УДК 531.01, 629.195.1 DOI: 10.18698/2308-6033-2018-2-1734

# Аналитическая модель гравитационного потенциала системы Земля — Луна в виде общего решения ньютоновой задачи трех тел

© Д.Л. Абраров

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Москва, 119333, Россия

*Приведена математическая модель гравитационного потенциала системы Земля — Луна, позволяющая аналитически рассчитывать оптимальные траектории космических аппаратов в этой небесно-механической системе. Данная модель представляет каноническое кватернионное обобщение классической математической модели Аксенова — Гребеникова — Демина гравитационного потенциала Земли. Показано, что предлагаемая модель также реализует полное разделение переменных в гамильтониане классической ньютоновой задачи трех тел и соответствует ее аналитической разрешимости — неожиданному с классической точки зрения факту. Таким образом, получаемые формулы точного общего решения задачи трех тел моделируют эквипотенциальные поверхности гравитационного потенциала системы Земля — Луна. Эквипотенциальные линии, в частности, моделируют орбиты космических аппаратов в системе Земля — Луна. Оптимальное управление космическими аппаратами математически моделируется соответствующим изменением параметров общего решения ньютоновой задачи трех тел. Показано, что такие параметрические деформации геометрически соответствуют изометриям аналитического комплексного трехмерного пространства Лобачевского.*

***Ключевые слова:*** *гравитационный потенциал, система Земля — Луна, оптимальные спутниковые орбиты, ньютонова задача трех тел, точная аналитическая разрешимость, L-функции эллиптических кривых*

**Введение.** Максимально точное математическое моделирование гравитационного поля в системе Земля — Луна повышает надежность оптимального управления динамикой космических аппаратов (КА) и прогнозирование их орбитальной динамики. Это актуально при создании программного обеспечения как для собственной стабилизации КА, так и для определения его оптимальной орбиты, например, в контексте [1–4].

Таким образом, постановка задачи состоит в том, чтобы построить достаточно точную и простую математическую модель гравитационного потенциала системы Земля — Луна.

В качестве базовой верифицирующей математической модели в данной работе рассматривается весьма точная математическая модель гравитационного потенциала Земли, предложенная Е.П. Аксеновым, Е.А. Гребениковым и В.Г. Деминым (АГД-модель). Указанная модель состоит в представлении гравитационного поля Земли фазовой динамикой системы двух неподвижных чисто мнимых центров, расположенных на чисто мнимом расстоянии на комплексной плоскости [5–9].

Предлагаемая ниже модель строится на основе расширения АГД-модели гравитационного потенциала Земли и по сути представляет собой точный кватернионный аналог АГД-модели — КАГД-модель: гравитационный потенциал системы Земля — Луна моделируется двумя аналитически сопряженными чисто мнимыми кватернионами, расположенными на чисто мнимом кватернионном расстоянии.

Нетривиальный и парадоксальный факт состоит в том, что фазовая динамика КАГД-модели эквивалентна фазовой динамике классической ньютоновой задачи трех тел (НЗТТ). Указанная эквивалентность основана на учете скрытых, конструктивно описываемых ниже симметрий отображения обратимости по времени уравнений НЗТТ. При этом фазовая динамика НЗТТ оказывается аналитически точно разрешимой в рамках классической теории дифференциальных уравнений.

Таким образом, НЗТТ приобретает смысл задачи, имеющей непосредственные приложения к актуальным задачам космической баллистики.

Отметим, что поправки в предлагаемую аналитическую кватернионную модель гравитационного потенциала системы Земля — Луна можно вносить на основании более полного учета факторов вращательной (спиновой) нестабильности в рассматриваемой небесно-механической системе [10].

**Аналитическая разрешимость НЗТТ -— аналитическая часть модели КАГД.** Рассматривается классическая НЗТТ в общей постановке [11] с точки зрения существования конструктивной геометрической и соответствующей ей аналитической моделей ее фазового потока. В итоге оказывается, что такая модель не только существует, но и является каноническим кватернионным обобщением модели АДГ. Ключевым следствием существования такой модели для НЗТТ оказывается неожиданный с классической «неинтегрируемой» точки зрения [11–14] нетривиальный факт точной аналитической разрешимости описывающих ее дифференциальных уравнений в новом классе трансцендентных аналитических функций, представляющих ее общее решение, или, как говорят, решение «в конечном виде». Возникающие аналитические функции обобщают функции, используемые в настоящее время в данной области, и имеют весьма специальный «асимптотический резонансный» вид, базирующийся на всем множестве простых чисел [15–19].

Ключевое утверждение, содержащее необходимую для его формулировки информацию [15], состоит в следующем.

**Теорема 1.** Фазовый поток $g_{3b}^{s}$ дифференциальных уравнений ньютоновой задачи трех тел представляется геодезическим потоком $Isom\,\Lambda_{\mathbb{C}}^{3}$ на специальном расширении комплексного трехмерного пространства Лобачевского $\Lambda_{\mathbb{C}}^{3}$ и имеет конструктивный вид

$$g_{3b}^{s} = e^{L(s,E/\mathbb{Q})} \cong Isom\,\Lambda_{\mathbb{C}}^{3}.$$

Здесь $E/\mathbb{Q}$ принадлежит множеству эллиптических кривых над полем $\mathbb{Q}$; пространство $\Lambda_{\mathbb{C}}^{3}$ представляет собой «стандартное функциональное пространство Лобачевского» и определятся как евклидово пространство $\mathbb{E}^{3}$ со специальной проективной связностью (см. далее теоремы 4–6); векторно-значные функции $e^{L(s,E/\mathbb{Q})}$ являются аналитическими функциями комплексной переменной $s$; функции $L(s,E/\mathbb{Q})$ представляют собой функции Хассе — Вейля, определяемые формулой

$$L(s,E/\mathbb{Q}) = \prod_{p\ is\ good} (1 - a_p p^{-s} + p p^{-2s})^{-1} \prod_{p\ is\ bad} \left(1 - a_p p^{-s}\right),$$

$$s \in \mathbb{C},\ Re\,s > 3/2,$$

а коэффициенты функций $L(s,E/\mathbb{Q})$ удовлетворяют следующим условиям [15]:

- $a_p = p + 1 - N_p$, если кривая $E/\mathbb{Q}$ имеет хорошую редукцию в $p$; смысл $a_p$ состоит в том, что это коэффициент групповой инцидентности, реализуемый отображением обратимости по времени уравнений НЗТТ, ограниченным на поле $\mathbb{F}_p$;
- $p$ пробегает множество всех простых чисел;
- $N_p$ обозначает число не совпадающих решений уравнения $x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$ в $\mathbb{C}P(\mathbb{F}_p)$, $\mathbb{F}_p$ — поле из $p$ элементов;
- $1 + a_p =$ {число решений уравнения $x^2 + a_1 x - a_2 = 0$ в поле $\mathbb{F}_p$}, если кривая $E/\mathbb{Q}$ имеет плохую редукцию в $p$; соответствующие определения «хорошей и плохой редукции» для кривой $E/\mathbb{Q}$ приведены ниже.

**Необходимые определения, связанные с кривыми $E/\mathbb{Q}$.** Приведем эти определения [15].

1. Эллиптическая кривая $E/\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{Q}$ задается уравнением в аффинной форме (обобщенной форме Вейерштрасса) $y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$, где $x, y \in \mathbb{C}$ и все $a_i \in \mathbb{Q}$.

2. Дискриминант кривой $E/\mathbb{Q}$ имеет вид

$$\Delta\left(E/\mathbb{Q}\right)=9b_2b_4b_6-b_2^2b_8-8b_4^3-27b_6^2,$$

где

$$b_2=a_1^2+4a_2,$$

$$b_4=2a_4+a_1a_2,$$

$$b_6=a_3^2+4a_6,$$

$$b_8=a_1^2a_6+4a_2a_6-a_1a_6-a_1a_3a_4-a_2a_3^2-a_4^2.$$

3. Невырожденность кривой $E/\mathbb{Q}$ определяется условием $\Delta\left(E/\mathbb{Q}\right)\neq 0$.

4. Редукция кривой $E/\mathbb{Q}$ по модулю простого числа $p$ («редукция в $p$»), обозначаемая $\widetilde{E/\mathbb{Q}}$, является кривой над $\mathbb{Q}$, определяемой уравнением

$$y^2+\widetilde{a_1}xy+\widetilde{a_3}y=x^3+\widetilde{a_2}x^2+\widetilde{a_4}x+\widetilde{a_6},$$

(тильда означает редукцию по модулю $p$).

5. Кривая $E/\mathbb{Q}$ имеет *хорошую* редукцию в $p$, если кривая $\widetilde{E/\mathbb{Q}}$ не сингулярна (гладкая).

6. Кривая $E/\mathbb{Q}$ имеет *плохую* редукцию в $p$, если кривая $\widetilde{E/Q}$ сингулярна. Такие «плохие» простые числа $p$ в точности являются простыми делителями (дивизорами) дискриминанта $\Delta\left(E/\mathbb{Q}\right)$.

7. Кривая $E/\mathbb{Q}$ при плохой редукции в $p$ допускает единственную сингулярную точку с координатами в поле $\mathbb{F}_p$ из $p$ элементов.

Всегда можно выполнить такую линейную замену координат, что точка с координатами (0,0) станет такой сингулярной точкой при редукции кривой $E/\mathbb{Q}$ по модулю всех «плохих $p$». Такая замена не меняет соответствующего уравнения и приводит к равенству $a_3, a_4, a_6 = 0\left(mod\ p\right)$ для всех «плохих простых $p$».

Если при этом касательные к кривой $E/\mathbb{Q}$ в точке (0,0) совпадают, то имеет место сравнение

$$x^2+\ a_1x-a_2=0\left(mod\ p\right).$$

8. Эллиптическая кривая $E/\mathbb{Q}$ имеет следующую проективную форму представления в двумерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^2$:

$$y^2w + a_1xyw + a_3yw^2 = x^3 + a_2x^2w + a_4xw^2 + a_6w^3,$$

где все $a_i \in Q$.

9. Единственной точкой этой кривой на бесконечно удаленной прямой $w = 0$ является точка $(x, y, w) = (0,1,0)$. Эта точка неособая, и она является точкой перегиба, причем касательная к ней совпадает с бесконечно удаленной прямой.

10. Точка $(x, y, w) = (0,1,0)$ имеет смысл нейтрального элемента группового закона на кривой $E/\mathbb{Q}$.

**Смысл функций $e^{L(s,\ E/\mathbb{Q})}$ — нетеровы интегралы НЗТТ в обратимом времени.** Объяснение этого факта на качественном уровне состоит в следующем. Общее решение НЗТТ получается как аналитическое продолжение классических решений НЗТТ посредством перехода от «классического формального времени» к обратимому времени «над *s*».

При этом известные классические частные решения НЗТТ представляются тета-функциями «классического формального времени». В частности, таковыми являются представления тета-функциями, соответствующими решетке вида $\Gamma[1, i]$ на плоскости $\mathbb{C}$, и их тригонометрическими вырождениями (например, «треугольное» решение Лагранжа в НЗТТ). Такие тета-функции параметризуют абелевы многообразия небольших родов над полем $\mathbb{C}$. Соответствующие классические решения, инвариантно аналитически продолженные в $s = \infty$ (т. е. в силу исходных уравнений) параметризуют абелевы многообразия, инвариантно двойственные исходным «классическим» абелевым многообразиям над полем $\mathbb{C}$.

Важно то, что образ классической решетки $\Gamma[1, i]$ на пополненной плоскости $\mathbb{C} \cup \infty$, генерирующий такую параметризацию, оказывается специальной 3d-решеткой. Ее двумерная подрешетка, как множество, соответствует чисто мнимой решетке $\Gamma[i_*, i^*]$ — решетке с чисто мнимым базисом $\{i_*, i^*\}$ из двойственных мнимых единиц, корректно определяемой как диагональ коммутативных групп:

$$\Gamma[i_*,\ i^*] \cong Diag(\Gamma[1,i], \Gamma[i,1]),$$

представляющих окружность $\mathbb{S}^1$ как большой круг касательного и нормального расслоений к стандартной сфере $\mathbb{S}^2$ соответственно.

Дополнительной, третьей «скрытой размерности» решетки $\Gamma[i_*, i^*]$ соответствует единственная групповая структура на $\Gamma[i_*, i^*]$, канонически определенная (как оказывается) уже над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а не только над полем $\mathbb{C}$. Эта групповая структура $G$ представляет операцию в линейном пространстве базисных циклов корректно определенного фактор-пространства $(\mathbb{C} \cup \infty)/\Gamma\left[i_*, i^*\right]$, эквивалентного пространству упорядоченных сдвигов решетки $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$. Поэтому решетка $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ имеет смысл модулярной решетки.

Чрезвычайно обстоятельством является эквивалентность отображений $G \cong \mathbb{Z}_2\left[t \to t^{-1}\right]$, где $\mathbb{Z}_2\left[t \to t^{-1}\right]$ означает отображение инволюции обратимости по времени уравнений НЗТТ; подразумевается, что символом $t^{-1}$ обозначено обращение элемента $t \in \mathbb{R}$ как по операции сложения, так и по операции умножения в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Таким образом, *поле* $\mathbb{Q}$ *появляется как каноническая область определения* указанного инвариантного аналитического продолжения классических решеток (классических решений) до модулярной решетки $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ посредством инволюции $\mathbb{Z}_2\left[t \to t^{-1}\right]$.

Функции $L(s, E/\mathbb{Q})$ для всего множества кривых $E/\mathbb{Q}$ представляют полное пространство отображений канонических групповых сдвигов модулярной решетки $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ — ее сдвигов на упорядоченные векторы из канонически двойственной решетки, узлы которой представляют собой упорядоченные центры исходной решетки $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$. Эти сдвиги имеют смысл *инвариантных непрерывных глобальных* нетеровых сдвигов — нетеровых симметрий, определенных над $\mathbb{C} \cup \infty$.

Другими словами, функции $L(s, E/\mathbb{Q})$ представляют канонические координаты на области определения отображения изоморфизма $I$ (двойственности $I$) бигрупповых решеток

$$I \cong \left\{\Gamma[i_+, i_\times]_* \cong \Gamma[i_+, i_\times]^*\right\},$$

где $i_+, i_\times$ — генераторы зеркальной (аддитивной, четной) и поворотной (мультипликативной, нечетной) независимых групповых симметрий модулярной решетки $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ соответственно. Отметим, что отображение изоморфизма $I$ имеет каноническую (диагональную) групповую структуру.

Далее будет установлена *эквивалентность этой чисто мнимой конформной модели с чисто вещественной евклидовой моделью* отображения платоновой двойственности 4d-многогранников.

Функции $e^{L(s,E/\mathbb{Q})}$ представляют канонические координаты на всем пространстве отображений производных групповых сдвигов модулярной решетки $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ — пространстве отображений, имеющем вид

$$Aut\,\Gamma\left[i_*, i^*\right] \cong \left\{\Gamma[i_+, i_\times]_* \to \Gamma[i_+, i_\times]^* \to \Gamma[i_+, i_\times]_*\right\}.$$

Эти производные модулярные сдвиги имеют смысл инвариантных *аналитических глобальных* нетеровых сдвигов.

Другими словами, функции $e^{L(s,E/\mathbb{Q})}$ как отображения представляют *область значений* отображения изоморфизма $I$. Генератор общего группового сдвига решетки $Aut\,\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ над полем $\mathbb{C}$ представляет каноническое разложение аналитического расширения классического тела кватернионов $\mathbb{H}$ на сопряженные чисто мнимые аналитические кватернионные полупространства и соответствующее генераторное разложение имеет вид:

$$\mathrm{Gener}\left(Aut\,\Gamma\left[i_*, i^*\right]\right) \cong \left[i, j, k\right]_+ \oplus \left[i, j, k\right]_-.$$

Здесь

- $1 i, j, k$ — базис тела кватернионов $\mathbb{H}$;
- $[i, j, k]_+$ и $[i, j, k]_-$ — канонически сопряженные чисто мнимые базисные кватернионы;
- $\oplus \cong 1_{\mathbb{H}}\left(mod\,G\right)$, где $\oplus$ — каноническая $\mathbb{C}$-аналитическая групповая операция, соответствующая канонической групповой операции $G$ на модулярной решетке $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$. При этом имеется их каноническое соответствие с генераторами групповых канонических проекций модулярной решетки $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ — решеток $\Gamma[i_+, i_\times]_*$ и $\Gamma[i_+, i_\times]^*$:

$$[i, j, k]_+ = \Gamma[i_+, i_\times]_*([\, i_+, i_\times \,, i_{diag,*}\,]); \quad [i, j, k]_- = \Gamma[i_+, i_\times]^*\;([\, i_+, i_*, i^*_{diag}\,]),$$

где $i_{diag,*}, i^*_{diag}$ — правая и левая части отображения изоморфизма $I$.

**Связь общего решения НЗТТ с «аналитическим продолжением».** Важно отметить, что на фактор-поверхности $\left(\mathbb{C} \cup \infty\right)/\,\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ функции $e^{L(s,\,E/\mathbb{Q})}$ не имеют особенностей и являются однозначными функциями по построению. Таким образом, отображение «модулярной» решеточной перенормировки $\left(\Gamma\left[1, i\right] \to \Gamma\left[i_*, i^*\right]\right)$, эквивалентное пренормировке обратимым временем, представляет каноническое НЗТТ-инвариантное аналитическое продолжение функций $L(s,E/\mathbb{Q})$, имеющих особенности в точках $s=0,1$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и, более того, на ее НЗТТ-инвариантное пополнение $\mathbb{C}[s]\cup\infty$, являющееся компактным множеством.

Важную роль здесь играет корректно определяемая каноническая геометрическая модель фактор-поверхности $(\mathbb{C}\cup\infty)/\Gamma[i_*,i^*]$, имеющей смысл модулярной поверхности для фазовых траекторий НЗТТ. Эта модель оказывается «стандартным функциональным пространством Лобачевского $\Lambda^3_{\mathbb{C}}$», представляющим универсальную риманову поверхность для аналитических функций $e^{L(s,\,E/\mathbb{Q})}$. Стандартное функциональное пространство Лобачевского $\Lambda^3_{\mathbb{C}}$ является канонически определяемым (см. далее теоремы 4–6) специальным расширением классического стандартного 3d-пространства Лобачевского [20].

Детализация связи функций $e^{L(s,E/\mathbb{Q})}$ как решений дифференциальных уравнений НЗТТ с инвариантным аналитическим продолжением их показателей — функций $L(s,E/\mathbb{Q})$ — на всю пополненную плоскость $\mathbb{C}[s]\cup\infty$ описывается следующим образом.

Имеющийся, индуцированный с $G$-инвариантной модулярной решетки $\Gamma[i_*,i^*]$, канонический групповой закон $G(mod\,E/\mathbb{Q})$ представляет собой «скрытый» групповой закон на коэффициентах $a_p$, входящих в формулу для функций $L(s,E/\mathbb{Q})$. При этом коэффициенты $a_p$ также геометрически представляют коэффициенты групповой инцидентности в вершинах подрешеток $\Gamma[i_*,i^*](mod\,E/\mathbb{Q})$ решетки $\Gamma[i_*,i^*]$. Тем самым, указанный групповой закон $G(mod\,E/\mathbb{Q})$ индуцирует отображение конструктивного аналитического продолжения функций $L(s,E/\mathbb{Q})$ на всю комплексную плоскость [21, 22]. Важно отметить, что такое отображение $G(mod\,E/\mathbb{Q})$-инвариантного аналитического продолжения удовлетворяет дифференциальным уравнениям НЗТТ.

В этом контексте *функции* $e^{L(s,E/\mathbb{Q})}$ *имеют смысл инвариантных глобальных L-функций Хассе — Вейля*: они определены на глобальной инвариантной компактной области определения $\mathbb{C}\cup\infty$ , являющейся $G$-инвариантной компактификацией плоскости $\mathbb{C}$.

**Связь общего решения НЗТТ с КАМ-теорией.** Коэффициенты $a_p$ в формуле общего решения НЗТТ представляют классы инвариантного (в силу дифференциальных уравнений НЗТТ) аналитического продолжения малых знаменателей КАМ-теории [11] в $s=\infty$. Другими словами, числа $a_p$ имеют смысл малых знаменателей из КАМ-теории в топологии обратимого времени.

**Связь общего решения НЗТТ с классическими эффектами неинтегрируемости и хаосом.** Неинтегрируемость гамильтоновых систем в ее различных реализациях [11–14] и, в частности, эффекты неинтегрируемости НЗТТ соответству.т нецентральным сдвигам решетки $Aut\,\Gamma\left[i_*, i^*\right]$, т. е. неинвариантным сдвигам — сдвигам, не учитывающим свойство обратимости по времени уравнений НЗТТ. Расщеплению сепаратрис, рождению невырожденных периодических гиперболических движений и ветвлению решений в плоскости $\mathbb{C}$-времени отвечает иерархия «типов нецентральности» сдвигов решетки $Aut\,\Gamma\left[i_*, i^*\right]$- нецентральности относительно центров и флага диагоналей фундаментальной области решетки $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ соответственно.

Хаос, ассоциированный, например, с наличием таких «глобальных гиперболических структур», как странные аттракторы, соответствует *непрерывным инвариантным (центральным) сдвигам* модулярной решетки $Aut\,\Gamma\left[i_*, i^*\right]$, имеющим нетривиальную инвариантную топологию [17–19] («асимптотическую *G*-инвариантную адельную топологию») и по сути представляет собой «канонический непрерывный детерминизм».

При этом *аналитическим* $G$*-инвариантным (центральным) сдвигам* производной модулярной решетки $Aut\,\Gamma\left[i_*, i^*\right]$ соответствует уже аналитическая, но нетривиально (конечно-порожденным образом) детерминированная [15, 16] динамика фазового потока НЗТТ.

**Полнота общего решения НЗТТ и связь с системой Земля — Луна.** Сформулируем утверждение, показывающее полноту пространства решений уравнений НЗТТ, приведенных в теореме 1.

**Теорема 2.** Фазовый поток $g_{3b}^{s}$ ньютоновой задачи трех тел представляется групповым законом на универсальной эллиптической кривой $E^{univ}/\mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$, орбиты которого являются геодезическими стандартного функционального пространства Лобачевкого $\Lambda_{\mathbb{C}}^{3}$.

Другими словами, фазовый поток $g_{3b}^{s}$, как аналитическое отображение, представляется пространством модулярных параметризаций всех кривых $E/\mathbb{Q}$, аналитически продолженных в формальную бесконечность $s=\infty$ их области определения. Геометрически орбиты этих параметризаций представляются «большими» орициклами [20] (аналог «сферических больших кругов») на (гиперболическом) функциональном пространстве Лобачевского $\Lambda_{\mathbb{C}}^{3}$.

**Замечание.** Принципиальным фактом для соотнесения предлагаемой модели с классической теорией НЗТТ является то, что, как можно показать, «большие орициклы» на пространстве $\Lambda_{\mathbb{C}}^{3}$, обладающем «*G*-инвариантной адельной метрикой» [16], в точности являются классическими странными аттракторами относительно обычной метрики евклидова пространства $\mathbb{E}^{3}$.

**Теорема 3.** Функции $e^{L(s, E/\mathbb{Q})}$ представляют параметризацию фазовых траекторий в обратимом аналитическом времени над $s$ дифференциальных уравнений НЗТТ. Эти функции можно интерпретировать как полное пространство частных интегралов НЗТТ и как полное пространство совместных уровней классических интегралов уравнений НЗТТ.

Исходным образом модулярные параметризации кривых $E/\mathbb{Q}$ корректно определены в силу доказанной А. Вайлсом и другими авторами гипотезы Шимуры — Таниямы — Вейля о модулярности каждой кривой $E/\mathbb{Q}$ [23].

В рамках предлагаемой «кватернионной модели» они представляют каноническое отношение инцидентности для иерархии геометрических элементов («точка-прямая-плоскость-пространство») функционального пространства $\Lambda_{\mathbb{C}}^{3}$.

**Неклассические свойства «отбора параметров» НЗТТ, вытекающие из аналитической модели НЗТТ.** Из структуры решений уравнений НЗТТ вытекает, что, например, массы $m_1, m_2, m_3$ НЗТТ, как аналитической гамильтоновой системы не являются произвольными, а представляются конкретными числами — инвариантными функциональными аналитическими вычетами функций $e^{L(s, E/\mathbb{Q})}$, ассоциированными с точками $s = 0, 1, \infty$.

**Построение геометрической евклидовой модели фазового потока НЗТТ.** Суть простроения такой модели состоит в непосредственной координатизация отображения $\mathbb{Z}_2\left[t \to t^{-1}\right]$ инволюции обратимости по времени уравнений НЗТТ, обеспечивающей получение общего решения в виде функций $e^{L(s, E/\mathbb{Q})}$. На качественном уровне это означает, что каждый локальный множитель функции $L(s, E/\mathbb{Q})$ из формулы в теореме 1 представляет канонические групповые координаты на неприводимом генераторе отображения инволюции $\mathbb{Z}_2\left[t \to t^{-1}\right]$ обратимости по времени.

Функции $e^{L(s,E/\mathbb{Q})}$ представляют класс эквивалентности генераторов отображения инволюции $\mathbb{Z}_2[t \to t^{-1}]$.

Все множество функций $e^{L(s,E/\mathbb{Q})}$ представляет полное множество генераторов отображения инволюции $\mathbb{Z}_2[t \to t^{-1}]$.

Доказательства приведенных выше теорем 1–3 основаны на детальной структуризации отображения $\mathbb{Z}_2[t \to t^{-1}]$ и следуют из приведенных ниже лемм 1–3.

**Лемма 1.** Непрерывное отображение $\mathbb{Z}_2[t \to t^{-1}]$ непрерывно изоморфно отображению центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}/Z^3}$ трехмерной комплексной решетки $(\mathbb{E}^3/\mathbb{C})/Z^3$. Здесь

- $O$ — центр фиксированной неприводимой фундаментальной области решетки $(\mathbb{E}^3/\mathbb{C})/Z^3$ (далее — фундаментального куба);
- $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}/Z^3} \cong Z_O^{\mathbb{E}^3/C}\left((Sym, Rot)/(Sym \cong Rot)\right)$,
- $Sym$ — отображение центральной симметрии решетки $(\mathbb{E}^3/\mathbb{C})/Z^3$ относительно центра $O$;
- $Rot$ — отображение поворота на угол $\pi$ решетки $(\mathbb{E}^3/\mathbb{C})/Z^3$ относительно центра $O$;
- $Sym \cong Rot$ — отображение канонического изоморфизма симметрий $Sym$ и $Rot$.

Отображение центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}/Z^3} \cong$ $\cong Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\left((Sym, Rot)/(Sym \cong Rot)\right)$ является непрерывным отображением над $\mathbb{C}$.

Аналитическое отображение $\mathbb{Z}_2[t \to t^{-1}]$ аналитически изоморфно отображению аналитической центральной симметрии $\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}/Z^3}\right)^2$, где $\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}/Z^3}\right)^2 = Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\left((Sym, Rot)/(Sym \cong Rot)\right)^2$.

Отображение центральной симметрии $\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}/Z^3}\right)^2 =$ $= Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\left((Sym, Rot)/(Sym \cong Rot)\right)^2$ является аналитическим отображением над $\mathbb{C}$.

Доказательство леммы 1 объединяется с доказательством леммы 2 (первая часть содержится в конце доказательства леммы 2, вторая — в его начале).

Покажем, что классические интегралы НЗТТ в обратимом аналитическом времени, представляют полный набор интегралов в стандартном смысле.

**Классические интегралы НЗТТ как полный набор инвариантов старшего ранга аналитической центральной симметрии** $\left(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{O}}^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / \boldsymbol{Z}^3\right)^2$. Полнота такого набора отражается в следующем утверждении.

**Лемма 2.** Классические интегралы ньютоновой задачи трех тел представляются следующим инвариантным образом с помощью аналогов классических инвариантов линейной алгебры — отображений «следа, детерминанта и дискриминанта» соответственно:

$$Trace\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)^2 = H_{3b} = T_{3b} + U_{3b} \quad \text{— гамильтониан;}$$

$$Det\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)^2 = F_{3b} \quad \text{— интеграл площадей;}$$

$$Discr\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)^2 = G_{3b} \quad \text{— интеграл центра масс.}$$

**Доказательство.** Идея доказательства состоит в том, что корректно определяемые ниже функции $H_{3b}$, $F_{3b}$, $G_{3b}$ представляют канонические (полярные) координаты на фундаментальном кубе $K^2$ — неприводимой фундаментальной области симметрии $\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)^2$, совпадающие, в силу свойств «аналитичности и одинаковости ранга» (см. конец доказательства), с тремя классическими аналитическими инвариантами исходной задачи.

Покажем непрерывность и аналитичность соответствующих отображений центральной симметрии (см. лемму 1).

По определению фундаментального куба и симметрий $Sym, Rot$, имеется следующий изоморфизм:

$$Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\left((Sym, Rot)/(Sym \cong Rot)\right) \cong$$

$$\cong Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{E}^2/\mathbb{E}^1/\mathbb{C}}\left(K^2 / Sym\left(Diag\, K^2\right) \cong K^2 / Rot\left(Diag\, K^2\right)\right).$$

Симметрия

$$Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{E}^2/\mathbb{E}^1/\mathbb{C}}\left(K^2 / Sym\left(Diag\, K^2\right) \cong K^2 / Rot\left(Diag\, K^2\right)\right)$$

представляет симметрию подобия решетки $\mathbb{E}^3/\mathbb{C}/Z^3$ относительно куба $K^2$ с групповым непрерывным транзитивным действием отображения $Diag\,K^2$ (это операция, генерирующая его непрерывное центрально-подобное вращение куба $K^2$) и поэтому является непрерывной на $\mathbb{C}$.

Симметрия

$$\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{E}^2/\mathbb{E}^1/\mathbb{C}}\left(K^2 / Sym\left(Diag\,K^2\right) \cong K^2 / Rot\left(Diag\,K^2\right)\right)\right)^2$$

представляет симметрию подобия $\mathbb{E}^3 / \mathbb{C} / Z^3$ относительно $K^2$ с групповым аналитическим транзитивным действием $Diag\,K^2$ на $K^2$ и поэтому является аналитической на $\mathbb{C}$.

Перейдем непосредственно к вычислениям. Выполним их только для гамильтониана $H_{3b}$. Для остальных интегралов $F_{3b}$, $G_{3b}$ вычисления аналогичны.

Пусть $H_{3b}$, $T_{3b}$, $U_{3b}$ обозначают далее (для краткости) функции, которые действительно окажутся гамильтонианом, кинетической энергией и потенциалом НЗТТ соответственно.

Положим

$$H_{3b} = Trace\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\left(\left(Sym, Rot\right) / \left(Sym \cong Rot\right)\right)^2\right) =$$

$$= Trace\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{E}^2/\mathbb{E}^1/\mathbb{C}}\left(K^2 / Sym\left(Diag\,K^2\right) \cong K^2 / Rot\left(Diag\,K^2\right)\right)\right)^2,$$

где $Diag\,K^2$ — упорядоченное групповое множество главных диагоналей фундаментального куба $K^2$.

Тогда четная $\left(Sym / Rot\right)$ часть (слагаемое) функции $H_{3b}$ имеет вид

$$T_{3b} = Trace\ (Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{E}^2/\mathbb{E}^1/\mathbb{C}}\left(\left(Sym / Rot\right) / (Sym \cong Rot\ \right)\right)^2 =$$

$$= Trace\left(Sym\left(K^2 / Diag\,K^2\left(Sym \to Rot\right)\right)\right) =$$

$$= Trace\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{E}^2/\mathbb{E}^1/\mathbb{C}}\left(K^2\left(Вершины_* \to Ребра_* \to Грани_*\right)\right)\right),$$

где $(Вершины_* \to Ребра_* \to Грани_*)$ — элементы фундаментального куба $K^2$, упорядоченные групповой операцией $Sym \to Rot$ и упорядоченным отображением изоморфизма $Sym \cong Rot$.

Четная групповая операция $Sym \to Rot$ имеет скалярный вид:

$$«+» = Trace\left(Z_O^{E^3/\mathbb{C}}\left(Sym \cong Rot\right)^2\right) = Trace\left(Diag\,K^2\left(Sym \to Rot\right)\right),$$

где «+» — каноническая операционная фактор-координата на четной части бигрупповой $((Sym, Rot))$ и одновременно групповой диагонали $Diag\,K^2(Sym \to Rot)$.

Соответственно, нечетная $(Rot\,/\,Sym)$ часть функции $H_{3b}$ имеет вид

$$U_{3b} = Trace\Big(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{E}^2/\mathbb{E}^1/\mathbb{C}}\big((Rot\,/\,Sym)\,/\,(Sym \cong Rot)\big)^2\Big)U_{3b} =$$
$$= Trace\Big(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{E}^2/\mathbb{E}^1/\mathbb{C}}\big(Rot\,K^2\,/\,Diag\,K^2(Sym \to Rot)\big)\Big) =$$
$$= Trace\Big(Rot\big(K^2\,/\,Diag\,K^2(Sym \to Rot)\big)\Big) =$$
$$= Trace\Big(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\big(K^2\big(Вершины_* \to Ребра_* \to Грани_* \to$$
$$\to Грани^* \to Ребра^* \to Вершины^*\big)\big)\Big),$$

где $(Грани^* \to Ребра^* \to Вершины^*)$ — элементы фундаментального куба $K^2$, упорядоченные групповой операцией $Rot \to Sym \to Rot$ (двойственной к операции $Sym \to Rot$) упорядоченного изоморфизма $Sym \cong Rot$.

**Явное получение гамильтониана НЗТТ из геометрической евклидовой модели ее фазового потока.** Перейдем к координатизации скалярных $Trace$-инвариантов приведенных выше симметрий.

Пусть $m_i$ — канонические координаты на вершинах группового куба $K^2\,/\,Diag\,K^2(Sym \to Rot))$. Тогда

$$H_1 = Trace\Big(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\big(K^2\big(\mathbb{Z}_2 \to Вершины_* \to Ребра_*\big)\big)\Big) = \frac{1}{2}\sum_i m_i{}^*,$$

где $\mathbb{Z}_2$ = $\mathrm{generator}(Sym)$; «*» — каноническая операционная (мультипликативная) фактор-координата на нечетной части бигрупповой диагонали $Diag\,K^2(Sym \to Rot)$.

Пусть

- $i$ = {1, 2, 3} — индекс канонического (группового) упорядочения трехэлементного подмножества $Sym \to Rot$ в отображении изоморфизма $(Sym \cong Rot\,)^2$;
- $\vec{r}_i$ — канонические координаты на $i$-й паре противоположных граней куба $K^2\,/\,Diag\,K^2(Sym \to Rot)$;

- $\vec{v}_i$ — канонические координаты на $i$-й непрерывной групповой паре противоположных граней куба $K^2 / Diag\, K^2 (Sym \to Rot)$;
- $\vec{v}_i^2$ — канонические координаты на $i$-й аналитической групповой паре противоположных граней куба $K^2 / Diag\, K^2 (Sym \to Rot)$.

Тогда канонические аналитические групповые координаты на «вершинах-ребрах-гранях» группового фундаментального куба $K^2 / Diag\, K^2 (Sym \to Rot)$ имеют вид следа группового отображения:

$$T_{3b} = H_2 =$$

$$= Trace\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{E}^2/\mathbb{E}^1/\mathbb{C}}\left(K^2 \left(\mathbb{Z}_2 \to Вершины_* \to Ребра_* \to Грани_* \to\right)\right)\right)\times$$

$$\times\left(mod\left(H_1\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_i (m_i * \vec{v}_i^2 ),$$

где $\mathbb{Z}_2 =$ generator $(Sym)$; «$\to$» — символ группового отображения, транзитивного на геометрических элементах фундаментального куба.

Канонические аналитические групповые фактор-координаты на канонически двойственном кубе $K^2 / Diag\, K^2 (Rot \to Sym)$ $(Грани^* \to Ребра^* \to Вершины^*)$ по отношению к кубу $K^2 / Diag\, K^2 (Sym \to Rot)$ («инверсном кубе») имеют вид

$$H_3 = Trace(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\left(K^2 \left(\mathbb{Z}_2 \to Вершины_* \to Ребра_* \to\right.\right.$$

$$\left.\left.\to Грани_* \to Грани^* \to Ребра^*\right)\right)\left(mod\left(H_2\right)\right) = \sum_{i<j}\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^{*-1}.$$

И далее,

$$H_4 = Trace(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\left(K^2 \left(Вершины_* \to Ребра_* \to Грани_* \to\right.\right.$$

$$\left.\left.\to Грани^* \to Ребра^* \to Вершины^*\right)\right)\left(mod\left(H_3\right)\right) = \sum_{i<j} m_i m_j (*).$$

Теперь, «убирая» везде модули $mod\left(H_k\right)$, $k = 1, 2, 3, 4$, получаем

$$U_{3b} = \sum_{i<j} m_i m_j (*)\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^{*-1},$$

где

- $\{i,\ j,\ k\}$, где $1 \le i \ne j \ne k \le 3$ — мультииндекс канонического (группового) упорядочения элементов отображения «$Sym \to Rot \to Sym$» в отображении изоморфизма $(Sym \cong Rot)^2$;

- $\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^{*-1}$ — канонические групповые фактор-координаты на $k$-й паре противоположных граней в инверсном кубе $K^2 / Diag\, K^2 \left(Rot \to Sym\right)$;
- «$+ \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^{*-1} +$» — канонические групповые фактор-координаты на $k$-й паре противоположных граней с ее ребрами в инверсном кубе $K^2 / Diag\, K^2 \left(Rot \to Sym\right)$;
- «$+\ m_i m_j * \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^{*-1} +$» — канонические аналитические групповые фактор-координаты на $k$-й паре противоположных граней с ее ребрами и вершинами в инверсном кубе $K^2 / Diag\, K^2 \left(Rot \to Sym\right)$.

**Замечание.** Инверсный куб $K^2 / Diag\, K^2 \left(Rot \to Sym\right)$ имеет каноническую градуировку граней $mod\, \mathrm{gener}ator\left(Sym\right) = mod\, \mathbb{Z}_2$, т. е. является упорядоченным групповым объединением пар его противоположных граней.

Теперь, если обозачить через $s$ каноническая координату на $Diag\, K^2 \left(Rot \to Sym\right)$, то в силу

- аналитичности симметрий $\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)^2$ и $g_{3b}^s$;
- одинаковости их рангов как отображений над $\mathbb{C}$ (равных числу соответствующих независимых координат над $\mathbb{C}$) замечаем, что координаты $m_i$, $v_i$, $r_i$, введенные как канонические для симметрии $\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)^2$, являются каноническими и для симметрии фазового потока $g_{3b}^s$ в обратимом аналитическом времени «над $s$», что и требовалось получить.

**Введение канонических фактор-координат на отображении непрерывной центральной симметрии $\boldsymbol{Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3}$.** Эта операция описывается следующим утверждением.

**Лемма 3.** Функции $L\left(s, E / \mathbb{Q}\right)$ представляют канонические групповые координаты на отображении непрерывной центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3$ как на функциональном $CW$-комплексе.

**Замечание.** Под $CW$-комплексом на качественном уровне понимается топологическое пространство для которого «отображение триангуляции» коммутирует с «отображением взятия границы».

**Схема доказательства.** Интерпретируем инвариант следа $Trace\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\left(\left(Sym, Rot\right)/\left(Sym \cong Rot\right)\right)^2\right)$ как инвариант групповой фактор-симметрии на *CW*-комплексе $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3 \cong \left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)_{CW}$. Тогда с учетом вычислений [15] имеем:

- множитель $P_2(p^{-s}) = \prod\limits_{p \text{ is } good} (1 - a_p p^{-s} + pp^{-2s})^{-1}$ представляет полное пространство генераторов «ротационной части» отображения центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3$ комплексной решетки $\left(\mathbb{E}^3 / \mathbb{C}\right) / Z^3$, представляющего непрерывное центральное подобие комплексной решетки $\mathbb{E}^3 / \mathbb{C} / Z^3$ относительно фундаментального куба решетки $\mathbb{E}^3 / \mathbb{C} / Z^3$, где $p$ пробегает все множество простых чисел, $O$ — геометрический центр неприводимой фундаментальной области решетки $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3$ (свободного фундаментального куба);
- множитель $P_1\left(p^{-s}\right) = \prod\limits_{p \text{ is } good} \left(1 - a_p p^{-s}\right)$ представляет полное пространство генераторов «гомотетичной части» отображения центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3$, представляемой ее овеществлением $Re\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right) \cong Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{R}} / Z^3$ — отображением, представляющим непрерывное центральное подобие вещественной решетки $\mathbb{E}^3 / \mathbb{R} / Z^3$ относительно фундаментального куба решетки $\mathbb{E}^3 / \mathbb{R} / Z^3$.

**Построение эквивалентности геометрических моделей КАГД и НЗТТ.** Эта эквивалентность представляется взаимооднозначным соответствием, имеющим вид

$$\left\{\mathbb{H}_{an} = Im_{+}\mathbb{H}_{an}\left(i_{+}, j_{+}, k_{+}\right) \oplus Im_{-}\mathbb{H}_{an}\left(i_{-}, j_{-}, k_{-}\right)\right\} \leftrightarrow \left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\right)^2 .$$

Здесь

$$(i_{+}, i_{-}) \leftrightarrow \left(Sym, Sym^{-1}\right); \quad (j_{+}, j_{-}) \leftrightarrow \left(Rot, Rot^{-1}\right);$$

$$(k_{+}, k_{-}) \leftrightarrow \left(\left(Sym \cong Rot\right), \left(Rot \cong Sym\right)\right),$$

где

- $Sym, Rot, \left(Sym \cong Rot\right)$ — генераторы отображения непрерывной центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} \cong Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}}\left(\left(Sym, Rot\right)/\left(Sym \cong Rot\right)\right)$ (см. лемму 1);
- $1, i, j, k$ — базис тела кватернионов $\mathbb{H}$;

• $\oplus \cong 1_{\mathbb{H}}(mod\,G)$, где $\oplus$ — каноническая $\mathbb{C}$-аналитическая групповая операция, соответствующая канонической групповой операции $G$ на модулярной решетке $\Gamma\left[i_*, i^*\right]$;

• $(i_+, j_+, k_+)$ и $(i_-, j_-, k_-)$ — канонически сопряженные посредством операции $\oplus$ чисто мнимые базисные кватернионы.

**Скрытая евклидова геометрия фазового потока НЗТТ — универсальная функциональная платонова 4d-двойственность.** Ее структура описывается следующим утверждением.

**Теорема 4**. Для отображения фазового потока ньютоновой задачи трех тел его групповой центр как непрерывная инвариантная связность реализуется отображениями

$$Zentr\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right) \cong Diag(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3) \cong Diag\left(Sym_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3 \cong Rot_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)$$

и представляет собой точный функциональный аналог иерархии отображения платоновой двойственности между парами правильных многогранников в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$.

**Доказательство.** В соответствии с доказательством леммы 3 отображение двойственности «зеркальные отражения — повороты» $Zentr\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)$ в пространстве $\mathbb{E}^3$ представляет каноническое непрерывное транзитивное групповое отношение инцидентности «точка»-«прямая»-«плоскость»-«3d-пространство» в евклидовом 3d-пространстве $\mathbb{E}^3$. Свойство непрерывности отображения $Zentr\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)$ вытекает из непрерывности отображения $Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3$.

Следовательно, такое отношение инцидентности непрерывно добавляется к указанному непрерывному отношению инцидентности в 3d-пространстве $\mathbb{E}^3$ и представляет непрерывное отношение инцидентности «точка»-«прямая»-«плоскость»-«3d-пространство»-«4d-пространство» уже в евклидовом 4d-пространстве $\mathbb{E}^4$.

Полученное непрерывное отношение инцидентности в 4d-пространстве $\mathbb{E}^4$, по определению, представляет отображение непрерывной платоновой двойственности между правильными многогранниками в евклидовом 4d-пространстве $\mathbb{E}^4$.

**Геометрическая модель операции оптимального управления в моделях КАГД и НЗТТ.** Пространство $\mathbb{E}^3$, дополнительно снабженное введенным выше отношением инцидентности $Zentr\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right)$, становится корректно определенной диагональю между канонически глобально непрерывно двойственными над полем $\mathbb{C}$ и также глобально $\mathbb{C}$-непрерывно сопряженными пространствами:

$$\mathbb{E}^3 / Zentr\left(Z_O^{\mathbb{E}^3/\mathbb{C}} / Z^3\right) \cong Kl_{\mathbb{C}}^3 \cong Diag\left(T\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3, N\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3\right) \cong Diag\left(\Lambda_{\mathbb{C},*}^3 \cong \Lambda_{\mathbb{C}}^{3,*}\right),$$

представляя канонический функциональный непрерывный аналог, обозначаемый $Kl_{\mathbb{C}}^3$, классической 2d-бутылки Клейна $Kl^2$ [24], где

- размерность 3 в обозначении $Kl_{\mathbb{C}}^3$ имеет смысл генерирующей размерности этого пространства;
- $T\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3, N\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$ — глобальные (определенные над $\mathbb{C} \cup \infty$) касательное и нормальное пространства соответственно к комплексифицированной стандартной сфере $\mathbb{S}^3$.

Пространства $T\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3, N\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$ представляют собой канонически двойственные трехмерные функциональные пространства $\Lambda_{\mathbb{C},*}^3, \Lambda_{\mathbb{C}}^{3,*}$, имеющие канонический смысл двойственных $Kl_{\mathbb{C}}^3$ — расширений стандар-тного 3d-пространства Лобачевского.

Из каноничности определения отображения непрерывного функционального $Kl_{\mathbb{C}}^3$ — расширения следует, что пространства $\Lambda_{\mathbb{C},*}^3, \Lambda_{\mathbb{C}}^{3,*}$ имеют смыл *стандартных двойственных функциональных пространств Лобачевского.*

**Вывод.** Таким образом, отношение инцидентности $Kl_{\mathbb{C}}^3$, имея смысл операции геодезического потока на стандартном функциональном пространстве Лобачевского в рамках геометрической модели НЗТТ, может быть интерпретировано как каноническая область определения операции оптимального управления КА в рамках КАГД-модели.

**Замечание.** Отношение инцидентности $Kl_{\mathbb{C}}^3$, в соответствии с леммой 3, также имеет интерпретацию отображения непрерывного инвариантного разрешения ньютоновой особенности в точке $O$ над формальным комплексным временем.

**Каноничность существования отображения инвариантной связности $Kl_{\mathbb{C}}^3$ именно в физической размерности 4.** Этот факт конкретизируется следующим утверждением.

**Теорема 5.** Отображение $Kl_{\mathbb{C}}^3$ как связное отображение над полем $\mathbb{C}$ определено именно «в размерности 4».

**Доказательство.** Отношение функциональной инцидентности $Kl_{\mathbb{C}}^3$ генерируется непрерывным отображением инволюции обратимости по времени $\mathbb{Z}_2\left[t \to t^{-1}\right]$, непрерывно изоморфным, в силу определения

$Kl^3_{\mathbb{C}}$, непрерывному отображению платоновой двойственности между правильными многогранниками *именно в четырехмерном евклидовом пространстве* $\mathbb{E}^4$.

Отображение $Kl^3_{\mathbb{C}}$ как связное отображение над полем $\mathbb{C}$ определено только на пространстве $\mathbb{E}^4$. Это следует из известного факта, что отображение платоновой двойственности не может быть полноценно определенным в евклидовых пространствах $\mathbb{E}^n$ при $n > 4$: его нет для многомерных аналогов главных правильных многогранников — 3d-додекаэдра и 3d-икосаэдра из пространства $\mathbb{E}^4$.

**Три классических интеграла НЗТТ — каноническая трехзначная метрика над полем $\mathbb{R}$ на комплексном пространстве $Kl^3_{\mathbb{C}}$.** Тот факт, что трех классических интегралов НЗТТ достаточно для точного описания ее фазовой динамики, выражается в следующем утверждении.

**Теорема 6.** Гамильтониан, интеграл площадей и интеграл центра масс дифференциальных уравнений НЗТТ, рассмотренные в аналитическом обратимом времени, представляют иерархию вещественнозначных аналитических метрик на следующих комплексных функциональных пространствах соответственно:

- пространстве Лобачевского $\Lambda^3_{\mathbb{C},*}$ — орбите «право-левого» отношения инцидентности $Kl^3_{\mathbb{C},*}$;
- пространстве Лобачевского $\Lambda^{3,*}_{\mathbb{C}}$, канонически двойственном к пространству $\Lambda^3_{\mathbb{C},*}$ — орбите «лево-правого» отношения инцидентности $Kl^{3,*}_{\mathbb{C}}$;
- бутылке Клейна $Kl^3_{\mathbb{C}}$ — орбите диагонального отношения инцидентности, представляемого самим же пространством $Kl^3_{\mathbb{C}}$.

Три этих функциональных пространства представляют, в свою очередь, трехзначную орбиту непрерывного отображения инволюции $\mathbb{Z}_2\left[t \to t^{-1}\right]$ обратимости по времени дифференциальных уравнений НЗТТ.

**Заключение.** Полученные результаты позволяют установить точное соответствие между моделью фазового потока НЗТТ и КАГД-моделью. Исходя из того, что КДГА-модель соответствует «1:1 резонансному расширению», или «расширению в обратимом $\mathbb{C}$-времени», АГД-модели и является ее точным кватернионным аналогом, можно сделать следующий вывод: приведенная в данной работе кватернионная аналитическая математическая модель НЗТТ представляет собой модель гравитационного потенциала небесно-механической системы Земля — Луна. Точность данной модели соответствует точности АГД-модели.

Таким образом, получена аналитическая модель гравитационного потенциала системы Земля — Луна в классе новых специальных функций.

Перспективной задачей представляется аппаратная, микромеханическая и программная реализация полученных аналитических формул, а также их геометрических и механических интерпретаций, направленная на повышение надежности и оптимальности процессов автоматизации управлением КА в системе Земля — Луна.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение спутника ФОТОН М-2 и квазистатические микроускорения на его борту. *Космические исследования*, 2007, т. 45, № 5, с. 450–470.

[2] Путин Г.Ф., Глухов А.Ф., Бабушкин И.А., Завалишин Д.А., Беляев М.Ю., Иванов А.А., Сазонов В.В. Исследование микроускорений на борту Международной космической станции с помощью датчика конвекции ДАКОН-М. *Космические исследования*, 2012, т. 50, № 5, с. 373–379.

[3] Соловьев В.А., Любинский В.Е., Мишурова Н.В. Контроль полета пилотируемых космических аппаратов для оценки их состояния и функционирования. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 5. URL: http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-5-1614

[4] Суханов А.А. *Астродинамика.* Москва, ИКИ РАН, 2010, 204 с.

[5] Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. В сб.: *Искусственные спутники Земли*, 1961, вып. 8, с. 64–71.

[6] Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли. *Астрономический журнал*, 1963, т. 40, вып. 2, с. 363–372.

[7] Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г. Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников Земли. В кн.: *Проблемы движения искусственных спутников небесных тел.* Москва, Изд-во АН СССР, 1963, с. 92–98.

[8] Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г. Качественный анализ форм движения в задаче о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. *Искусственные спутники Земли*, 1963, вып. 16, с. 173–197.

[9] Демин В.Г. *Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения*. Москва–Ижевск, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2010, 420 с.

[10] Sidorenkov N.S. The nature seasonal and interannual variations of the Earth’s rotation. *Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets.* Prague, 1987, pp. 947–960.

[11] Мюррей К., Дермотт С. *Динамика Солнечной системы*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2010, 588 с.

[12] Пуанкаре А. Задача трех тел. *Анри Пуанкаре. Избранные труды. Т. 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел*. Москва, Наука, 1972, с. 445–452.

[13] Пуанкаре А. Двояко-асимптотические решения. *Анри Пуанкаре. Избранные труды. Т. 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел*. Москва, Наука, 1972, с. 325–356.

[14] Пуанкаре А. О проблеме трех тел и об уравнениях динамики. II. *Анри Пуанкаре. Избранные труды*. В 3 т. Т. 2. Москва, Наука, 1972, с. 356–441.

[15] Абраров Д.Л. *Дзета-функции и L-функции в гамильтоновой динамике*. Москва, ВЦ РАН, 2010, 225 с.

[16] Абраров Д.Л. *Дзета-модель классической механики. Теоретические и прикладные аспекты.* LAP Lambert Academic Publishing, 2016, 276 с.

[17] Абраров Д.Л. Exact solvability of model problems of classical mechanics in global L-function and its mechanical and physical meaning. *Сб. тез. докл. Междунар. конф. по математической теории управления и механике*, Суздаль, 2017, с. 149–150.

[18] Абраров Д.Л. Точная математическая модель ньютоновой задачи трех тел. *Фундаментальные и прикладные задачи механики. Тез. докл. Междунар. конф., посв. 170-летию великого русского ученого Н.Е. Жуковского. Москва, 24–27 октября 2017*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, с. 103–104.

[19] Абраров Д.Л. Точная математическая модель ньютоновой задачи трех тел. *Петровские чтения 2017. Тез. докл. 3-й Междунар. зимней школы-семинара по гравитации, космологии и астрофизике*. Казань, КФУ, 2017, с. 40.

[20] Сосинский А.Б. *Геометрии*. Москва, МЦНМО, 2017, 263 с.

[21] *Modular Forms and Fermat's Last Theorem*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1997, 582 p.

[22] Rubin K., Silverberg A. Families of elliptic curves with constant mod *p* representations. In: Elliptic curves, modular forms & Fermat’s last theorem. *Proc. of the Conf. on Elliptic Curves and Modular Forms. Hong Kong, December 18–21, 1994*. Cambridge, MA, International Press, 1995, pp. 148–161.

[23] Darmon H. Andrew Wiles's Marvelous Proof. *Notices of the AMS*, 2017, pp. 209–216.

[24] Хатчер А. *Алгебраическая топология*. Москва, МЦНМО, 2011, 688 с.

Статья поступила в редакцию 26.01.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Абраров Д.Л. Аналитическая модель гравитационного потенциала системы Земля — Луна в виде общего решения ньютоновой задачи трех тел. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 2.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-2-1734

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики FAPM–2017», посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 октября 2017 г.*

**Абраров Дмитрий Леонардович —** канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела механики Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН. Область научных интересов: точная разрешимость дифференциальных уравнений и ее технологические приложения. e-mail: abrarov@yandex.ru

# Analytical model of the Earth — Moon system gravitational potential in the form of a general solution to the Newtonian three-body problem



Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, 119333, Russia

*The article presents a mathematical model of the gravitational potential of the Earth — Moon system, which allows analytical calculating the optimal space vehicle trajectories in this celestial mechanical system. This model represents the canonical quaternion generalization of the classical mathematical Aksenov — Grebenikov — Demin model of the Earth gravitational potential. It is shown that the proposed model also realizes the complete separation of the variables in the Hamiltonian of the classical Newtonian three-body problem and corresponds to its analytic solvability, which is the unexpected fact from the classical point of view. Thus, the resulting formulas for an exact general solution of the three-body problem simulate equipotential surfaces of the gravitational potential of the Earth — Moon system. Equipotential lines, in particular, simulate the orbits of space vehicles in the Earth — Moon system. Optimum control of space vehicles is mathematically simulated by a corresponding change in the parameters of the general solution to the Newtonian three-body problem. It is shown that such parametric deformations geometrically correspond to the isometries of the analytic complex three-dimensional Lobachevsky space.*

***Keywords:*** *gravitational potential, Earth—Moon system, optimal satellite orbits, Newtonian three-body problem, exact analytic solvability, L-functions of elliptic curves*

## REFERENCES

[1] Abrashkin V.I., Bogoyavlensky N.L., Voronov K.E., Kazakova A.E., Puzin Yu.Ya., Sazonov V.V., Semkin N.D., Chebukov S.Yu. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 5, pp. 450–470.

[2] Putin G.F., Glukhov A.F., Babushkin I.A., Zavalishin D.A., Belyaev M.Yu., Ivanov A.A., Sazonov V.V. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2012, vol. 50, no. 5, pp. 373–379.

[3] Solovyov V.A., Lyubinsky V.E., Mishurova N.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2017, issue 5. Available at: http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-5-1614

[4] Sukhanov A.A. *Astrodinamika* [Astrodynamics]. Moscow, IKI RAN Publ., 2010, 204 p.

[5] Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G. Obshchee reshenie zadachi o dvizhenii iskusstvennogo sputnika v normalnom pole prityazheniya Zemli [General solution of the problem of an artificial satellite motion in the normal gravitational field of the Earth]. In: *Iskusstvennye sputniki Zemli* [Earth Artificial Satellites]. 1961, issue 8, pp. 64–71.

[6] Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G. *Astronomicheskiy zhurnal — Astronomy Reports*, 1963, vol. 40, no. 2, pp. 363–372.

[7] Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G. Primenenie obobshchennoy zadachi dvukh nepodvizhnykh tsentrov v teorii dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli [Application of the generalized problem of two fixed centers in

the theory of artificial Earth satellite motion]. In: *Problemy dvizheniya iskusstvennykh sputnikov nebesnykh tel* [The problems of motion of artificial satellites of celestial bodies]. Moscow, AN SSSR Publ., 1963, pp. 92–98.

[8] Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G. Kachestvennyy analiz form dvizheniya v zadache o dvizhenii iskusstvennogo sputnika v normalnom pole prityazheniya Zemli [Qualitative analysis of the forms of motion in the problem of the artificial satellite motion in the normal gravitational field of the Earth]. In: *Iskusstvennye sputniki Zemli* [Earth Artificial Satellites]. 1963, issue 16, pp. 173–197.

[9] Demin V.G. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika v netsentralnom pole tyagoteniya* [The motion of an artificial satellite in an off-center gravitational field]. Moscow – Izhevsk, NITs Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika. Institut kompyuternykh issledovaniy Publ., 2010, 420 p.

[10] Sidorenkov N.S. *The nature seasonal and interannual variations of the Earth's rotation. Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets.* Prague, 1987, pp. 947–960.

[11] Murray C.D., Dermott S.F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press Publ., 1999, 606 p. [In Russ.: Murray C., Dermott S. Dinamika Solnechnoy sistemy. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 588 p.].

[12] Poincaré H. *New Methods of Celestial Mechanics.* D. Goroff, ed. Springer Science & Business Media Publ., 1967. [In Russ.: Poincaré H. Izbrannye Trudy. V trekh tomakh. Tom 2. Novye metody nebesnoy mekhaniki. Topologiya. Teoriya chisel. Moscow, Nauka Publ., 1972, pp. 445–452].

[13] Poincaré H. *New Methods of Celestial Mechanics*. D. Goroff, ed. Springer Science & Business Media Publ., 1967 [In Russ.: Poincaré H. Izbrannye Trudy. V trekh tomakh. Tom 2. Novye metody nebesnoy mekhaniki. Topologiya. Teoriya chisel. Moscow, Nauka Publ., 1972, pp. 325–356].

[14] Poincaré H. *New Methods of Celestial Mechanics*. D. Goroff, ed. Springer Science & Business Media Publ., 1967 [In Russ.: Poincaré H. Izbrannye Trudy. V trekh tomakh. Tom 2. Novye metody nebesnoy mekhaniki. Topologiya. Teoriya chisel. Moscow, Nauka Publ., 1972, pp. 356–441].

[15] Abrarov D.L. *Dzeta-funktsii i L-funktsii v gamiltonovoy dinamike* [Zeta functions and L-functions in the Hamiltonian dynamics]. Moscow, VTs RAN Publ., 2010, 225 p.

[16] Abrarov D.L. *Dzeta-model klassicheskoy mekhaniki. Teoreticheskie i prikladnye aspekty* [The Zeta model of classical mechanics. Theoretical and applied aspects]. Saarbruecken, LAP Lambert Academic Publishing, 2016, 276 c.

[17] Abrarov D.L. Exact solvability of model problems of classical mechanics in global L-function and its mechanical and physical meaning. *Sbornik tezisov dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii po matematicheskoy teorii upravleniya v mekhanike* [International Conference on mathematical theory of control and mechanics. Abstracts]. Suzdal, 2017, pp. 149–150.

[18] Abrarov D.L. Tochnaya matematicheskaya model nyutonovoy zadachi trekh tel [Exact mathematical model of the Newtonian three-body problem]. *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii, Posvyashchennoy 170- letiyu velikogo russkogo uchenogo N.E. Zhukovskogo "Fundamentalnye i prikladnye zadachi mekhaniki", Moskva, 24–27 oktyabrya 2017 g.* [International scientific conference Fundamental and Applied Problems of Mechanics (FAPM–2017) dedicated to the 170th anniversary of a distinguished Russian scientist Nikolay Egorovich Zhukovsky. Moscow, October 24–27, 2017. Abstracts]. Moscow, BMSTU, 2017, pp. 103–104.

[19] Abrarov D.L. Tochnaya matematicheskaya model nyutonovoy zadachi trekh tel. [Exact mathematical model of the Newtonian three-body problem]. *Petrovskie chteniya 2017. Tezisy dokladov 3-y Mezhdunarodnoy zimney shkoly-seminara po gravitatsii, kosmologii i astrofizike* [Petrovsky readings 2017. 3rd International winter school-seminar on gravity, cosmology and astrophysics. Abstracts]. Kazan, KFU, 2017, p. 40.

[20] Sosinsky A.B. *Geometrii* [Geometries]. Moscow, MTsNMO Publ., 2017, 263 p.

[21] *Modular Forms and Fermat's Last Theorem*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1997, 582 p.

[22] Rubin K., Silverberg A. Families of elliptic curves with constant mod *p* representations. In: Elliptic curves, modular forms & Fermat’s last theorem. *Proc. of the Conf. on Elliptic Curves and Modular Forms. Hong Kong, December 18–21, 1994.* Cambridge, MA, International Press, 1995, pp. 148–161.

[23] Darmon H. Andrew Wiles's Marvelous Proof. *Notices of the AMS*, 2017, pp. 209–216.

[24] Hatcher A. *Algebraic Topology*. Cambridge, Cambridge University Press, 2002 [In Russ.: Hatcher A. Algebraicheskaya topologiya. Moscow, MTsNMO Publ., 2011, 688 p.].

**Abrarov D.L.**, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Research Fellow, Department of Mechanics, Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS. Research interests: exact solvability of differential equations and its technological applications. e-mail: abrarov@yandex.ru