависящие только от локальных координат ξ.

Подставив выражения (38) в локальные задачи (24) и (37), после исключения градиента $p_{,i}^{(0)}$ получаем набор локальных задач для определения функций $P^{(\alpha)}(\xi)$ и $W_i^{(\alpha)}(\xi)$, которые не содержат констант, описывающих физические свойства жидкостей, и не зависят от входных данных:

$$
\begin{cases}
W_{i\,/i}^{(\alpha)}=0, \\
P_{/i}^{(\alpha)}-W_{i\,/jj}^{(\alpha)}=\delta_i^{(\alpha)}, \quad \xi_i \in V_{\xi_l}; \\
W_i^{(\alpha)}=0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sl}; \\
\left\langle P^{(\alpha)}\right\rangle=0, \quad \left[\!\left[W_i^{(\alpha)}\right]\!\right]=0, \quad \left[\!\left[P^{(\alpha)}\right]\!\right]=0.
\end{cases} \tag{39}
$$

Здесь введены функции, позволяющие учитывать вырожденный случай пористой системы, когда сквозные капилляры по одному из координатных направлений отсутствуют:

$$\delta_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq \alpha \text{ или при } i = \alpha \;\; P_{,\alpha}^{(0)} = 0, \\ 1 \text{ при } i = \alpha \text{ и } P_{,\alpha}^{(0)} \neq 0. \end{cases}$$

Далее каждую из локальных задач фильтрации (39) обозначим $L^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,3}$.

Из анализа системы (39) можно сделать некоторые выводы. Каждая из задач $L^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,3}$ представляет собой стационарную задачу течения некоторой фиктивной линейно-вязкой несжимаемой среды. Решение задач зависит только от внутренней геометрии пор, поэтому их постановка применима для расчетов фильтрации любых жидкостей в рамках сделанных ранее допущений.

Рассматриваемые задачи обладают некоторыми особенностями. Во-первых, поскольку функция $p^{(1)}$ в выражениях (13) и (14) представляет собой пульсацию давления p по отношению к среднему значению $\overline{p}$, так как

$$\kappa p^{(1)} = p - p^{(0)} + \mathrm{O}\left(\kappa^2\right), \quad \left\langle p^{(0)} \right\rangle = \overline{p}, \quad \left\langle p^{(1)} \right\rangle = 0,$$

то функция $p^{(1)}$ может быть как положительной, так и отрицательной. Во-вторых, наличие условия $\left\langle p^{(1)} \right\rangle = 0$ делает задачу интегро-дифференциальной, что наряду с условиями периодичности в значительной мере отличает ее от классической задачи Стокса.

Однако решение задач можно упростить, если воспользоваться следующей теоремой о продолжении решения, которая является аналогом теоремы из работы [20].

Пусть ячейка периодичности $V_{\xi p}$ 3D-структуры имеет зеркальную симметрию относительно координатных плоскостей $O\xi_1\xi_2$, $O\xi_1\xi_3$, $O\xi_2\xi_3$. Тогда решение $P^{(\alpha)}$, $W_i^{(\alpha)}$ задач (39) можно получить с помощью симметричного или антисимметричного продолжения функций $\tilde{P}^{(\alpha)}$, $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, определенных в 1/8 ячейки периодичности $\tilde{V}_{\xi p}$ (в первом квадранте $\left\{\xi_i : 0 \le \xi_i \le 1/2\right\}$) (рис. 2) и являющихся решениями следующих задач:

$$\begin{cases} \tilde{W}_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ \tilde{P}_{/i}^{(\alpha)} - \tilde{W}_{i/jj}^{(\alpha)} = \delta_i^{(\alpha)}, \; \xi_i \in V_\xi; \\ \tilde{W}_i^{(\alpha)} = 0, \; \xi_i \in \Sigma_{\xi sl}. \end{cases} \tag{40}$$

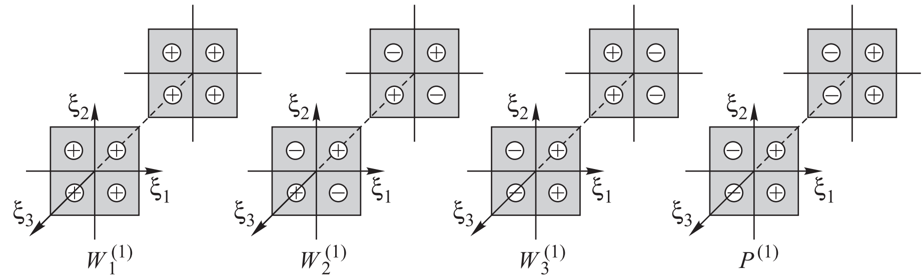


Рис. 2. Изменение знаков функций при симметричном или антисимметричном продолжении для локальной задачи $L^{(1)}$

Используя принцип симметричного и антисимметричного продолжения решения системы (40), можно записать граничные условия на граничных плоскостях 1/8 ячейки периодичности $\tilde{V}_{\xi p}$, удовлетворяющие условиям периодичности системы (39):

$$\xi_\beta = 0;\ \xi_\beta = \frac{1}{2}: \begin{cases} \tilde{W}_\gamma^{(\alpha)}\left(\delta_{\alpha\beta}+\delta_{\beta\gamma}-2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\right)+\dfrac{\partial \tilde{W}_\gamma^{(\alpha)}}{\partial \xi_\beta}\left[1-\left(\delta_{\alpha\beta}+\delta_{\beta\gamma}-2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\right)\right]=0, \\ \tilde{P}^{(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}+\dfrac{\partial \tilde{P}^{(\alpha)}}{\partial \xi_\beta}\left(1-\delta_{\alpha\beta}\right)=0;\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{1,3}. \end{cases} \tag{41}$$

Вывод закона фильтрации Дарси. Запишем второе из выражений (38) в виде

$$\rho^{(0)} v_i^{(0)} = -\rho^{(0)} W_i^{(j)} p_{,j}^{(0)} \tag{42}$$

и проведем его осреднение:

$$\left\langle \rho^{(0)} v_i^{(0)} \right\rangle = -\left\langle \rho^{(0)} W_i^{(j)} p_{,j}^{(0)} \right\rangle.$$

Учитывая (23), (35), придем к закону фильтрации Дарси [3]:

$$\overline{v}_i = -\frac{K_i^j}{\mu^0}\,\overline{p}_{,j}, \tag{43}$$

где $\overline{v}_i = \left\langle v_i^{(0)} \right\rangle$ — макроскопическая скорость течения (фильтрации).

Здесь введены компоненты тензора проницаемости пористой среды:

$$K_i^j = \left\langle W_i^{(j)} \right\rangle. \tag{44}$$

Поскольку функции $W_{\beta}^{(\alpha)}$ для $\alpha \neq \beta$ являются антисимметричными (см. рис. 2), то матрица $\mathbf{K} = \left(K_i^j\right)$ является диагональной. Если $K_1^1 = K_2^2 = K_3^3 = K$, то пористая среда изотропная, в противном случае — анизотропная. Соотношение (44) позволяет вычислить безразмерные коэффициенты проницаемости K_i^j только на основе данных о геометрии отдельно взятой поры вследствие отсутствия зависимости компонент скорости $W_i^{(j)}$ от физических свойств среды, текущей по пористой системе.

Вывод уравнений фильтрации слабосжимаемой жидкости в гомогенизированной области. Запишем локальное уравнение неразрывности первого уровня (19) в векторной форме:

$$\nabla_x \cdot \mathbf{v}_0^{(0)} + \nabla_\xi \cdot \mathbf{v}_0^{(1)} = 0. \tag{45}$$

Применяя оператор осреднения (11) к уравнению (45), с учетом того, что для всякой периодической функции $\left\langle \nabla_\xi \Theta \right\rangle = 0,$ получаем осредненное уравнение неразрывности несжимаемой жидкости

$$\nabla_x \cdot \overline{\mathbf{v}}_0 = 0, \tag{46}$$

где $\overline{\mathbf{v}}_0 = \left\langle \mathbf{v}_0^{(0)} \right\rangle$ — среднее значение скорости несжимаемой части жидкости.

Подставляя в равенство (46) соотношение (43), получаем уравнение

$$\nabla_x \cdot \left(\mathbf{K} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \overline{p}_0 \right) = 0. \tag{47}$$

Аналогично запишем уравнение неразрывности первого уровня (30) в векторной форме:

$$\begin{gathered}\rho_{1t}^{(0)} + \nabla_x \cdot \left(\rho_0 \mathbf{v}_1^{(0)} + \rho_1^{(0)} \left(\mathbf{v}_0^{(0)} + \mathbf{v}_1^{(0)} \right) \right) + \\ + \nabla_\xi \cdot \left(\rho_0^{(0)} \mathbf{v}_1^{(1)} + \rho_0^{(1)} \mathbf{v}_1^{(0)} + \rho_1^{(1)} \left(\mathbf{v}_0^{(0)} + \mathbf{v}_1^{(0)} \right) + \rho_1^{(0)} \left(\mathbf{v}_0^{(1)} + \mathbf{v}_1^{(1)} \right) \right) = 0.\end{gathered} \tag{48}$$

Применяя оператор осреднения (11) к уравнению (48), с учетом того, что для всякой периодической функции $\left\langle \nabla_\xi \Theta \right\rangle = 0,$ получаем осредненное уравнение неразрывности сжимаемой части жидкости

$$\varphi \overline{\rho}_{1t} + \rho_0 \nabla_x \cdot \overline{\mathbf{v}}_1 + \nabla_x \cdot \left(\overline{\rho}_1 \left(\overline{\mathbf{v}}_0 + \overline{\mathbf{v}}_1 \right) \right) = 0, \tag{49}$$

Где $\varphi = \langle 1 \rangle$ — пористость; $\overline{\mathbf{v}}_1 = \left\langle \mathbf{v}_1^{(0)} \right\rangle$ — среднее значение скорости сжимаемой части жидкости.

С учетом равенства (46) это уравнение можно записать в виде

$$\varphi \overline{\rho}_{1t} + \nabla_x \cdot \left(\left(\rho_0 + \overline{\rho}_1 \right) \overline{\mathbf{v}}_1 \right) + \overline{\mathbf{v}}_0 \cdot \nabla_x \overline{\rho}_1 = 0. \tag{50}$$

Подставляя в уравнение (50) равенство (43), получаем искомое уравнение для вычисления давления $\overline{p}_1$:

$$\varphi \overline{\rho}_{1t} = \nabla_x \cdot \left(\left(\rho_0 + \overline{\rho}_1 \right) \mathbf{K} \cdot \nabla_x \overline{p}_1 \right) + \left(\mathbf{K} \cdot \nabla_x \overline{p}_0 \right) \cdot \nabla_x \overline{\rho}_1 . \tag{51}$$

Результаты решения локальной задачи фильтрации. Проведены численное решение локальной задачи (40) и расчет коэффициентов проницаемости (44) изотропной пористой среды на основе метода конечных элементов [21]. Использован 6-узловой тетраэдр с тремя степенями свободы по скоростям в каждом узле и с одной степенью свободы по давлению в вершинах. Решение глобальной системы линейных алгебраических уравнений проведено на основе стабилизированного метода бисопряженных градиентов (BiCGStab) с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Численное моделирование локальных процессов переноса проводилось на примере поры с безразмерным радиусом сферической части 0,3 и радиусом цилиндрической части 0,05 для случая течения вдоль оси ξ_1 (задача $L^{(1)}$). Количество конечных элементов составило 42 159 (63 297 узлов). Минимальные и максимальные значения безразмерных пульсации давления и компонент представлены в таблице, соответствующие поля — на рис. 3, 4. Пористость для данного случая составила 0,123, безразмерный коэффициент проницаемости оказался равным 0,000295079.

Значения давления и компонент скорости в пористой структуре для задачи $L^{(1)}$

Параметр	Значения	
	минимальное	максимальное
$\tilde{P}^{(1)}$	0	0,409
$\tilde{W}_1^{(1)}, \ \cdot 10^{-3}$	0	3,139
$\tilde{W}_2^{(1)}, \ \cdot 10^{-4}$	– 4,696	2,834
$\tilde{W}_3^{(1)}, \ \cdot 10^{-4}$	– 4,806	1,902

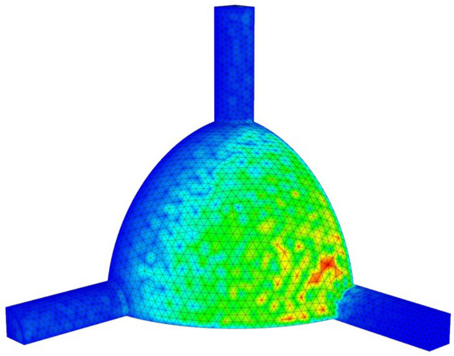
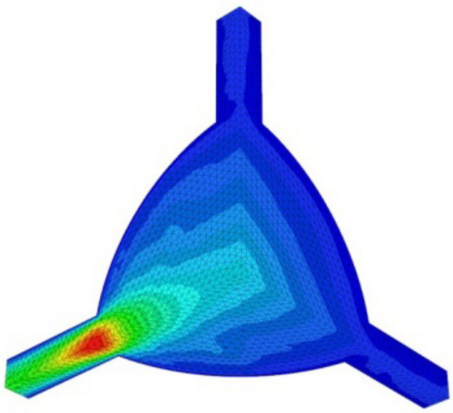
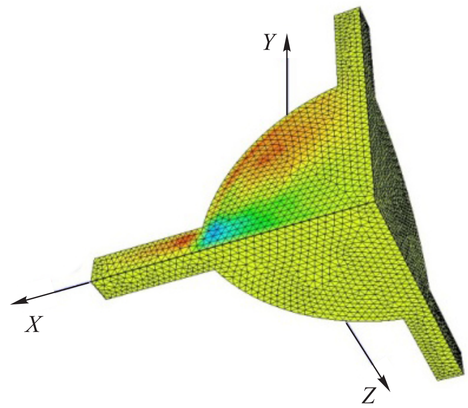


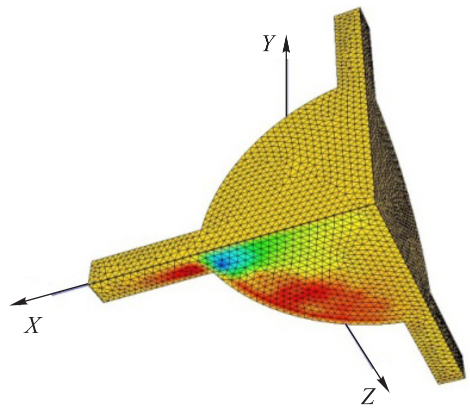
Рис. 3. Распределение давления $\tilde{P}^{(1)}$, полученное в результате решения локальной задачи фильтрации $L^{(1)}$



а



б



в

Рис. 4. Распределение компонент скорости, полученное в результате решения локальной задачи фильтрации $L^{(1)}$:

а — $\tilde{W}_1^{(1)}$; *б* — $\tilde{W}_2^{(1)}$; *в* — $\tilde{W}_3^{(1)}$

Заключение. Предложенная методика позволяет вычислять распределения микрополей давления и компонент скорости фильтрации в пределах отдельной поры, а также проводить численный расчет основных параметров пористой среды (пористости и коэффициентов проницаемости) без проведения каких-либо дополнительных эмпирических исследований. Для этого на основе метода асимптотического осреднения получены локальные задачи переноса в пределах отдельно взятой поры в общей трехмерной постановке, которые решены на основе метода конечных элементов. Показано, что решение локальных задач не зависит от природы жидкости, текущей по пористой системе, и определяется исключительно геометрической формой поры. Это позволяет использовать рассмотренные в работе локальные формулировки для расчетов фильтрации любых газов и жидкостей при геометрии пор с учетом введенных в работе допущений, а полученные в ходе их решения характеристики пористой среды могут быть использованы непосредственно в макроскопических уравнениях фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Coutelieris F.A., Delgado J.M.P.Q. *Transport Processes in Porous Media*. Berlin, Springer-Verlag, 2012, 236 p.

[2] Chen X., Zhang Y., Yan S. Two-dimensional simulations of resin flow in dual-scale fibrous porous medium under constant pressure. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2013, vol. 32 (22), pp. 1757–1766.

[3] Gantois R., Cantarel A., Dusserre G., Felices J.N., Schmidt F. Mold filling simulation of resin transfer molding combining BEM and level set method. *Applied Mechanics and Materials*, 2011, vol. 62, pp. 57–65.

[4] Loudad R., Saouab A., Beauchene P., Agogue R., Desjoyeaux B. Numerical modeling of vacuum-assisted resin transfer molding using multilayer approach. *Journal of Composite Materials,* 2017, vol. 51 (24), pp. 3441–3452.

[5] Song Y.S. Mathematical analysis of resin flow through fibrous porous media. *Applied Composite Materials*, 2006, vol. 13 (5), pp. 335–343.

[6] Yang B., Tang Q., Wang S., Jin T., Bi F. Three-dimensional numerical simulation of the filling stage in resin infusion process. *Journal of Composite Materials*, 2016, vol. 50 (29), pp. 4171–4186.

[7] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. *Движение жидкостей и газов в природных пластах*. Москва, Недра, 1984, 211 с.

[8] Маскет М. *Течение однородных жидкостей в пористой среде*. Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004, 628 с.

[9] Диль Д.О., Бубенчиков А.М. Двухфазная фильтрация в анизотропном пространстве. *Вестник Томского государственного университета*, 2013, № 6 (26), с. 70–78.

[10] Евстигнеев Д.С., Савченко А.В. Моделирование двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой гидрофильной среде. *Интерэкспо Гео-Сибирь*, 2015, т. 2, № 3, с. 64–69.

[11] Бодунов Н.М., Бреховских П.В. Фильтрация вязкой жидкости через пористую среду с использованием закона Бринкмана. *Сб. докл. Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Новые технологии, материалы*

и оборудование российской авиакосмической отрасли» (АКТО-2016). В 2 т. Казань, 10–12 августа 2016 г. Казань, Академия наук Республики Татарстан, 2016, т. 1, с. 643–649.

[12] Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации жидкого связующего в композитных конструкциях, изготавливаемых методом RTM. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 2, с. 3–27.

[13] Димитриенко Ю.И., Захарова Ю.В., Богданов И.О. Математическое и численное моделирование процесса фильтрации связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления. *Университетский научный журнал*, 2016, № 19, с. 33–43.

[14] Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Галицын А.А. Конечно-элементное моделирование локальных газодинамических процессов в трехмерных пористых структурах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, спец. вып. «Математическое моделирование», с. 50–65.

[15] Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Математическое и численное моделирование газодинамических процессов в композиционном материале при отверждении. *Тр. Междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения акад. Г.И. Марчука*, *«Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики»*, *Новосибирск, 19–23 окт. 2015 г.* Новосибирск, Абвей, 2015, с. 224–229.

[16] Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование процесса многоуровневой фильтрации жидкого связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 12 (48). DOI: 10.18698/2308-6033-2015-12-1454

[17] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 559 с.

[18] Беляев А.Ю. *Усреднение в задачах теории фильтрации*. Москва, Наука, 2004, 200 с.

[19] Димитриенко Ю.И. *Механика композиционных материалов при высоких температурах*. Москва, Машиностроение, 1997, 368 с.

[20] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. *Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 66 с.

[21] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method. Its Basis and Fundamentals.* Seventh Edition. Oxford, Butterworth-Heinemann Publisher, 2013, 756 p.

Статья поступила в редакцию 26.12.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 3. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-3-1738

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики FAPM-2017», посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 октября 2017 г.

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук Российской Федерации. Автор более 350 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Богданов Илья Олегович — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 10 научных работ в области механики композитов и теории фильтрации. e-mail: biofamily_7394@mail.ru

Multiscale modeling filtration processes in porous media

© Yu.I. Dimitrienko, I.O. Bogdanov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers a mathematical model for the multiscale process of filtration of weakly compressible liquids in periodic porous media. Computational filtration models based on the Darcy law present rule of thumb test for estimating the parameters of porous medium with a complex internal geometry. These models often use experimental data on the permeability of porous medium or approximate empirical relationships for the parameters of local flows in pores. That is why three-dimensional local problems using the method of asymptotic averaging are formulated and presented here. These are stationary problems about the flow of some fictitious linearly viscous incompressible medium. The dependence of their results and solutions on the internal pore geometry is shown. Averaging of the local equations is performed, being the basis for obtaining the global problem of unsteady filtration of weakly compressible liquids.

Keywords: *filtration, porous media, asymptotic averaging method, finite element method*

REFERENCES

[1] Coutelieris F.A., Delgado J.M.P.Q. *Transport Processes in Porous Media*. Berlin, Springer-Verlag, 2012, 236 p.

[2] Chen X., Zhang Y., Yan S. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2013, vol. 32 (22), pp. 1757–1766.

[3] Gantois R., Cantarel A., Dusserre G., Felices J.N., Schmidt F. *Applied Mechanics and Materials*, 2011, vol. 62, pp. 57–65.

[4] Loudad R., Saouab A., Beauchene P., Agogue R., Desjoyeaux B. *Journal of Composite Materials*, 2017, vol. 51 (24), pp. 3441–3452.

[5] Song Y.S. *Applied Composite Materials*, 2006, vol. 13 (5), pp. 335–343.

[6] Yang B., Tang Q., Wang S., Jin T., Bi F. *Journal of Composite Materials*, 2016, vol. 50 (29), pp. 4171–4186.

[7] Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizgenie zhidkostey i gazov v prirodnykh plastakh* [Movement of liquids and gases in natural seams]. Moscow, Nedra Publ., 1984, 211 p.

[8] Masket M. *The flow of homogeneous fluids through porous media.* New York, London, McGraw-Hill Publ., 1937, 763 p. [In Russ.: Masket M. Techenie odnorodnykh zhidkostey v poristoy srede. Moscow, Izhevsk, Institut kompyuternykh issledovaniy Publ., 2004, 628 p.].

[9] Dil D.O., Bubenchikov A.M. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta — Tomsk State University Journal*, 2013, no. 6 (26), pp. 70–78.

[10] Evstigneev D.S., Savchenko A.V. *Interexpo Geo-Sibir — Interexpo GEO-Siberia*, 2015, vol. 2, no. 3, pp. 64–69.

[11] Bodunov N.M., Brekhovskikh P.V. Filtratsiya vyazkoy zhidkosti cherez poristuyu sredy s ispolzovaniem zakona Brinkmana [Filtration of a viscous liquid through a porous medium using the Brinkman law]. *Sbornik dokladov Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem “Novye tekhnologii. Materialy i oborudovanie rossiyskoy aviakosmicheskoy otrasli”. Kazan, 10–12 avgusta 2016 g.* V dvukh tomakh. Tom 1 [Proceedings of the “All-Russian scientific conference with international participation “New technologies. Materials and equipment for the Russian aviation and aerospace

industry”. Kazan, August 10–12, 2016. In 2 volumes. Vol. 1]. Kazan, Akademiya nauk Respubliki Tatarstan Publ., 2016, pp. 643–649.

[12] Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no. 2, pp. 3–27.

[13] Dimitrienko Yu.I., Zakharova Yu.V., Bogdanov I.O. *Universitetskiy nauchnyy zhurnal — Humanities and Science University Journal*, 2016, no. 19, pp. 33–43.

[14] Dimitrienko Yu.I., Levina A.I., Galitsyn A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2011, special issue “Mathematical Modeling”, pp. 50–65.

[15] Dimitrienko Yu.I., Shpakova Yu.V., Bogdanov I.O., Sborshchikov S.V. Matematicheskoe i chislennoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov v kompozitsionnom materiael pri otverzhdenii [Mathematical and numerical modeling of gas-dynamic processes in a composite material during curing]. *Trudy Mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy 90-letiyu so dnya rozhdeniya akademika G.I. Marchuka “Aktualnye problemy vychislitelnoy i prikladnoy matematiki”. Novosibirsk, 19-23 oktyabrya 2015 g.* [Proceedings of the International conference dedicated to the 90th anniversary of academician G.I. Marchuk “Morden problems of computational mathematics and mathematical modeling”. Novosibirsk, October 19–23, 2015].

[16] Dimitrienko Yu.I., Shpakova Yu.V., Bogdanov I.O., Sborshchikov S.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, no. 12 (48). DOI: 10.18698/2308-6033-2015-12-1454

[17] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnykh sred* [Continuum mechanics. In 4 volumes. Vol. 2. Universal laws of continuous medium mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 559 p.

[18] Belyaev A.Yu. *Usrednenie v zadachakh teorii filtratsii* [Averaging in problems of the theory of filtration]. Moscow, Nauka Publ., 2004, 200 p.

[19] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompositsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of composite materials at high temperatures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1997, 368 p.

[20] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Metod konechnykh elementov dlya resheniya lokalnykh zadach mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [The finite element method for solving local problems in the mechanics of composite materials]. Moscow, BMSTU Publ., 2010, 66 p.

[21] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method. Its Basis and Fundamentals:* Seventh Edition. Oxford, Butterworth-Heinemann Publ., 2013, 756 p.

Dimitrienko Yu.I., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Head of the Scientific and Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Development of Software Complexes, Bauman Moscow State Technical University, member of the Academy of Engineering Sciences of the Russian Federation. Author of over 350 research papers in the field of continuum mechanics, computational mechanics, gas dynamics, mechanics and thermomechanics of composites, mathematical modeling in the science of materials. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Bogdanov I.O., post-graduate student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of 10 research papers in the field of mechanics of composites and theory of filtration. e-mail: biofamily_7394@mail.ru