

## Использование метода интегральных преобразований для решения задачи остывания системы коаксиальных цилиндров

© И.С. Плотников, В.М. Пучков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Задача нахождения распределения температурного поля в системе коаксиальных цилиндров при остывании решена в аналитическом виде. Для процессов нестационарной теплопроводности построена математическая модель с учетом идеального контакта между взаимодействующими телами. Изучен вопрос упрощения расчетной системы, при котором тонкостенные цилиндрические стенки заменяются плоскими бесконечными пластинами той же толщины. Решение получено методом интегральных преобразований в декартовой и цилиндрической системах координат. Рассмотрена математическая проблема сопряжения внутреннего стержня системы, описываемого в цилиндрической системе координат, с прилегающей плоской бесконечной пластиной, описываемой в декартовой системе координат для упрощенной расчетной схемы. Результаты отражены на графических зависимостях температурных полей в системе коаксиальных цилиндров в различные моменты развития процесса остывания. Условиями применимости полученного решения являются малое соотношение толщин цилиндрических слоев и радиуса кривизны средней линии, оптическая непроницаемость всех слоев и осесимметричность геометрии модели и граничных условий.*

**Ключевые слова:** метод интегральных преобразований, система коаксиальных цилиндров, нестационарная теплопроводность, граничные условия сопряжения

**Введение.** Многослойные сложные системы, состоящие из нескольких тел, участвуют в процессах нестационарной теплопроводности при условии идеального теплового контакта. Большие трудности вызывает решение задач, связанных с получением аналитических зависимостей для распределения температурных полей в элементах таких систем. Подобные задачи широко распространены, например, в металлургии, где необходимо исследовать процессы остывания металлической отливки в целях предотвращения образования усадочных раковин и других дефектов [1]. Для изготовления различных изделий и конструкций также применяют многослойные композиционные материалы с заданными физико-механическими свойствами, обладающие дополнительными характеристиками, такими как высокая прочность, жаростойкость, защищенность от воздействия агрессивных сред [2]. Решение этих задач может пригодиться при оптимизации конструкций и режимных параметров технологического оборудования для химических производств [3].

Один из возможных способов получить точное аналитическое решение — использовать операционный метод, который применим для

широкого класса задач, в том числе и для многослойных систем. В качестве возможной альтернативы операционному методу при решении сложных задач нестационарной теплопроводности может служить метод интегральных преобразований, который отличается более узкой областью применимости. Однако его использование позволяет избежать ряда трудностей, возникающих при решении операционным методом многомерных задач или в областях сложной формы. Кроме того, для метода интегральных преобразований существует большое количество ядер преобразований, определенных для каждой конкретной задачи, что может существенно упрощать ход решения.

Теория этого метода была разработана Н.С. Кошляковым [4]. В дальнейшем Э.М. Карташов развил метод интегральных преобразований в своих работах, в частности в [5]. Некоторые новые обобщенные интегральные преобразования и их применение в теории дифференциальных уравнений рассмотрены в [6]. Полезными являются работы [7–9], в которых представлены материалы по уравнениям математической физики, приводящим к уравнениям в частных производных, на основе которых строится метод интегральных преобразований. Решение подобных задач численными методами теории теплопроводности хорошо освещено в [10].

В зависимости от постановки задачи решение может осуществляться в различных системах координат и размерностях. Сложность его возрастает с увеличением размерности задачи, а также в случае переопределения системы координат, в которой рассматривается геометрия модели, что связано в первую очередь с усложнением ядер интегральных преобразований. Так, решение задачи в цилиндрических координатах существенно сложнее, чем в декартовых. Поэтому представляет интерес возможность упрощения хода решения посредством трансформации элементов геометрии расчетной модели, для чего их описывают в более «примитивных» системах координат. Настоящая работа посвящена исследованию применимости метода интегральных преобразований при использовании упрощенной расчетной схемы системы коаксиальных цилиндров, в которой тонкостенные цилиндрические стенки заменяются плоскими бесконечными пластинами той же толщины.

**Построение расчетной схемы.** Схема системы коаксиальных цилиндров приведена на рис. 1. В момент времени  $\tau = 0$  температура системы составляет  $t_0$ . При  $\tau > 0$  система помещается в среду с постоянной температурой  $t_H$ , при этом  $t_0 > t_H$ . На наружной поверхности происходит процесс конвективной теплопередачи с коэффициентом теплообмена  $\alpha_H$ , постоянным на протяжении всего времени остывания. Задачу рассматриваем в осесимметричной постановке. Считаем также, что длина системы  $L$  достаточна для того, чтобы пренебречь изменением температуры в осевом направлении.

Выберем геометрические характеристики слоев 1–3 таким образом, что слои 2 и 3 станут представлять тонкостенные цилиндрические оболочки, т. е. для них будет справедливо соотношение

$$\delta/d_{\text{ср}} \ll 1,$$

где  $\delta$  — толщина слоя;  $d_{\text{ср}}$  — диаметр слоя по средней линии.

Тогда упрощенная схема системы коаксиальных цилиндров представляет две бесконечные тонкие пластины 2 и 3, сопряженные с цилиндром 1 (рис. 2). Для удобства математических преобразований начало декартовой системы координат, в которой описываются слои 2 и 3, располагаем по границе сопряжения слоев 1–2. Осесимметричность геометрии и граничных условий позволяет утверждать, что температурное поле в слое 1 будет изменяться только по оси  $r$ , поэтому располагаем цилиндрическую систему координат в центре этого слоя таким образом, чтобы оси  $Or$  и  $Ox$  оказались коллинеарными и сопряженными по значениям. Тогда в центре цилиндра будет значение  $-R$ , где  $R$  — радиус цилиндра.

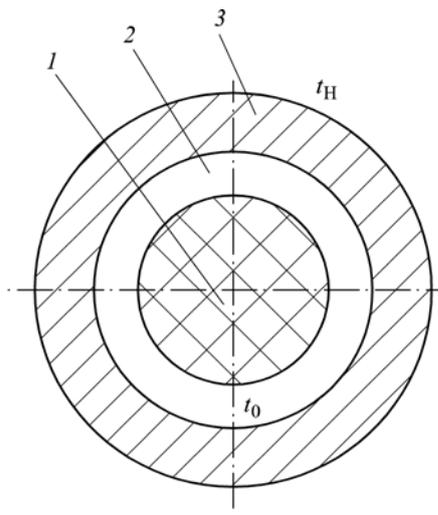


Рис. 1. Схема системы коаксиальных цилиндров

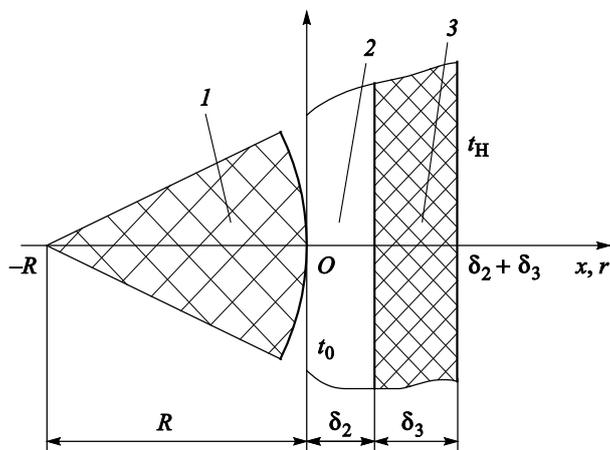


Рис. 2. Упрощенная расчетная схема системы коаксиальных цилиндров

**Построение математической модели.** В этой работе используется метод интегральных преобразований, причем для цилиндрической области  $L$  — интегральное преобразование Ханкеля для сплошного цилиндра в полярной системе координат вида

$$\bar{T}(\beta_n, t) = \int_L r T(x, t) J_0(\beta_n m(x) x) dx, \quad (1)$$

а для слоев 2 и 3 — интегральное преобразование Фурье в декартовой системе координат вида

$$\bar{T}(\beta_n, t) = \int_L T(x, t) \Psi(x, \beta_n) dx. \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений для рассматриваемой нестационарной задачи теплопроводности в избыточных температурах при  $t_H = 0$  °С имеет вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \left[ \frac{1}{(x+R)} \frac{d}{dx} \left( (x+R) \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) \right], \quad -R \leq x < 0, t > 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < \delta_2, \quad i = 2; \quad \delta_2 \leq x \leq \delta_3, \quad i = 3; \quad t > 0; \quad (4)$$

$$T_i(x, t)|_{t=0} = t_0 - t_H, \quad -R < x < (\delta_2 + \delta_3), \quad i = \overline{1, 3}; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=-R} = 0, \quad t > 0; \quad (6)$$

$$T_1(x, t)|_{x=0} = T_2(x, t)|_{x=0}, \quad t > 0; \quad (7)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad t > 0; \quad (8)$$

$$T_2(x, t)|_{x=\delta_2} = T_3(x, t)|_{x=\delta_2}, \quad t > 0; \quad (9)$$

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\delta_2} = \lambda_3 \left. \frac{\partial T_3(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\delta_2}, \quad t > 0 \quad (10)$$

$$-\alpha_H T_3(x, t)|_{x=\delta_2+\delta_3} = \lambda_3 \left. \frac{\partial T_3(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\delta_2+\delta_3}, \quad t > 0; \quad (11)$$

$$a(x) = \begin{cases} a_2, & 0 \leq x < \delta_2; \\ a_3, & \delta_2 \leq x \leq \delta_3, \end{cases}$$

где  $T_1, T_2$  и  $T_3$  — температурные поля в слоях 1, 2 и 3.

Разные формы записи ОДУ (3) и (4) для заданных областей обусловлены отличиями в их геометрическом описании.

Решение подобных задач нестационарной теплопроводности заключается в поиске собственных функций и собственных значений соответствующей однородной задачи:

$$\Delta\Psi_{in} + (m(x))^2 \beta_n^2 \Psi_{in} = 0, \quad -R \leq x < 0, \quad i = 1; \quad (12)$$

$$0 \leq x \leq \delta_2, \quad i = 2; \quad \delta_2 \leq x \leq \delta_3, \quad i = 3;$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_{1n}(x, \beta_n)}{\partial x} \right|_{x=-R} = 0; \quad (13)$$

$$\Psi_{1n}(x, \beta_n)|_{x=0} = \Psi_{2n}(x, \beta_n)|_{x=0}; \quad (14)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial \Psi_{1n}(x, \beta_n)}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda_2 \left. \frac{\partial \Psi_{2n}(x, \beta_n)}{\partial x} \right|_{x=0}; \quad (15)$$

$$\Psi_{2n}(x, \beta_n)|_{x=\delta_2} = \Psi_{3n}(x, \beta_n)|_{x=\delta_2}; \quad (16)$$

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial \Psi_{2n}(x, \beta_n)}{\partial x} \right|_{x=\delta_2} = \lambda_3 \left. \frac{\partial \Psi_{3n}(x, \beta_n)}{\partial x} \right|_{x=\delta_2}; \quad (17)$$

$$-\alpha_H \Psi_{3n}(x, \beta_n)|_{x=\delta_2+\delta_3} = \lambda_3 \left. \frac{\partial \Psi_{3n}(x, \beta_n)}{\partial x} \right|_{x=\delta_2+\delta_3}; \quad (18)$$

$$m(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, & -R \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x < \delta_2; \\ \sqrt{\frac{a_2}{a_3}}, & \delta_2 \leq x \leq \delta_3, \end{cases}$$

где  $\Psi_{1n}, \Psi_{2n}$  и  $\Psi_{3n}$  — собственные функции;  $\beta_n$  — собственные значения.

Поиск  $\Psi_{1n}, \Psi_{2n}$  и  $\Psi_{3n}$  осуществляем в виде:

$$\Psi_{1n}(x) = C_1(\beta_n) J_0(\beta_n(x+R)m(x)), \quad -R \leq x < 0; \quad (19)$$

$$\Psi_{2n}(x) = C_2(\beta_n) \cos(\beta_n x) + C_3(\beta_n) \sin(\beta_n x), \quad 0 \leq x \leq \delta_2; \quad (20)$$

$$\Psi_{3n}(x) = C_4(\beta_n) \cos(\beta_n m(x)(x-\delta_2)) + C_5(\beta_n) \sin(\beta_n m(x)(x-\delta_2)), \quad (21)$$

$$\delta_2 \leq x \leq \delta_3;$$

где  $J_0(\beta_n(x+R)m(x))$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Решая уравнения (19)–(21) с учетом граничных условий (13)–(18), получаем:

$$C_1(\beta_n) = 1; \quad (22)$$

$$C_2(\beta_n) = J_0\left(\beta_n R \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right); \quad (23)$$

$$C_3(\beta_n) = \frac{-\lambda_1 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}}{\lambda_2} J_1\left(\beta_n R \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right); \quad (24)$$

$$C_4(\beta_n) = J_0\left(\beta_n R \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right) \cos(\beta_n \delta_2) + \frac{-\lambda_1 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}}{\lambda_2} J_1\left(\beta_n R \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right) \sin(\beta_n \delta_2); \quad (25)$$

$$C_5(\beta_n) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}} J_0\left(\beta_n R \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right) \sin(\beta_n \delta_2) + \quad (26)$$

$$+ \frac{-\lambda_1 \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}}{\lambda_3} J_1\left(\beta_n R \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right) \cos(\beta_n \delta_2),$$

где  $J_1\left(\beta_n R \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Собственные значения  $\beta_n$  определяем, решая трансцендентное уравнение, полученное из уравнения (18) подстановкой найденных выражений. Зная  $\beta_n$  и  $\Psi_{in}(x, \beta_n)$ , можно ввести интегральное преобразование вида

$$\bar{T}_i(\beta_n, t) = \iiint_G b(x) T_i(x, t) \Psi_{in}(x, \beta_n) dx, \quad (27)$$

где

$$b(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{a_1 R} (x+R), & -R \leq x < 0; \\ \frac{\lambda_2}{a_2}, & 0 \leq x < \delta_2; \\ \frac{\lambda_3}{a_3}, & \delta_2 \leq x \leq \delta_3. \end{cases}$$

Применяем преобразование (27) к уравнениям (3) и (4), получаем

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial T_i}{\partial t}} &= \frac{\lambda_1}{R} \int_{-R}^0 (x+R) \Delta T_1(x,t) \Psi_{1n}(x, \beta_n) dx + \\ &+ \lambda_2 \int_0^{\delta_2} \Delta T_2(x,t) \Psi_{2n}(x, \beta_n) dx + \lambda_3 \int_{\delta_2}^{\delta_2+\delta_3} \Delta T_3(x,t) \Psi_{3n}(x, \beta_n) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Для дальнейшего преобразования выражения (28) используем вторую формулу Грина для оператора Лапласа:

$$\int_D (\Delta T \Psi - \Delta \Psi T) dV = \oint_S \left( \Psi \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds. \quad (29)$$

Поскольку для элементов геометрии задачи используются разные системы координат, возникает проблема сопряжения, так как для последних двух слагаемых в (28) формула (29) выполняется, а первое слагаемое не соответствует правилам выражения (29).

Отметим, что для цилиндрической области  $I$  оператор Лапласа принимает вид

$$\Delta T(x,t) = \frac{1}{(x+R)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+R) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) \right]. \quad (30)$$

Исключим из выражения (30) дифференциальный оператор Лапласа для полярной системы координат интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_1}{R} \int_{-R}^0 (x+R) \Delta T_1(x,t) \Psi_{1n}(x, \beta_n) dx = \\ &= \frac{\lambda_1}{R} \int_{-R}^0 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+R) \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right) \right] \Psi_{1n}(x, \beta_n) dx = \\ &= \frac{\lambda_1}{R} (x+R) T_1(x,t) \frac{\partial \Psi_{1n}(x, \beta_n)}{\partial x} \Big|_{-R}^0 - \frac{\lambda_1}{R} \int_{-R}^0 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} (x+R) \frac{\partial \Psi_{1n}(x, \beta_n)}{\partial x} dx = \\ &= \frac{\partial \Psi_{1n}(x, \beta_n)}{\partial x} \Big|_0 \lambda_1 T_1(0,t) - \frac{\lambda_1}{R} T_1(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+R) \frac{\partial \Psi_{1n}(x, \beta_n)}{\partial x} \right) \Big|_{-R}^0 + \\ &+ \frac{\lambda_1}{R} \int_{-R}^0 (x+R) T_1(x,t) \frac{1}{(x+R)} \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+R) \frac{\partial \Psi_{1n}(x, \beta_n)}{\partial x} \right) dx = \quad (31) \\ &= \frac{\partial \Psi_{1n}(x, \beta_n)}{\partial x} \Big|_0 \lambda_1 T_1(0,t) + \int_{-R}^0 \frac{\lambda_1}{R} (x+R) T_1(x,t) \Delta \Psi_{1n}(x, \beta_n) dx. \end{aligned}$$

Последние два слагаемых в выражении (29) приводятся к подобному виду с помощью формулы (30). Из выражения (12) следует:

$$\begin{aligned}
 -\Delta\Psi_{in} &= (m(x))^2 \beta_n^2 \Psi_{in}, \quad -R \leq x < 0, i = 1; \quad 0 \leq x \leq \delta_2, i = 2; \\
 &\delta_2 \leq x \leq \delta_3, i = 3.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Проведя перегруппировку, с учетом (32) получаем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial t} &= -a_2 \beta_n^2 \bar{T}_i(\beta_n, t) + \left[ \lambda_1 \Psi_{1n}(0, t) \frac{\partial T_1(x, \beta_n)}{\partial x} \Big|_{x=0} - \lambda_2 \Psi_{2n}(0, t) \frac{\partial T_2(x, \beta_n)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] + \\
 &+ \left[ \lambda_2 \Psi_{2n}(\delta_2, t) \frac{\partial T_2(x, \beta_n)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_2} - \lambda_3 \Psi_{3n}(\delta_2, t) \frac{\partial T_3(x, \beta_n)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_2} \right] - \\
 &- \left[ \lambda_2 T_2(\delta_2, t) \frac{\partial \Psi_{2n}(x, \beta_n)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_2} - \lambda_3 T_3(\delta_2, t) \frac{\partial \Psi_{3n}(x, \beta_n)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_2} \right].
 \end{aligned} \tag{33}$$

Из граничных условий (6)–(11) и (13)–(18) следует равенство нулю всех выражений в квадратных скобках. Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial t} + a_2 \beta_n^2 \bar{T}_i(\beta_n, t) &= 0, \quad t > 0, \quad -R \leq x < 0, i = 1; \quad 0 \leq x \leq \delta_2, i = 2; \\
 &\delta_2 \leq x \leq \delta_3, i = 3;
 \end{aligned} \tag{34}$$

Используя (27), найдем изображения начального условия (5):

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_{i0}(\beta_n) &= \bar{T}_i(\beta_n, 0) = \frac{\lambda_1}{a_1 R} \int_{-R}^0 (x+R)(t_0 - t_H) \Psi_{1n}(x, \beta_n) dx + \\
 &+ \frac{\lambda_2}{a_2} \int_0^{\delta_2} (t_0 - t_H) \Psi_{2n}(x, \beta_n) dx + \frac{\lambda_3}{a_3} \int_{\delta_2}^{\delta_2 + \delta_3} (t_0 - t_H) \Psi_{3n}(x, \beta_n) dx.
 \end{aligned} \tag{35}$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_{i0}(\beta_n) &= \frac{\lambda_1(t_0 - t_H)}{\beta_n \sqrt{a_1 a_2}} J_0 \left( \beta_n R \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \right) + \frac{\lambda_2(t_0 - t_H)}{\beta_n a_2} (C_3(\beta_n) - \Psi_{2n}(\delta_2, \beta_n)) + \\
 &+ \frac{\lambda_3(t_0 - t_H)}{\beta_n \sqrt{a_2 a_3}} (C_5(\beta_n) - \Psi_{2n}(\delta_2 + \delta_3, \beta_n)).
 \end{aligned} \tag{36}$$

Уравнения (34) и (36) в совокупности представляют задачу Коши для однородного линейного дифференциального уравнения первой

степени. Решение в пространстве изображений может быть найдено в виде

$$\bar{T}_i(\beta_n, t) = \bar{\Phi}_{i0}(\beta_n) e^{-a_2 \beta_n^2 t}. \quad (37)$$

Обратный переход в пространство оригиналов осуществляется по формуле

$$T_i(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_{in}(x, \beta_n)}{\|\Psi_{in}\|^2} \bar{\Phi}_{i0}(\beta_n) e^{-a_2 \beta_n^2 t}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (38)$$

Здесь квадрат нормы собственных функций

$$\begin{aligned} \|\Psi_{in}\|^2 &= \iiint_G b(x) T_i(x, t) \Psi_{in}^2(x, \beta_n) dx = \\ &= \frac{\lambda_1}{a_1 R} \int_{-R}^0 (x+R) \Psi_{1n}^2(x, \beta_n) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} \int_0^{\delta_2} \Psi_{2n}^2(x, \beta_n) dx + \\ &\quad + \frac{\lambda_3}{a_3} \int_{\delta_2}^{\delta_2 + \delta_3} \Psi_{3n}^2(x, \beta_n) dx. \end{aligned} \quad (39)$$

Окончательно решение системы дифференциальных уравнений (3)–(4) с начальными и граничными условиями (7)–(11) примет вид

$$T_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0\left(\beta_n(x+R) \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\right)}{\|\Psi_{in}\|^2} \bar{\Phi}_{i0}(\beta_n) e^{-a_2 \beta_n^2 t}; \quad (40)$$

$$T_2(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_2(\beta_n) \cos(\beta_n x) + C_3(\beta_n) \sin(\beta_n x)}{\|\Psi_{in}\|^2} \bar{\Phi}_{i0}(\beta_n) e^{-a_2 \beta_n^2 t}; \quad (41)$$

$$T_3(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_4(\beta_n) \cos\left(\beta_n \sqrt{\frac{a_2}{a_3}}(x - \delta_2)\right) + C_5(\beta_n) \sin\left(\beta_n \sqrt{\frac{a_2}{a_3}}(x - \delta_2)\right)}{\|\Psi_{in}\|^2} \bar{\Phi}_{i0}(\beta_n) e^{-a_2 \beta_n^2 t}. \quad (42)$$

Для проверки полученного решения в (40)–(42) были подставлены значения исходных параметров задачи:

Параметр .....	$L, \text{ м}$	$t_0, \text{ }^\circ\text{C}$	$t_H, \text{ }^\circ\text{C}$	$\alpha_H, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \Delta^\circ\text{C}}$
Значение .....	15	+45	-50	23,26

с учетом геометрических и физических характеристик элементов системы (табл. 1 и 2), удовлетворяющих условиям применимости данного решения.

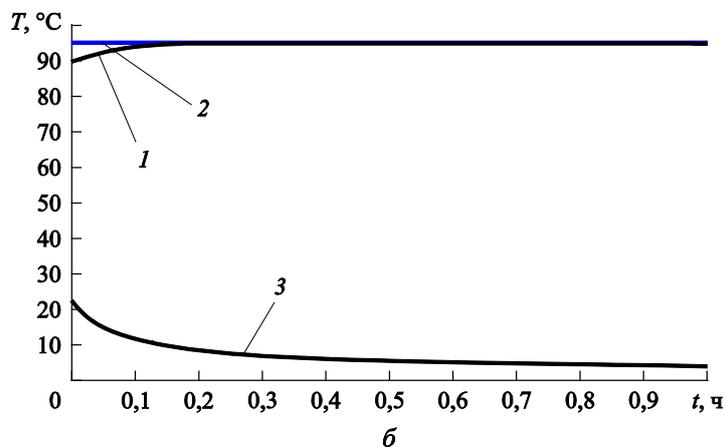
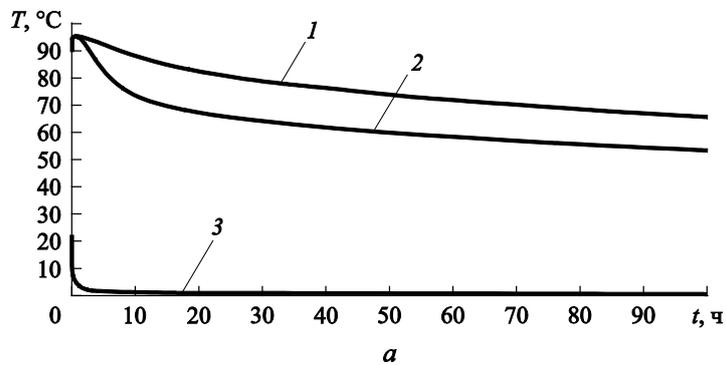
## Геометрические характеристики слоев 1–3

Номер слоя	$d_{cp}$ , м	$\delta$ , м	$\delta/d_{cp}$
1	–	0,988	–
2	2,050	0,050	0,024
3	2,269	0,145	0,064

Обозначения:  $d_{cp}$  – диаметр слоя по средней линии;  $\delta$  – толщина слоя.

Теплофизические свойства всех слоев при  $t_0 = +45 \text{ }^\circ\text{C}$ 

Номер слоя	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Теплопроводность $\lambda$ , Вт/(м·К)	Удельная теплоемкость $c$ , Дж/(кг·К)	Температуропроводность $a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с
1	1200	0,166	1256	0,1103
2	1,2	0,075	1005	62,2106
3	200	0,052	984	0,2659



**Рис. 3.** Зависимость температурных полей от времени по границам сопряжения слоев в избыточных температурах (а) и в начальный момент развития процесса теплообмена в избыточных температурах (б)

Анализ полученных рядов показывает, что они являются знакопеременными, абсолютно и равномерно сходящимися по теореме Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов. Поэтому для обеспечения высокой точности вычислений достаточно использовать только первые 100 членов суммы.

Графические зависимости изменения температурного поля на границах сопряжения слоев 1–3 от времени (рис. 3, а) указывают на высокую сходимость полученного решения. Однако начальный этап развития процесса теплопроводности (рис. 3, б) демонстрирует наличие неоднородности по границе слоев 1 и 2, что, скорее всего, обусловлено использованием разных интегральных преобразований для сопрягаемых областей при их сшивании математически в процессе решения.

Характер распределения температур в слоях 1–3 для различных моментов времени  $\tau$  позволяет судить о соответствии математической модели реальным физическим процессам теплопроводности системы коаксиальных цилиндров (рис. 4).

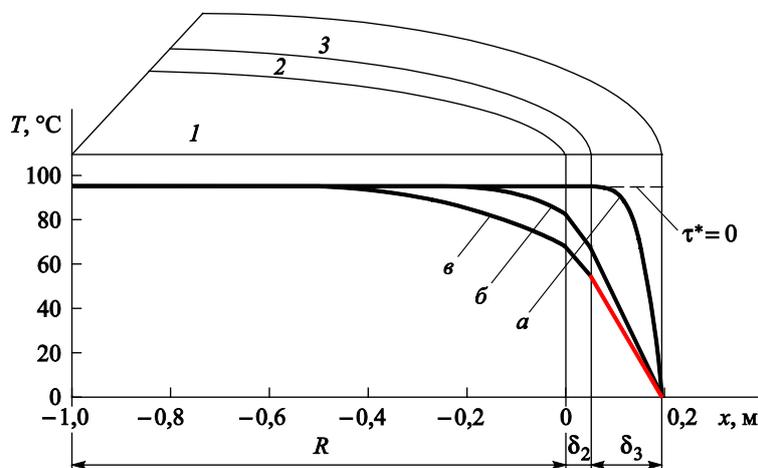


Рис. 4. Температурные поля в слоях системы коаксиальных цилиндров в момент времени  $\tau^*$ :

$$a — \tau^* = 1 \text{ ч}; \quad б — \tau^* = 20 \text{ ч}; \quad в — \tau^* = 85 \text{ ч}$$

**Заключение.** Решена задача определения аналитических зависимостей температурных полей в элементах системы коаксиальных цилиндров с использованием метода интегральных преобразований. В целях упрощения расчетной системы проведена замена тонкостенных цилиндрических стенок плоскими бесконечными пластинами той же толщины, что позволило снизить сложность ядер преобразований и, как следствие, сложность решения.

Выявлены условия применимости полученного решения:

- малые значения соотношения  $\frac{\delta}{d_{\text{ср}}} \rightarrow 0$  для всех слоев системы

коаксиальных цилиндров, кроме центрального;

- осесимметричность геометрии модели и прикладываемых граничных условий по поверхности;
- оптическая непрозрачность всех слоев системы.

Полученное решение непрерывно во всех точках области интегрирования, оно характеризуется высокой сходимостью и однородностью, за исключением начального этапа развития процесса теплопроводности.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Есьман Р.И., Жмакин Н.П., Шуб Л.И. *Расчеты процессов литья*. Минск, Высш. шк., 1977, 264 с.
- [2] Есьман Р.И., Устимович В.А. Численное решение задачи нестационарной теплопроводности в многослойных телах. *Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ*, 2007, № 6, с. 32–36. URL: <http://energy.bntu.by/jour/article/view/590> (дата обращения 18.04.2017).
- [3] Туголуков Е.Н. *Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований при автоматизированном проектировании технологического оборудования химической промышленности*. Тамбов, Изд-во ТГТУ, 2006, 116 с.
- [4] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Уравнения в частных производных математической физики*. Москва, Высш. шк., 1970, 712 с.
- [5] Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. Изд. 3-е, перераб. и доп. Москва, Высш. шк., 2001, 550 с.
- [6] Репин О.А., Заикина С.М. Некоторые новые обобщенные интегральные преобразования и их применение в теории дифференциальных уравнений. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, 2011, № 2 (23), с. 8–16. DOI: 10.14498/vsgtu913 (дата обращения 02.04.2017).
- [7] Kilbas A.A., Saigo M. *H-Transforms: Theory and Applications. Series on Analytic Methods and Special Functions*. Boca Raton, CRC Press, 2004, vol. 9, pp. 389.
- [8] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва, МГУ, 2004, 800 с.
- [9] Yanovsky I. *Partial Differential Equations: Graduate Level Problems and Solutions. Create Space Independent Publishing Platform*, 2014, 396 p.
- [10] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Вычислительная теплопередача*. Москва, Едиториал УРСС, 2014, 784 с.

Статья поступила в редакцию 19.09.2017

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Плотников И.С., Пучков В.М. Использование метода интегральных преобразований для решения задач остывания системы коаксиальных цилиндров. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 2.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-2-1729>

**Плотников Илья Сергеевич** родился в 1994 г. Студент 5-го курса, кафедра «Стартовые ракетные комплексы» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

e-mail: [pvmpuchkov@yandex.ru](mailto:pvmpuchkov@yandex.ru)

**Пучков Владимир Михайлович** родился в 1950 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1974 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Стартовые ракетные комплексы». Автор более 80 научных работ в области тепломассообмена.

e-mail: [pvmpuchkov@yandex.ru](mailto:pvmpuchkov@yandex.ru)

## Using integral transform method to solve the problem of cooling in a system of coaxial cylinders

© I.S. Plotnikov, V.M. Puchkov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article presents an analytical solution to the problem of determining temperature field distribution in a system of coaxial cylinders as it cools. We developed a mathematical model for non-steady state thermal conductivity processes, which considers perfect contact between interacting bodies. We investigated the matter of simplifying the model by replacing thin cylindrical walls with flat infinite plates of the same thickness. We obtained a solution by means of integral transforms in Cartesian and cylindrical coordinates. The study deals with a mathematical problem of describing the interface between an internal bar of the system, defined in a cylindrical coordinate system, and an adjacent flat infinite plate, defined in Cartesian coordinates in the simplified model. We plotted the results on temperature field curves in the system of coaxial cylinders for various moments in the evolution of the cooling process. This solution is valid under the following conditions: a low ratio of cylindrical layer thickness to the radius of curvature of the actual cylinder axis, optical opacity of all layers and axial symmetry of the model geometry and boundary conditions.*

**Keywords:** integral transform method, system of coaxial cylinders, non-steady state thermal conductivity, matching boundary conditions

### REFERENCES

- [1] Esman R.I., Zhmakin N.P., Shub L.I. *Raschety protsessov litya* [Computing parameters of casting processes]. Minsk, Vysshaya Shkola Publ., 1977, 264 p.
- [2] Esman R.I., Ustimovich V.A. *Energetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy i energeticheskikh obedineniy SNG — Energetika. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*, 2007, no. 6, pp. 32–36. Available at: <http://energy.bntu.by/jour/article/view/590> (accessed April 18, 2017).
- [3] Tugolukov E.N. *Reshenie zadach teploprovodnosti metodom konechnykh integralnykh preobrazovaniy pri avtomatizirovannom proektirovanii tekhnologicheskogo oborudovaniya khimicheskoy promyshlennosti* [Solving thermal conductivity problems using finite integral transforms for computer-aided design of chemical industry processing equipment]. Tambov, TSTU Publ., 2006, 116 p.
- [4] Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [Partial differential equations in mathematical physics]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1970, 712 p.
- [5] Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in thermal conductivity theory of solids]. 3rd ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001, 550 p.
- [6] Repin O.A., Zaikina S.M. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki - Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2011, no. 2 (23), pp. 8–16. DOI: 10.14498/vsgtu913 (accessed April 02, 2017).
- [7] Kilbas A.A., Saigo M. *H-Transforms: Theory and Applications. Series on Analytic Methods and Special Functions*. Boca Raton, CRC Press, 2004, vol. 9, pp. 389.

- [8] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 2004, 800 p.
- [9] Yanovsky I. *Partial Differential Equations: Graduate Level Problems and Solutions*. Create Space Independent Publishing Platform, 2014, 396 p.
- [10] Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational heat transfer]. Moscow, Editorial URSS, 2014, 784 p.

**Puchkov V.M.** (b. 1950) graduated from Moscow Higher Technical School in 1974. Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Rocket Launch Complexes. Author of over 80 scientific publications in the field of heat and mass transfer.  
e-mail: pvmpuchkov@yandex.ru

**Plotnikov I.S.** (b. 1994), fifth year student, Department of Rocket Launch Complexes, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: pvmpuchkov@yandex.ru