

И. Ю. Савельева

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕЛОКАЛЬНЫХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ АККУМУЛЯЦИИ ТЕПЛОТЫ

*Предложена модель теплопроводности, учитывающая эффект запаздывания при аккумуляции теплоты, в нелокальной среде. Для задачи высокоинтенсивного поверхностного нагрева получены численные решения в одномерном случае с помощью метода конечных элементов.*

**E-mail:** Inga.Savelyeva@gmail.com

**Ключевые слова:** нелокальная среда, внутренние параметры состояния, уравнение теплопроводности, аккумуляция теплоты.

Большинство современных конструкционных и функциональных материалов обладают микро- или наноструктурой. Мысленное их разбиение ограничено некоторым пределом, выражающимся в том, что на некотором уровне происходит качественное изменение физических свойств. Причем этот предел не обязательно должен проявляться отчетливо [1, 2]. Поэтому к структурно-чувствительным материалам (материалам с микро- и наноструктурой) в чистом виде не применима методология континуума. Тем не менее, допустимо распространение методов механики сплошной среды, занимающейся изучением механического поведения материалов на макроуровне, на микроуровень. Они оказались весьма эффективными [1]. Такой прием распространения методов механики сплошной среды называют методом непрерывной аппроксимации, а область науки, в которой поведение материалов с микро- и наноструктурой изучается при использовании методов непрерывной аппроксимации, называют обобщенной механикой сплошной среды [1].

В работе [3] на основе соотношений рациональной термодинамики необратимых процессов для среды с внутренними параметрами состояния закон сохранения энергии

$$\rho T \dot{h} = - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + q_V + \delta_D,$$

где  $\rho$  — плотность среды;  $T$  — абсолютная температура;  $h$  — массовая плотность энтропии;  $q_k$  — проекции вектора плотности теплового потока  $\mathbf{q}$  на оси  $Ox_k$  прямоугольной системы координат;  $x_k$  — декартовы координаты;  $q_V$  — объемная плотность мощности источников (стоков) теплоты;  $\delta_D$  — диссипативная функция, записан в виде уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho c_\varepsilon}{t_T^*} \int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*}\right) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} dt' = \\
& = -T \int_V dV(\mathbf{x}') \int_V C_{jikl} \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \times \\
& \quad \times \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}(\mathbf{x}')}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}'', t)}{\partial t} dV(\mathbf{x}'') + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \int_V \lambda_{ij}^{(T)} \varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \left( \frac{\partial T(\mathbf{x}'', t)}{\partial x_j''} - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\partial T(\mathbf{x}'', t')}{\partial x_j''} \right) dt' \right) dV(\mathbf{x}'') + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \int_V \lambda_{ij}^{(\kappa)} \varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \left( \frac{\partial \kappa(\mathbf{x}'', t)}{\partial x_j''} - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\partial \kappa(\mathbf{x}'', t')}{\partial x_j''} \right) dt' \right) dV(\mathbf{x}'') + \delta_D + q_V. \quad (1)
\end{aligned}$$

Здесь  $C_{jikl}$  — компоненты тензора коэффициентов упругости;  $C_{jikl} = C_{klji}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ;  $c_\varepsilon$  — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации, характеризующая аккумуляцию теплоты при изменении абсолютной и термодинамической температур;  $t$  — время;  $t_q^*$ ,  $t_T^*$  — времена релаксации внутренних параметров состояния  $\kappa$  и  $\kappa$  соответственно;  $\kappa$  — векторный внутренний параметр, характеризующий процесс распространения теплоты на микроуровне;  $\kappa$  — скалярный внутренний параметр состояния, определяющий неравновесный процесс аккумуляции теплоты на микроуровне;  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{kl}^{(T)}$  — компоненты тензоров малой деформации и температурной деформации,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $u_i$  — проекции вектора перемещения;  $\lambda_{ij}^{(T)}$ ,  $\lambda_{ij}^{(\kappa)}$  — компоненты тензоров теплопроводности, обусловленные абсолютной и термодинамической температурами;  $\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$  — функция влияния, определяющая эффект пространственной "памяти", причем

$$\int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = 1,$$

а также  $\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$  только при  $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V(\mathbf{x}')$ .

Уравнение (1) описывает процесс теплопроводности с конечной скоростью распространения теплоты, а также учитывает неравновес-

ность процесса аккумуляции теплоты и эффекты связанности полей температуры и деформации. Такое уравнение теплопроводности при различных допущениях относительно структуры материала дает широкие возможности для его использования в конкретных случаях.

Далее рассмотрим частный случай уравнения теплопроводности (1): учтем только влияние эффекта запаздывания при аккумуляции теплоты и положим, что поля температур и деформации не связаны. Тогда уравнение теплопроводности (1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\rho c_\varepsilon}{t_T^*} \int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*}\right) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} dt' = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \int_V \lambda_{ij}^{(T)} \varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \times \\ \times \frac{\partial T(\mathbf{x}'', t)}{\partial x_j''} dV(\mathbf{x}''). \quad (2) \end{aligned}$$

Для оценки температурных полей рассмотрим одномерную задачу высокоинтенсивного поверхностного нагрева. Уравнение теплопроводности (2) и соответствующие краевые условия в одномерном случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\rho c_\varepsilon}{t_T^*} \int_V \varphi(|x' - x|) dV(x') \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*}\right) \frac{\partial T(x', t')}{\partial t'} dt' = \\ = \lambda^{(T)} \frac{\partial}{\partial x} \int_V \varphi(|x' - x|) dV(x') \int_V \varphi(|x'' - x'|) \times \\ \times \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x''), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 0, \quad T(x, 0) = T_0, \quad \dot{T}(x, 0) = 0, \\ x = 0, \quad -\lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x' - x|) dV(x') \int_V \varphi(|x'' - x'|) \times \\ \times \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') = q_S, \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $q_S = B M t^m \exp(-mt/t_0)$ ,  $\lambda^{(T)} = \text{const}$  — теплопроводность тела.

Функцию влияния в одномерном случае запишем следующим образом:

$$\varphi(|x' - x|) = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{|x' - x|}{a} \right), \quad |x' - x| \leq a,$$

где  $a = \text{const}$  — характерный размер структурного элемента.

Применив к уравнению (3) и граничным условиям из (4) конечно-элементную процедуру в форме метода Бубнова–Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\rho c_\varepsilon}{t_T^*} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*}\right) \frac{\partial}{\partial t'} [C] \{T\} dt' + [K] \{T\} = \{F\},$$

где  $[C]$ ,  $[K]$  – матрицы, характеризующие теплоемкость и теплопроводность исследуемого тела;  $\{T\}$  – вектор неизвестных узловых значений температуры;  $\{F\}$  – вектор тепловой нагрузки. Составляющие  $F_p$  вектора  $\{F\}$  и компоненты  $C_{pq}$ ,  $K_{pq}$  матриц  $[C]$ ,  $[K]$  определяются следующими соотношениями:

$$F_p = q_S(t) \delta_{p1},$$

$$C_{pq} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{\rho c}{A_{44}} \left( \int_V \varphi(|x' - x|) N_q(x') dx' \right) N_p(x) dx,$$

$$K_{pq} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \lambda^{(T)} \left( \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{dN_q(x'')}{dx''} dx'' dx' \right) \times$$

$$\times \frac{dN_p(x)}{dx} dx,$$

где  $E$  – количество конечных элементов;  $V^{(e)}$  – объем конечного элемента;  $N_p$ ,  $N_q$  – зависящие от координаты  $x$  одномерные квадратичные функции формы;  $p, q$  – номера узлов сетки,  $p, q = \overline{1, n}$ .

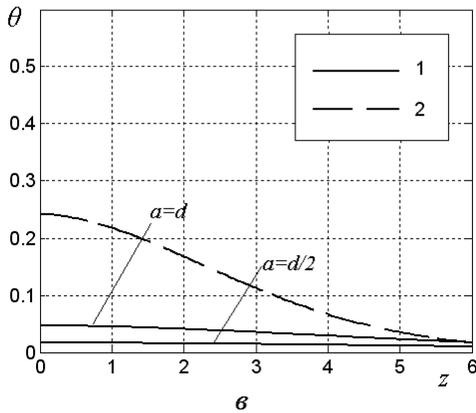
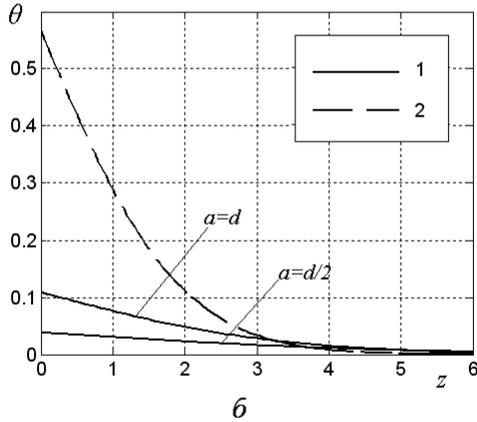
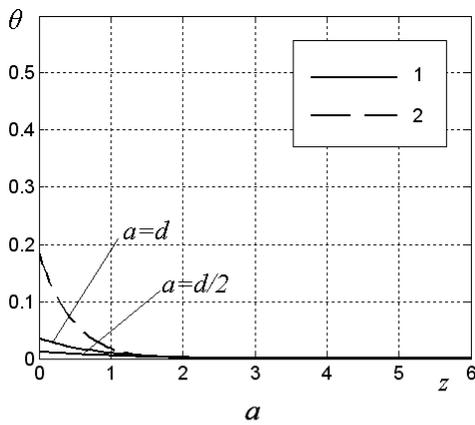
Значения температуры в узлах расчетной сетки конечных элементов в  $(k + 1)$ -й момент времени могут быть получены из решения системы алгебраических уравнений при аппроксимации двухслойной разностной схемой:

$$\left( \Delta t^k [K^{k+1}] + \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t^k}{t_T^*}\right) \right) [C^{k+1}] \right) \{T^{k+1}\} =$$

$$= \{F\} \Delta t^k + \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t^k}{t_T^*}\right) \right) [C^{k+1}] \{T^k\} +$$

$$+ \exp\left(-\frac{t^{k+1}}{t_T^*}\right) \Delta t^k \sum_{n=1}^{k-1} \left( \exp\left(\frac{t^{n+1}}{t_T^*}\right) - \exp\left(\frac{t^n}{t_T^*}\right) \right) [C^{n+1}] \{T^n\},$$

где  $\Delta t^{(k)} = t^{k+1} - t^k$  – шаг по времени.



Распределение температуры по глубине тела при  $t_T^* = 10$ ,  $m = 2$ ; 1 – температурное поле для модели (3), (4); 2 – для модели (5), (6); (а) –  $\bar{t} = 0,5$ ; (б) –  $\bar{t} = 2$ ; (в) –  $\bar{t} = 5$

При построении графиков использовали следующие безразмерные параметры и переменные [4]:

$$z = x/\sqrt{at_0}, \bar{t} = t/t_0, \theta = (T - T_0)/T^*, T^* = Bt_0^m \sqrt{at_0}/\lambda^{(T)}, a = \lambda^{(T)}/(\rho c), q_0(\bar{t}) = M\bar{t}^m \exp(-m\bar{t}), M = m^m/(m-1)!$$

Полученные в результате предложенной модели теплопроводности температурные поля сравнивались с температурными полями, полученными в случае модели, учитывающей эффект запаздывания аккумуляции теплоты и не учитывающей нелокальность среды, и описанной в работе [5]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho c}{t_T^*} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*}\right) \frac{\partial T}{\partial t'} dt' = \lambda^{(T)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} t = 0, \quad T(x, 0) = T_0, \quad \dot{T}(x, 0) = 0, \\ x = 0, \quad -\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x} = q_S, \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6)$$

На рисунке изображены распределения температуры по глубине тела для различных моментов времени при значении параметра  $t_T^* = 10$ . Видно, что характерный размер структуры  $a$  значительно влияет на температурное поле: уменьшение параметра  $a$  приводит к уменьшению температуры. В структурно-чувствительном материале уменьшение характерного размера зерна приводит к увеличению доли границ раздела, а, следовательно, к увеличению рассеяния энергии на границах раздела, что соответствует понижению температуры тела.

*Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К у н и н И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
2. В в е д е н и е в микромеханику / Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К. и др. / Пер. с япон. – М.: Металлургия, 1987. – 280 с.
3. К у в ы р к и н Г. Н. Математическая модель нелокальной термовязкоупругой среды. Ч.2. Уравнение теплопроводности // Вестник МГТУ им Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2012. – № 3.
4. К у в ы р к и н Г. Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. – 141 с.
5. Ч а л а я И. Ю. Моделирование температурных полей в твердом теле при импульсном нагреве // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Труды XVI Школы-семинара молодых ученых и специалистов под рук. академика РАН А.И. Леонтьева. – М., 2007. Т. 2. – С. 193–196.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012