

В. В. Пу з и к о в а

**ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ УРОВНЯ
ДЛЯ ПРОФИЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЕГО ОБТЕКАНИЯ
МЕТОДОМ LS-STAG**

Рассматривается обтекание профиля равномерным потоком вязкой несжимаемой среды. Задача решается численно методом LS-STAG. Необходимую для LS-STAG-дискретизации функцию уровня предлагается строить по аппроксимированной кривой Безье границе профиля. Приведенные расчеты для кругового, квадратного, эллиптического и крылового профилей показывают, что даже на сравнительно грубых сетках метод LS-STAG с аппроксимированной функцией уровня позволяет получить качественно и количественно верное решение.

E-mail: valeria5555@mail.ru

Ключевые слова: *профиль, разнесенные сетки, метод LS-STAG, функция уровня, аппроксимация, базисные многочлены Бернштейна, кривая Безье.*

Для численного решения задач математической физики чаще всего применяются различные сеточные методы. Использование структурированных сеток (по сравнению с неструктурированными) позволяет, как правило, уменьшить время счета и необходимый объем оперативной памяти. В то же время построение регулярной криволинейной сетки в областях сложной формы часто оказывается затруднительным, поэтому представляют интерес методы погруженных границ [1], которые не требуют совпадения границ ячеек с границами расчетной области и позволяют решать задачи в областях сложной формы, используя прямоугольные сетки. Наиболее важным вопросом при этом является работа с усеченными ячейками, т. е. ячейками неправильной формы, которые образуются при пересечении прямоугольных ячеек с границей области течения, поскольку решающую роль для точности и устойчивости расчета играет дискретизация уравнений именно в них. Использование методов погруженных границ дает возможность решать задачи с изменяющейся в процессе счета областью течения (задачи аэроупругости, нестационарной аэродинамики, сопряженные задачи теплообмена и др.) без перестроения сетки на каждом шаге расчета.

Один из наиболее эффективных методов данного класса — метод LS-STAG (Level Set STAGgered — метод погруженных границ с функциями уровня для разнесенных сеток). Метод предложен в работе [2] и обладает, как показывают численные эксперименты, вторым порядком точности.

Точное представление погруженной границы достигается путем использования знакопеременной функции расстояния (функции уровня [3]) для ее явного представления. Использование функций уровня позволяет легко вычислить все необходимые геометрические характеристики ячеек сетки и уменьшить затраты машинного времени на обработку ячеек сложной формы.

В данной работе обсуждаются вопросы моделирования обтекания профиля потоком вязкой несжимаемой среды, при этом форма профиля в общем случае описывается набором точек.

Постановка задачи. Рассмотрим внешнее обтекание профиля равномерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности $\bar{\rho}$ (здесь и далее: \bar{A} – размерная физическая величина, A – соответствующая ей безразмерная комбинация) в расчетной области $\Omega = [0, 23\bar{D}] \times [0, 24\bar{D}]$ (рис. 1) с внешней границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (\bar{D} – характерный размер профиля, K – его граница, в общем случае заданная набором точек).

Математическая постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} = 0, \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{0}, \quad x \in [0, 23D], \quad y \in [0, 12D], \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{V}_\infty, \quad x \in [0, 23D], \quad y \in [12D, 24D], \\ \vec{v}|_{\Gamma_1} = \vec{v}|_{\Gamma_2} = \vec{v}|_{\Gamma_3} = \vec{V}_\infty, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \quad \vec{v}|_K = \vec{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma \cup K} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $x = \bar{x}/\bar{D}$, $y = \bar{y}/\bar{D}$ – безразмерные координаты, $D = 1$, $t = \bar{t} \bar{V}_\infty / \bar{D}$ – безразмерное время, $p = p(x, y, t) = \bar{p} / (\bar{\rho} \bar{V}_\infty^2)$ –

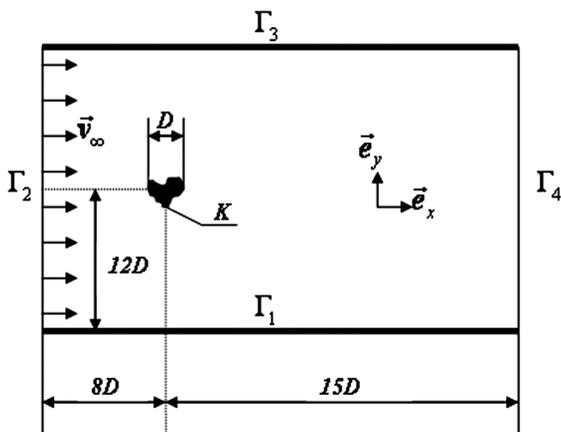


Рис. 1. Расчетная область

безразмерное давление, \vec{n} — внешняя нормаль, $Re = \bar{V}_\infty \bar{D} / \bar{\nu}$ — число Рейнольдса, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, t) = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$ — безразмерная скорость ($u = \bar{u} / \bar{V}_\infty, v = \bar{v} / \bar{V}_\infty, V_\infty = 1$).

LS-STAG-сетка для области с погруженной границей. Для описания положения погруженной границы $\Gamma^{ib} = K$ профиля Ω^{ib} введем знакопеременную функцию расстояния $\varphi(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y)$, такую что

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}) < 0, \vec{r} \in \Omega^f = \Omega \setminus \{\Omega^{ib} \cup \Gamma^{ib}\}, \\ \varphi(\vec{r}) = 0, \vec{r} \in \Gamma^{ib}, \\ \varphi(\vec{r}) > 0, \vec{r} \in \Omega^{ib}. \end{cases} \quad (2)$$

В некоторых простейших случаях функция уровня может быть задана аналитически: например, для кругового профиля диаметра D с центром в точке $(8D, 12D)$ функция уровня имеет вид

$$\varphi(x, y) = 0,5 D - \sqrt{(x - 8D)^2 + (y - 12D)^2}. \quad (3)$$

В Ω вводится прямоугольная сетка с ячейками $\Omega_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$. Ячейки, через которые проходит погруженная граница, являются усеченными, т. е. содержат помимо жидкой части области твердую. В каждой усеченной ячейке $\Omega_{i,j}$ погруженная граница представляется отрезком прямой, положения концов которого определяются линейной интерполяцией величины $\varphi_{i,j} = \varphi(x_i, y_j)$.

Граница $\Gamma_{i,j}$ ячейки $\Omega_{i,j}$ разбивается в общем случае на пять элементарных граней:

$$\Gamma_{i,j} = \Gamma_{i,j}^e \cup \Gamma_{i,j}^w \cup \Gamma_{i,j}^n \cup \Gamma_{i,j}^s \cup \Gamma_{i,j}^{ib},$$

при этом используются обозначения сторон света (e — восток, w — запад, n — север, s — юг), $\Gamma_{i,j}^{ib}$ — твердая часть границы $\Gamma_{i,j}$ — присутствует только в усеченных ячейках.

Для определения типов усеченных ячеек введем коэффициенты заполнения ячеек $\vartheta_{i,j}^u$ и $\vartheta_{i,j}^v$, которые принимают значения из отрезка $[0, 1]$ и показывают часть ячейки, занятую жидкостью на гранях $\Gamma_{i,j}^e$ и $\Gamma_{i,j}^n$ соответственно. Определим их, используя одномерную линейную интерполяцию функций $\varphi(x_i, y)$ на отрезке $[y_{j-1}, y_j]$ и $\varphi(x, y_j)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ соответственно:

$$\vartheta_{i,j}^u = \frac{\min(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j})}{\min(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j}) - \max(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j})},$$

$$\vartheta_{i,j}^v = \frac{\min(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j})}{\min(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j}) - \max(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j})}.$$

Для программной идентификации типа усеченной ячейки каждой ячейке присваивается номер в троичной системе счисления по следующим правилам: полностью твердая грань обозначается нулем, полностью жидкая — единицей, “твердо-жидкая” грань — двойкой, причем номер формируется начиная с восточной грани против часовой стрелки. Таким образом, тип каждой ячейки кодируется четырехзначным троичным числом.

Построение функции уровня в общем случае. Пусть граница профиля K задана набором точек $\{K_1, \dots, K_N\}$, $K_i = (x_{K_i}, y_{K_i})$, $i = \overline{1, N}$. Поскольку на практике координаты точек могут быть заданы с некоторой погрешностью, аппроксимировать границу профиля интерполяцией нецелесообразно.

При выборе вида аппроксимирующей кривой $P_K(x)$ нужно учитывать две особенности задачи. Во-первых, гладкость $P_K(x)$ должна быть “управляемой”, т. е. следует предусмотреть возможность моделирования как гладкого сопряжения участков границы профиля, так и изгибов, в т. ч. и острых кромок (например, на крыловом профиле). Во-вторых, для построения функции уровня нужно определять расстояние от произвольной точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ до $P_K(x)$. Для того чтобы вычислить это расстояние, необходимо найти на $P_K(x)$ точку (\tilde{x}, \tilde{y}) , $\tilde{y} = P_K(\tilde{x})$, такую что при $x = \tilde{x}$ функция $\rho(x) = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - P_K(x))^2}$ имеет минимум. Записав необходимое условие экстремума, получаем, что при условии сходимости производных (т. е. при условии, что $dP_K(x)/dx$ аппроксимирует производную исходной функции) \tilde{x} является корнем уравнения

$$(x_0 - x) + (P_K(x) - y_0) \frac{dP_K(x)}{dx} = 0, \quad (4)$$

которое может быть решено численно, например, методом деления отрезка пополам. Отметим, что не всякая равномерная аппроксимация функции обеспечивает равномерную аппроксимацию ее производной [4].

Наиболее удачна для поставленной задачи аппроксимация границы профиля K кривой Безье — параметрической кривой, задаваемой многочленом в форме Бернштейна (линейной комбинацией базисных полиномов Бернштейна [4]):

$$P_K(t) = \sum_{i=0}^{N-1} y_{K_{i+1}} C_i^N t^i (1-t)^{N-i}, \quad t \in [0, 1],$$

$t = t(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $x \in [a, b]$, $C_i^N = \frac{N!}{i!(N-i)!}$ — биномиальный коэффициент.

Такой выбор аппроксимирующей кривой обеспечивает выполнение вышеперечисленных условий, и, кроме того, вычисление $dP_K(t(x))/dx$ для (4) не представляет трудности, поскольку $P_K(t(x))$ — полином.

Подчеркнем, что решать уравнение (4) необходимо не во всей расчетной области, а лишь в небольшой окрестности профиля, где коэффициенты заполнения ячеек могут отличаться от нуля и единицы, и для их вычисления важно знать как можно более точные значения функции уровня. Поскольку в рассматриваемой задаче профиль неподвижен и недеформируем, вычисление функции уровня в узлах сетки производится один раз в начале расчета (на этапе построения сетки).

Результаты расчетов. При использовании LS-STAG-дискретизации компоненты гидродинамической силы $\vec{F} = (F_{xa}, F_{ya})$, действующей на погруженную границу (F_{xa} — сила лобового сопротивления, F_{ya} — подъемная сила), вычисляются по формулам [2]

$$F_{xa} = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}} \left[(\vartheta_{i-1,j}^u - \vartheta_{i,j}^u) \Delta y_j \left(p_{i,j} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \right) - \nu \text{Quad}_{i,j}^{ib} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \cdot \vec{n} \right) \right],$$

$$F_{ya} = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}} \left[-\nu \text{Quad}_{i,j}^{ib} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x \cdot \vec{n} \right) + (\vartheta_{i,j-1}^v - \vartheta_{i,j}^v) \Delta x_i \left(p_{i,j} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right) \right],$$

где $\sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}^{ib}}$ означает суммирование по всем усеченным ячейкам,

а $\text{Quad}_{i,j}^{ib}$ — квадратуры от касательных напряжений, которые адаптируются для каждого типа усеченных ячеек: они зависят от положения точки вычисления касательных напряжений и вычисляются по формуле трапеций.

В тестовых расчетах моделировалось обтекание профилей и вычислялись их безразмерные стационарные аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления C_{xa} и подъемной силы C_{ya} , получаемые осреднением по большому промежутку времени нестационарных нагрузок $C_{xa}(t) = \frac{2F_{xa}}{\rho V_\infty^2}$ и $C_{ya}(t) = \frac{2F_{ya}}{\rho V_\infty^2}$, а также безразмерная частота схода вихрей — число Струхала Sh.

Далее на примере нескольких профилей покажем, что аппроксимация границы профиля кривой Безье позволяет строить необходимую для LS-STAG-дискретизации функцию уровня достаточно точно для

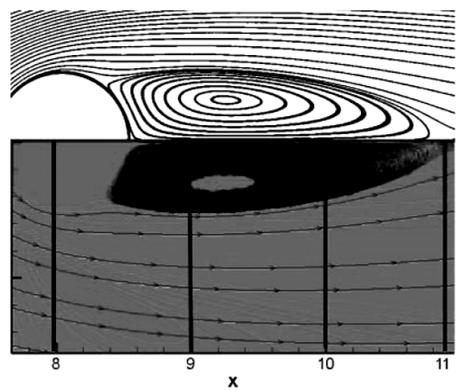
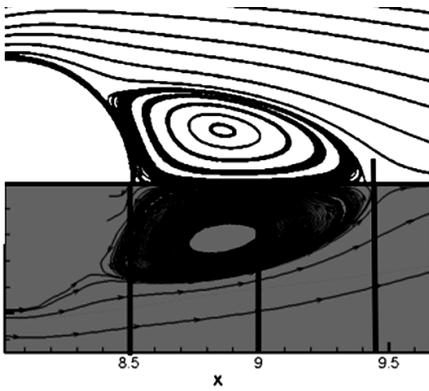


Рис. 2. Стационарное безотрывное обтекание кругового профиля: линии тока при $Re = 20$ (слева) и $Re = 40$ (справа) (сверху – из работы [5], снизу – расчет методом LS-STAG

получения хорошо согласующихся с экспериментальными и расчетными значениями аэродинамических коэффициентов и числа Струхаля.

Круговой профиль. Поскольку для кругового профиля функция уровня может быть задана аналитически (формулой (3)), на его примере покажем, что использование функции уровня, построенной численно по аппроксимации границы профиля (LS-STAG-b, 20 точек на профиле), позволяет получить результаты, достаточно близкие к расчетам при аналитическом задании функции уровня (LS-STAG-a), а также к данным из работ [5–8], как в случае стационарных течений ($Re = 20$ и $Re = 40$, рис. 2), так и в случае нестационарных ($Re = 100$, $Re = 200$ и $Re = 1000$, табл. 1 и 2).

Таблица 1

Обтекание кругового профиля: значения стационарного аэродинамического коэффициента лобового сопротивления C_{xa}

Re	100	200	1000
Эксперимент			
Zdravkovich [6]	1,21–1,41	–	–
Расчет			
LS-STAG-a, 120×148	1,310	1,330	1,187
LS-STAG-b, 120×148	1,308	1,322	1,178
LS-STAG-a, 240×204	1,320	1,331	1,405
LS-STAG-b, 240×204	1,319	1,330	1,392
Cheny [2] (LS-STAG-a, 300×260)	1,322	1,332	1,493
Cheny [2] (LS-STAG-a, 550×350)	1,317	1,327	1,530
Henderson [7]	1,350	1,341	1,509
He [8]	1,353	1,355	1,519

Обтекание кругового профиля: значения числа Струхала Sh

Re	100	200	1000
Эксперимент			
Zdravkovich [6]	0,16–0,17	—	—
Расчет			
LS-STAG-a, 120 × 148	0,172	0,200	0,259
LS-STAG-b, 120 × 148	0,175	0,212	0,235
LS-STAG-a, 240 × 204	0,170	0,200	0,249
LS-STAG-b, 240 × 204	0,171	0,202	0,251
Cheny [2] (LS-STAG-a, 300 × 260)	0,170	0,200	0,247
Cheny [2] (LS-STAG-a, 550 × 350)	0,170	0,200	0,241
Henderson [6]	0,164	0,197	0,237
He [7]	0,167	0,198	0,239

Квадратный профиль. Если управляющие точки находятся на одной прямой, кривая Безье, построенная по ним, вырождается в отрезок. Благодаря этому свойству $P_K(t(x))$ в точности совпадает с K . В качестве примера на рис. 3 изображены линии тока при обтекании такого профиля (сетка 120×148 , $Re = 200$). Полученные значения C_{xa} и Sh хорошо согласуются с результатами работ [9–12] даже при расчете на самой грубой из используемых сеток — 120×148 (табл. 3 и 4).

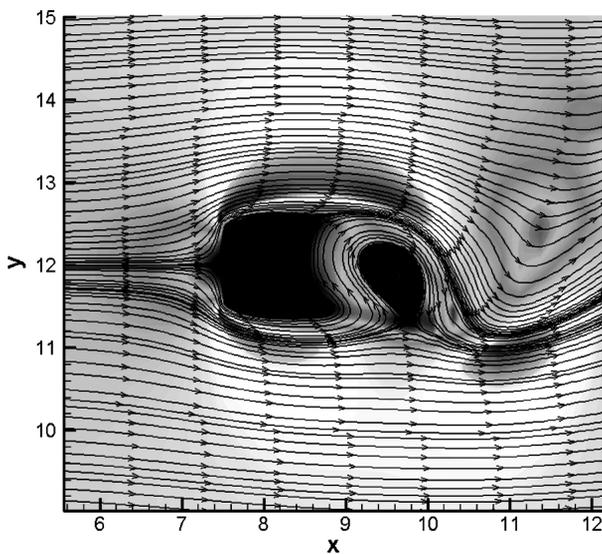


Рис. 3. Обтекание квадратного профиля:
линии тока при $Re = 200$

Обтекание квадратного профиля: значения стационарного аэродинамического коэффициента лобового сопротивления C_{xa}

Re	Коэффициент лобового сопротивления C_{xa} (расчет)			
	Данная работа	Saha [9]	Davis [10]	Franke [11]
100	1,55	1,51	1,55	–
200	1,54	1,67	–	1,65
250	1,65	1,77	1,77	1,72
300	1,82	1,89	–	1,89
400	1,85	2,21	1,88	–

Таблица 4

Обтекание квадратного профиля: значения числа Струхала Sh

Re	Число Струхала Sh				
	Расчет				Эксперимент
	Данная работа	Saha [9]	Davis [10]	Franke [11]	
100	0,154	0,159	0,154	–	0,141–0,145
200	0,147	0,163	–	0,157	0,138–0,145
250	0,141	0,142	0,165	0,141	0,139–0,143
300	0,138	0,146	–	0,130	0,137–0,139
400	0,128	0,167	0,159	–	0,129–0,135

Эллиптический профиль. В качестве характерного размера для эллиптического профиля, как и в работе [13], была выбрана проекция длины L_x большой полуоси эллипса K на ось Ox , т. е. $D = L_x \cdot \cos \alpha$ (α – угол атаки). Форма профиля задается отношением L_y/L_x , где L_y – длина малой полуоси эллипса K . На рис. 4 и 5 представлены графики зависимостей $C_{xa}(t)$ и $C_{ya}(t)$ для двух эллиптических профилей. При $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$ для них также были рассчитаны C_{xa}

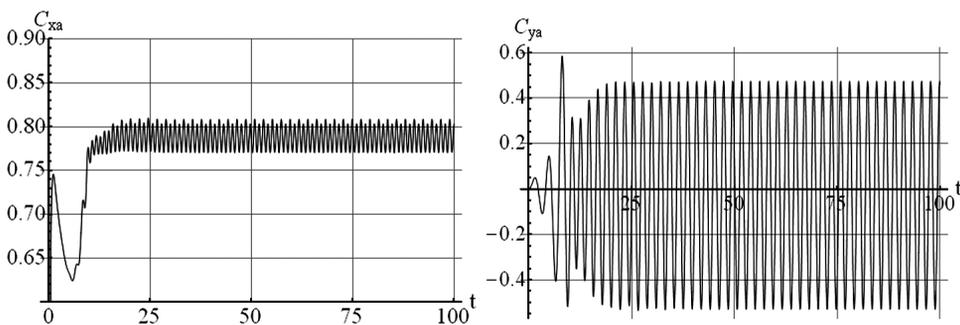


Рис. 4. Обтекание эллиптического профиля:

$C_{xa}(t)$ (слева) и $C_{ya}(t)$ (справа) при $L_y/L_x = 0,5$, $\alpha = 0^\circ$, $Re = 525$

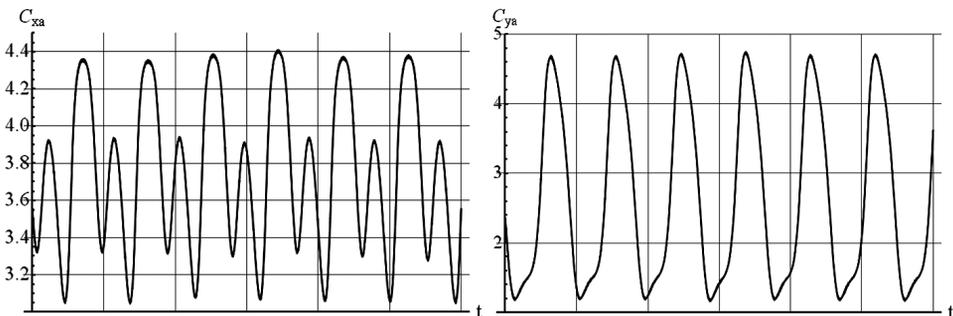


Рис. 5. Обтекание эллиптического профиля:
 $C_{xa}(t)$ (слева) и $C_{ya}(t)$ (справа) при $L_y/L_x = 0,2$, $\alpha = 45^\circ$, $Re = 163$

и Sh (табл. 5). Для второго профиля на рис. 6 показаны распределение модуля скорости и линии тока при $Re = 163$. Для всех расчетов использовалась сетка 240×204 .

Таблица 5

Обтекание эллиптического профиля: значения стационарного аэродинамического коэффициента лобового сопротивления C_{xa} и числа Струхала Sh

Параметры расчета			C_{xa}		Sh	
L_y/L_x	α	Re	Данная работа	Mittal [13]	Данная работа	Mittal [13]
0,5	0°	525	0,79	0,78	0,22	0,21
0,5	45°	525	2,53	2,52	0,25	0,23
0,5	0°	1000	0,61	0,61	0,21	0,20
0,2	45°	163	3,76	3,71	0,16	0,19

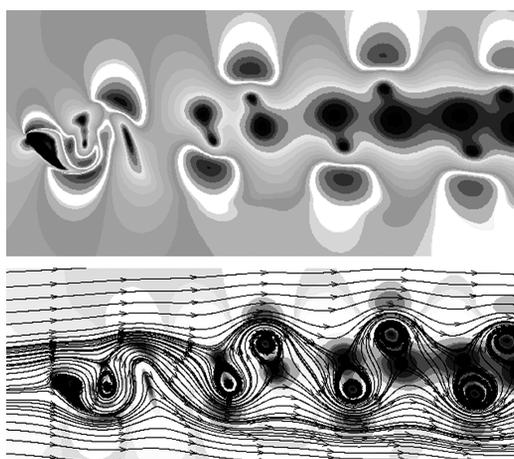


Рис. 6. Обтекание эллиптического профиля:
 распределение модуля скорости (сверху) и линии тока (снизу) при $L_y/L_x = 0,2$, $\alpha = 45^\circ$, $Re = 163$

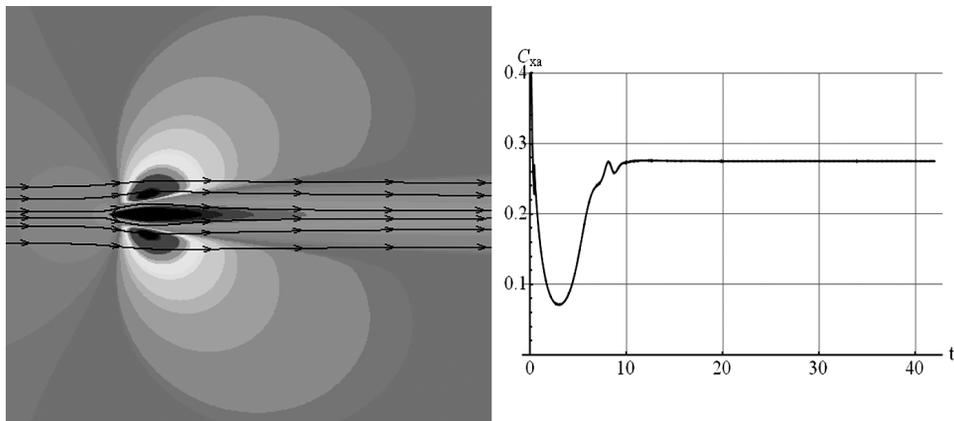


Рис. 7. Стационарное безотрывное обтекание крылового профиля ($Re = 200$)

Крыловой профиль. В атласах аэродинамических характеристик крыловых профилей, например [14], форма профиля задается набором точек, поэтому функцию уровня можно построить вышеописанным способом. Рис. 7 иллюстрирует обтекание симметричного крылового профиля ЦАГИ серии В (относительная толщина 20%) при $Re = 200$ (сетка 240×204).

Заключение. Аппроксимация границы профиля кривой Безье позволяет достаточно просто строить функцию уровня, необходимую для LS-STAG дискретизации. Приведенные расчеты для кругового, квадратного, эллиптического и крылового профилей показывают, что даже на сравнительно грубых сетках метод LS-STAG с аппроксимированной функцией уровня позволяет получить качественно и количественно верное решение. Предложенный подход можно использовать и для более сложной задачи — моделирования обтекания системы профилей, а также обобщить для решения сопряженных задач аэроупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Iaccarino G., Verzicco R. Immersed boundary technique for turbulent flow simulations // Appl. Mech. Rev. – 2003. – № 56. – P. 331–347.
2. Chen Y., Botella O. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties // J. Comput. Phys. – 2010. – No. 229. – P. 1043–1076.
3. Osher S., Fedkiw R. P. Level set methods and dynamic implicit surfaces. N.-Y.: Springer, 2003. – 273 p.
4. К а л и т к и н Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
5. Ye T., Mittal R., Udaykumar H. S., Shyy W. An accurate Cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries // J. Comput. Phys. – 1999. – No. 156. – P. 209–240.
6. Zdravkovich M. M. Flow around circular cylinders. Vol. 1. Oxford: OUP, 1997. – 694 p.

7. H e n d e r s o n R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition // J. Fluid Mech. – 1997. – No. 352. – P. 65–112.
8. H e J. W., G l o v i n s k i R., M e t c a l f e R., N o r d l a n d e r A., T r i a - u x J. P. Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder. Part I: Oscillatory cylinder rotation // J. Comput. Phys. – 2000. – No. 163. – P. 87–117.
9. S a h a A. K., H u r a l i d h a r K., B i s w a s G. Transition and chaos in two-dimensional flow past a square cylinder // J. Eng. Mech. – 2000. – No. 126. – P. 523–532.
10. D a v i s R. W., M o o r e E. F., P u r t e l l L. P. A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders // Phys. Fluid. – 1984. – No. 27. – P. 46–59.
11. F r a n k e R., R o d i W., S c h o n u n g B. Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders // J. Wind Engr. Indust. Aero. – 1990. – No. 35. – P. 237–257.
12. O k a j i m a A. Strouhal numbers of rectangular cylinders // J. Fluid Mech. – 1982. – No. 128. – P. 379–398.
13. M i t t a l R., B a l a c h a n d a r S. Direct numerical simulation of flow past elliptic cylinders // J. Comput. Phys. – 1996. – No. 124. – P. 351–367.
14. У ш а к о в Б. В. и др. Атлас аэродинамических характеристик профилей крыльев. – М.: Издание БНТ НКАП при ЦАГИ, 1940. – 340 с.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012