

## Двусторонние оценки модулей упругости пористого твердого тела

© В.С. Зарубин, И.Ю. Савельева, Е.С. Сергеева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Двойственная вариационная формулировка задачи линейной упругости пористого неоднородного твердого тела, состоящего из хаотически ориентированных изотропных фрагментов с различными упругими свойствами, использована для построения двусторонних оценок эффективных упругих характеристик такого тела. Проведены количественный анализ этих оценок и сравнение с известными опубликованными результатами. Представленные расчетные соотношения могут быть применены для прогнозирования эффективных значений модулей упругости пористых композиционных материалов, армированных изотропными включениями, а также материалов, полученных методами порошковой металлургии и путем самораспространяющегося высокотемпературного синтеза.*

**Ключевые слова:** пористое твердое тело, эффективные значения модулей упругости, двойственная вариационная формулировка, двусторонние оценки

**Введение.** Пористые твердые тела находят широкое применение в качестве конструкционных и теплозащитных материалов в современной технике. К таким телам относится большая группа композиционных материалов (композитов), пористость которых возникает на стадии подготовки и смешения компонентов композита, при полимеризации связующего [1] и, кроме того, развивается в процессе нагружения, в том числе при знакопеременных нагрузках [2]. При технологических процессах получения керамических материалов, спекания порошков и самораспространяющегося высокотемпературного синтеза также неизбежно возникают поры в получаемом материале [3–5].

В различных областях техники к свойствам пористых материалов предъявляют разные требования, но в большинстве случаев одним из важных факторов, определяющих возможную сферу применения таких материалов, является комплекс их механических характеристик, в котором важную роль играют модули упругости. Значения этих модулей для конкретных пористых материалов обычно находят экспериментальным путем, но по мере совершенствования технологии получения таких материалов и расширения сферы их применения возникает необходимость прогнозирования упругих характеристик и выявления путей их улучшения. Для количественной оценки модулей упругости пористых материалов и выявления зависимости их упругих характеристик от состава и структуры таких материалов применяются методы математического моделирования, использующие современные модели механики сплошной среды [6, 7].

Данная работа посвящена построению двусторонних оценок возможных эффективных значений модулей упругости пористого тела, в том числе для случая пористого тела, каркас которого состоит из однородного материала, когда применение известных методов не позволяет получить корректную нижнюю границу.

**Основные соотношения и допущения.** Рассмотрим пористое неоднородное твердое тело, состоящее из упругоизотропных фрагментов. Пусть для этого тела объемом  $V$  с объемной пористостью  $C_*$  и суммарным объемом пор  $V_* = C_*V$  в точках  $M \in V' = V \setminus V_*$  известны значения объемного модуля упругости  $K(M)$  и модуля сдвига  $G(M)$  материала соответствующего фрагмента.

Если ввести фиксированную прямоугольную декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , то упругие свойства каждого фрагмента можно характеризовать определенными в этой системе компонентами [7]

$$C_{ijmn}(M) = 3K(M)V_{ijmn} + 2G(M)D_{ijmn}, \quad i, j, m, n = 1, 2, 3, \quad (1)$$

тензора четвертого ранга коэффициентов упругости или компонентами

$$S_{ijmn}(M) = V_{ijmn}/(3K(M)) + D_{ijmn}/(2G(M)), \quad i, j, m, n = 1, 2, 3, \quad (2)$$

обратного ему тензора коэффициентов податливости, где  $V_{ijmn}$ ,  $D_{ijmn}$  — компоненты объемной и девиаторной составляющих единичного тензора четвертого ранга с компонентами  $I_{ijmn}$ .

Данные составляющие можно представить через символ Кронекера  $\delta_{ij}$ , равный единице при  $i = j$  и нулю при  $i \neq j$  и определяющий компоненты единичного тензора второго ранга [8]:

$$V_{ijmn} = \delta_{ij}\delta_{mn}/3; \quad D_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2 - V_{ijmn}. \quad (3)$$

При хаотической ориентации фрагментов рассматриваемое твердое тело будет макроскопически изотропным [8] и для описания его упругих свойств достаточно двух независимых параметров, в качестве которых выберем подлежащие оценке объемный модуль упругости  $K$  и модуль сдвига  $G$ .

Этим модулям можно поставить в соответствие изотропные тензоры коэффициентов упругости и податливости с компонентами соответственно

$$C_{ijmn}^\circ = 3KV_{ijmn} + 2GD_{ijmn}; \quad S_{ijmn}^\circ = V_{ijmn}/(3K) + D_{ijmn}/(2G). \quad (4)$$

Каждый из тензоров четвертого ранга имеет по два линейных инварианта, значения которых не зависят от ориентации координатных осей. Для тензоров с компонентами, определенными соотношениями (4), эти инварианты с учетом формул (3) можно записать в следующем виде [7] (здесь и далее использовано правило суммирования слагаемых по повторяющимся в сомножителях латинским индексам):

$$C_{iimn}^{\circ} = C_{ijmn}^{\circ} V_{ijmn} = 9K; \quad C_{imim}^{\circ} = C_{ijmn}^{\circ} D_{ijmn} = 10G + 3K; \quad (5)$$

$$S_{iimn}^{\circ} = S_{ijmn}^{\circ} V_{ijmn} = 1/K; \quad S_{imim}^{\circ} = S_{ijmn}^{\circ} D_{ijmn} = 5/2G + 1/3K. \quad (6)$$

Связь между компонентами напряжений  $\sigma_{ij}(M)$  и деформации  $\varepsilon_{ij}(M)$  тензоров второго ранга в отдельных фрагментах будут определять соотношения  $\sigma_{ij}(M) = C_{ijmn}(M)\varepsilon_{mn}(M)$  или  $\varepsilon_{ij}(M) = S_{ijmn}(M)\sigma_{mn}(M)$ ,  $M \in V'$ , а в порах при  $M \in V$  примем  $\sigma_{ij}(M) \equiv 0$  и  $C_{ijmn}(M) \equiv 0$ . Тогда средние по всему объему  $V$  рассматриваемого пористого тела значения компонент тензоров напряжений и деформации примут вид

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V'} \sigma_{ij}(M) dV(M); \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V'} \varepsilon_{ij}(M) dV(M). \quad (7)$$

Эффективными будем считать искомые значения  $K$  и  $G$ , которые входят в соотношения (4) и связывают между собой средние значения компонент тензоров напряжений и деформации, т. е. удовлетворяют равенствам

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijmn}^{\circ} \bar{\varepsilon}_{mn}; \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = S_{ijmn}^{\circ} \bar{\sigma}_{mn}. \quad (8)$$

Значения модулей упругости определим из условия совпадения объемной плотности потенциальной энергии деформации макроскопически изотропного пористого твердого тела со средним значением этой плотности в объеме  $V$  с учетом упругих свойств фрагментов этого тела. Такое условие, используя формулы (4) и (8), можно представить либо через компоненты тензоров упругости

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijmn}^{\circ} \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{mn} = \frac{1}{2V} \int_{V'} C_{ijmn}(M) \varepsilon_{ij}(M) \varepsilon_{mn} dV, \quad (9)$$

либо через компоненты тензоров податливости

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} S_{ijmn}^{\circ} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{mn} = \frac{1}{2V} \int_{V'} S_{ijmn}(M) \sigma_{ij}(M) \sigma_{mn} dV. \quad (10)$$

Значения интегралов, входящих в равенства (9) и (10), оценим, используя двойственную вариационную формулировку задачи линейной упругости неоднородного пористого твердого тела, состоящего из хаотически ориентированных изотропных фрагментов.

**Двойственная вариационная формулировка задачи.** Истинному напряженно-деформированному состоянию линейно упругого твердого тела соответствуют совпадающие между собой экстремальные значения двух альтернативных функционалов (наименьшее значение функционала Лагранжа и наибольшее значение функционала Кастилиано [7]). Эти функционалы входят в двойственную вариационную формулировку задачи линейной упругости неоднородного твердого тела. На распределении перемещений, соответствующем деформированному состоянию тела, отличающемуся от истинного, значение функционала Лагранжа будет превышать экстремальное значение, а значение функционала Кастилиано на распределении напряжений, не совпадающем с истинным, наоборот, будет меньше экстремального. Если на внешней поверхности пористого тела и на поверхности пор заданы проекции вектора перемещения, то функционал Лагранжа  $J_1$  содержит лишь интеграл, представленный в правой части соотношения (9), а при задании на этих поверхностях проекций вектора плотности поверхностных сил в выражение для функционала Кастилиано  $J_2$  входит только интеграл из правой части соотношения (10), взятый с обратным знаком.

На внешней поверхности  $S$  рассматриваемого твердого тела можно задать такие значения проекций на координатные оси вектора перемещения, которые приводят к линейным зависимостям от координат проекций  $u_i^\circ(M)$  ( $M \in V$ ) вектора перемещений. Этим зависимостям, согласно соотношениям Коши  $\varepsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ , соответствуют компоненты  $\varepsilon_{ij}^\circ = \text{const}$  тензора деформации, вследствие второй формулы (7) совпадающие с компонентами  $\bar{\varepsilon}_{ij}$ . Такие распределения перемещений являются допустимыми для функционала Лагранжа, минимизируемого на истинном распределении перемещений и удовлетворяющего в данном случае неравенству

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_V C_{ijmn} \varepsilon_{ij}^\circ \varepsilon_{mn}^\circ dV \geq \frac{1}{2} \int_V C_{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} dV = J_1^*, \quad (11)$$

где  $J_1^*$  — наименьшее значение функционала, достигаемое на истинном распределении  $\varepsilon_{ij}(M)$  ( $M \in V'$ ) компонент тензора деформации.

Поскольку рассмотренный выше подбор линейных зависимостей  $u_i^\circ(M)$  ( $M \in V'$ ) произволен, среди них возможно такое сочетание,

которое обеспечит удовлетворение равенства (8). Тогда вместо соотношения (11) можно записать

$$\frac{1}{2} \int_{V'} C_{ijmn} \varepsilon_{ij}^{\circ} \varepsilon_{mn}^{\circ} dV \geq \frac{V}{2} C_{ijmn}^{\circ} \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{mn}.$$

Отсюда с учетом равенств  $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{mn}^{\circ}$  следует

$$\int_{V'} C_{ijmn} dV \geq C_{ijmn}^{\circ} V.$$

После умножения полученного неравенства сначала на  $V_{ijmn}$ , а затем на  $D_{ijmn} - V_{ijmn}/3$ , с учетом формул (4) получим соотношения, содержащие линейные инварианты тензоров коэффициентов упругости:

$$\int_{V'} C_{iimm}(M) dV(M) \geq C_{iimm}^{\circ} V = 9KV; \quad (12)$$

$$\left( \int_{V'} C_{imim}(M) - C_{iimm}/3 \right) dV(M) \geq (C_{imim}^{\circ} - C_{iimm}^{\circ}/3) V = 10GV. \quad (13)$$

Пусть теперь на внешней поверхности  $S$  пористого тела и на поверхностях пор заданы проекции вектора плотности поверхностных сил, вызывающие в объеме  $V'$  этого тела напряженное состояние с компонентами  $\sigma_{ij}^{\circ} = \text{const}$  тензора напряжений, что в соответствии с первой формулой (7) приводит к равенству

$$\bar{\sigma}_{ij} = (1 - C_*) \sigma_{ij}^{\circ}. \quad (14)$$

Такое распределение напряжений является допустимым для функционала Кастилиано, максимизируемого на истинном распределении напряжений и удовлетворяющего в данном случае неравенству

$$J_2 = -\frac{1}{2} \int_{V'} S_{ijmn} \sigma_{ij}^{\circ} \sigma_{mn}^{\circ} dV \leq -\frac{1}{2} \int_{V'} S_{ijmn} \sigma_{ij} \sigma_{mn} dV = J_2^*. \quad (15)$$

Здесь  $J_2^*$  — наибольшее значение функционала, достигаемое на истинном распределении  $\sigma_{ij}(M)$  ( $M \in V'$ ) компонент тензора напряжений.

Вследствие произвольности подбора проекций вектора плотности поверхностных сил возможно такое сочетание проекций, которое обеспечит удовлетворение равенства (10). Тогда соотношение (15) можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \int_{V'} S_{ijmn} \sigma_{ij}^{\circ} \sigma_{mn}^{\circ} dV \geq \frac{V}{2} S_{ijmn}^{\circ} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{mn},$$

что позволяет с учетом равенств (14) записать

$$\int_{V'} S_{ijmn} dV \geq S_{ijmn}^{\circ} V (1 - C_*)^2.$$

Умножая это неравенство сначала на  $V_{ijmn}$ , а затем на  $D_{ijmn} - V_{ijmn}/3$ , получаем два соотношения, содержащие линейные инварианты тензоров коэффициентов податливости:

$$\int_{V'} S_{ijmn}(M) dV(M) \geq S_{ijmn}^{\circ} (1 - C_*)^2 = \frac{(1 - C_*)^2}{K}; \quad (16)$$

$$\left( \int_{V'} S_{imim}(M) - S_{iimm}/3 \right) dV(M) \geq (S_{imim}^{\circ} - S_{iimm}^{\circ}/3) (1 - C_*)^2 = \frac{5(1 - C_*)^2}{2G}. \quad (17)$$

Из приведенных выше свойств функционалов Лагранжа и Кастилиано следуют неравенства  $J_1 \geq J_1^*$  и  $J_2^* \geq J_2$ , позволяющие представить двусторонние оценки эффективных значений модулей упругости рассматриваемого твердого тела через модули упругости и доли объема этого тела, занимаемые его отдельными фрагментами.

**Двусторонние оценки эффективных модулей.** Пусть рассматриваемое неоднородное пористое тело состоит из  $N$  фрагментов, и фрагмент с номером  $\alpha = \overline{1, N}$  имеет объем  $V_{\alpha}$ , объемный модуль упругости  $K_{\alpha}$  и модуль сдвига  $G_{\alpha}$ . Тогда доля суммарного объема  $V$  тела, занимаемая этим фрагментом, будет равна  $C_{\alpha} = V_{\alpha}/V$ , причем

$$\sum_{\alpha=1}^N C_{\alpha} = 1 - C_*.$$

Из соотношения (12), применяя первую формулу (5) к каждому из фрагментов, получаем верхнюю оценку эффективного значения объемного модуля данного тела в виде

$$K^+ = \sum_{\alpha=1}^N C_{\alpha} K_{\alpha} \geq K. \quad (18)$$

Применив первую формулу (6) к каждому из фрагментов, из соотношения (16) получим формулу для нижней оценки эффективного значения этого модуля:

$$K^- = (1 - C_*)^2 \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{C_\alpha}{K_\alpha} \right)^{-1} \leq K. \quad (19)$$

Аналогичное применение второй формулы (5) к соотношению (13) приводит к верхней оценке эффективного значения модуля сдвига данного тела в виде

$$G^+ = \sum_{\alpha=1}^N C_\alpha G_\alpha \geq G. \quad (20)$$

Применение второй формулы (6) к соотношению (17) позволяет получить нижнюю оценку эффективного значения этого модуля:

$$G^- = (1 - C_*)^2 \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{C_\alpha}{G_\alpha} \right)^{-1} \leq G. \quad (21)$$

Формулы (18) и (20) можно также получить с привлечением теории смесей [9], полагая в порах значения объемного модуля упругости и модуля сдвига равными нулю и представляя оценки модулей как линейные комбинации параметров жесткости фрагментов тела, определяемых модулями упругости. При этом коэффициентами линейных комбинаций являются объемные доли  $C_\alpha$  фрагментов в неоднородном теле. Однако из этой теории (в отличие от использованного выше вариационного подхода) не следует, что такие формулы определяют именно верхние оценки эффективных значений указанных модулей упругости. Для неоднородного тела в теории смесей рассматривают также оценки, которые следуют из равенства характеристик податливости такого тела и линейных комбинаций податливостей фрагментов, определяя податливости величинами, обратными модулям упругости. Применительно к пористому телу податливость пор будет бесконечно большой, что приведет в итоге к нулевым нижним оценкам модулей упругости этого тела. Если же не учитывать влияние пор, то нижние оценки модулей упругости пористого тела будут некорректными и могут оказаться, согласно теории смесей, даже выше верхних оценок, определяемых формулами (18) и (20).

Если пористое твердое тело является пористым композитом с включениями из одного и того же изотропного материала с модулями упругости  $K_1$ ,  $G_1$  и матрицей с модулями упругости  $K_2$ ,  $G_2$ , то формулы (18)–(21) можно представить в виде

$$K^+ = C_1 K_1 + C_2 K_2 \geq K \geq (1 - C_*)^2 / (C_1 / K_1 + C_2 / K_2) = K^-; \quad (22)$$

$$G^+ = C_1 G_1 + C_2 G_2 \geq G \geq (1 - C_*)^2 / (C_1 / G_1 + C_2 / G_2) = G^-, \quad (23)$$

где  $C_1, C_2$  — объемные доли включений и матрицы соответственно, причем  $C_1 + C_2 = 1 - C_*$ .

**Эффективные модули пористого однородного материала.** При  $N=1$  каркас пористого твердого тела состоит из однородного материала с модулями упругости  $K_1$  и  $G_1$ . Тогда использованная при построении двойственной вариационной формулировки задачи структурная модель пористого тела в виде комбинации не взаимодействующих между собой фрагментов и пор приводит к формальному совпадению верхней и нижней оценок каждого из модулей упругости. Действительно, в этом случае  $C_1 = 1 - C_*$ , и поэтому неравенства (22) и (23) переходят в равенства  $K = (1 - C_*)K_1$  и  $G = (1 - C_*)G_1$  соответственно. Такой результат обусловлен особенностью принятой выше структурной модели пористого тела, которая при  $N=1$  представляет его как однородное с объемом  $V$ , но вклад в упругие характеристики этого тела вносит материал, образующий каркас данного тела и занимающий лишь объем  $(1 - C_*)V$ .

Существует ряд подходов к оценке модулей упругости пористого тела в случае  $N=1$ . Один из таких подходов связан с использованием метода вириального разложения [8] при предположении формы шаровой поры как статистически усредненной множества возможных форм. В этом случае при малой пористости можно получить линейные зависимости от  $C_*$  в виде

$$\bar{K}^\circ = \frac{K^\circ}{K_1} = 1 - 3C_* \frac{1 - \nu_1}{2(1 - 2\nu_1)}; \quad \bar{G}^\circ = \frac{G^\circ}{G_1} = 1 - 15C_* \frac{1 - \nu_1}{7 - 5\nu_1}, \quad (24)$$

где  $K^\circ, G^\circ$  — модули упругости рассматриваемого пористого тела;  $\nu_1 = (K_1 - 2G_1/3)/(2K_1 + G_1)$  — коэффициент Пуассона материала каркаса этого тела.

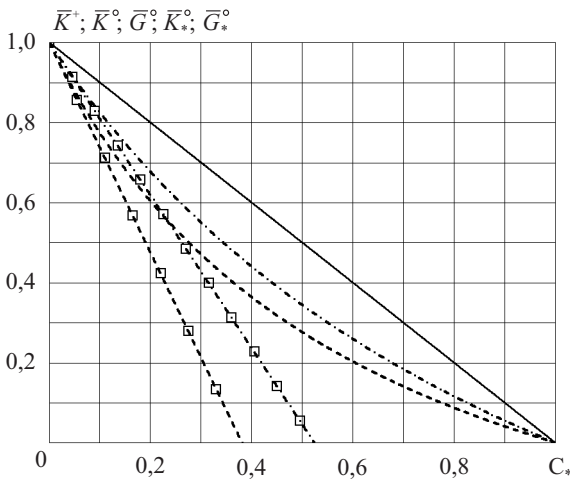
С возрастанием пористости достоверность оценки по формулам (24) быстро убывает. Если в первом приближении учесть возмущение напряженно-деформированного состояния в материале каркаса в окрестности отдельно взятой поры, имеющей форму шара, то тогда также методом вириального разложения можно получить более точные зависимости [8]:

$$\bar{K}_*^\circ = 1 - \frac{9C_*K_1A_1}{1 - C_* + 9C_*K_1A_1}; \quad \bar{G}_*^\circ = 1 - \frac{4C_*G_1A_2}{1 - C_* + 4C_*G_1A_2}, \quad (25)$$

где  $A_1 = (1/6K_1)(1 - \nu_1)/(1 - 2\nu_1)$ ;  $A_2 = (15/4G_1)(1 - \nu_1)/(7 - 5\nu_1)$ .



На рис. 1 приведены для сравнения результаты вычислений по представленным соотношениям при изменении  $C_*$  в промежутке  $[0; 1]$ . Сплошная прямая соответствует совпадающей верхней оценке  $\bar{K}^+ = K^+/K_1 = 1 - C_*$  относительных значений  $\bar{K} = K/K_1$  и  $\bar{G} = G/G_1$ . При  $\nu_1 = 0,3$  формулы (24) использованы для построения графиков зависимостей  $\bar{K}^\circ$  и  $\bar{G}^\circ$  от  $C_*$  (штриховая и штрихпунктирная линии со светлыми квадратами), а по формулам (25) построены графики зависимостей  $\bar{K}_*^\circ$  и  $\bar{G}_*^\circ$  от  $C_*$  (штриховая и штрихпунктирная линии без символов).



**Рис. 1.** Зависимости относительных значений объемного модуля упругости и модуля сдвига от пористости

Путем обработки экспериментальных данных и результатов численного моделирования для пористого однородного материала получены зависимости от  $C_*$  продольного модуля упругости (модуля Юнга)  $E$  в виде

$$\bar{E}^\circ = E/E_1 = (1 - C_*)^m, \quad (26)$$

где  $E_1$  — продольный модуль упругости материала каркаса пористого тела, а показатель степени  $m > 1$  зависит от типа структурной модели этого тела.

Для модели «перекрывающиеся сферические поры» (ПСП) различных радиусов, так называемой модели швейцарского сыра, в работе [10] предложено значение  $m = 2$ . При этом из экспериментальных исследований различных керамических материалов следует,

что система пор становится проницаемой в случае  $C_* > 0,3$ , а частицы материала каркаса пористого тела сохраняют связанность до значения  $C_* \approx 0,97$  [11].

Структурная модель «перекрывающиеся сферические тела» (ПСТ) различных радиусов соответствует технологическим процессам спекания шаровых частиц порошка. В этом случае система пор может стать проницаемой уже при  $C_* > 0,03$ , а каркас сохраняет связанность лишь до пористости  $C_* \approx 0,7$  [12]. Для этой модели предложено в формуле (26) использовать значение  $m = 4$  [11]. С применением метода численного анализа для моделей ПСП и ПСТ получены соответственно значения  $m = 2,9$  и  $m = 4$  [13].

В отличие от формулы (26) в результате обработки экспериментальных данных для керамических материалов и некоторых горных пород установлены зависимости [11]

$$\bar{E}_1^\circ = (1 - C_*/C'_*)^{1,653}; \quad \bar{E}_2^\circ = (1 - C_*/C''_*)^{2,23}, \quad (27)$$

где  $C'_* = 0,818$  и  $C''_* = 0,652$  — параметры, определяющие пористость, при которой каркас пористого тела утрачивает свою связанность. Значения этих параметров согласуются с приведенными выше значениями пористости, при которой нарушается связанность для моделей ПСП и ПСТ соответственно. Кроме того, из сравнения значения производной

$$\left. \frac{dE_1^\circ}{dC_*} \right|_{C_*=0} = -m \text{ со значениями}$$

$$\left. \frac{dE_1^\circ}{dC_*} \right|_{C_*=0} = -\frac{1,653}{C'_*} \approx 2,02 \text{ и } \left. \frac{dE_2^\circ}{dC_*} \right|_{C_*} = -\frac{2,23}{C''_*} \approx 3,402,$$

полученными дифференцированием по  $C_*$  формул (27), следует, что при малой пористости практически совпадут результаты расчета по первой формуле (27) и формуле (26) при  $m = 2$  для модели ПСП, а вторая формула (27) даст результаты, промежуточные между полученными по формуле (26) при  $m = 4$  и  $m = 2,9$  для модели ПСТ.

На рис. 2 приведены графики зависимости относительного значения  $\bar{E}^\circ$  продольного модуля упругости от пористости  $C_*$ , построенные по формуле (26) при  $m = 2$  (штриховая линия),  $m = 4$  (штрихпунктирная) и  $m = 2,9$  (пунктирная). Сплошные кривые с темными и светлыми треугольниками построены соответственно по первой и второй формулам (27). Действительно, при  $C_* < 0,4$  отличие кривой с темными треугольниками от штриховой линии и кривой со светлыми треугольниками от штрихпунктирной линии достаточно мало.

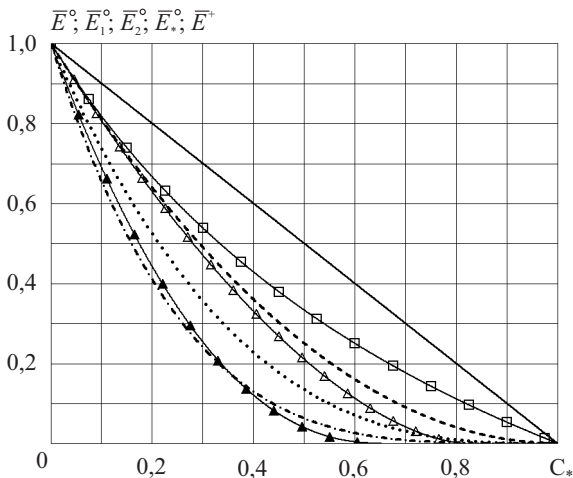


Рис. 2. Зависимости относительного значения модуля Юнга от пористости

Формулы (25) с учетом равенства  $E = 9KG/(3K + G)$  [14] позволяют в рамках метода вириального разложения найти зависимость относительного значения продольного модуля упругости от  $C_*$  в виде

$$\bar{E}_*^{\circ} = \frac{3\bar{K}_*^{\circ}\bar{G}_*^{\circ}}{2\bar{K}_*^{\circ}(1+\nu_1) + \bar{G}_*^{\circ}(1-2\nu_1)}. \quad (28)$$

По формуле (28) при  $\nu_1 = 0,3$  на рис. 2 построен график (сплошная линия со светлыми квадратами). Зависимость от  $C_*$  верхней оценки  $\bar{E}^+$ , которая следует из формул  $K^+ = (1 - C_*)K_1$  и  $G^+ = (1 - C_*)G_1$ , полученных с использованием вариационного подхода, представлена в виде сплошной прямой без символов.

На рис. 1 и 2 видно, что различные варианты оценок относительных величин модулей упругости пористого однородного материала приводят к результатам, лежащим ниже их верхней оценки, установленной с использованием вариационного подхода. В качестве ориентира, характеризующего нижнюю границу области возможных значений продольного модуля упругости, можно принять зависимость на рис. 2 (штрихпунктирная линия), построенную по формуле (26) при  $m = 4$ . Однако для построения нижней границы этой области на основе вариационного подхода необходимо видоизменение структурной модели рассматриваемого пористого тела.

**Модификация структурной модели пористого однородного материала.** Один из возможных подходов к коррекции нижних оценок модулей упругости пористого тела, каркас которого состоит из

однородного материала с модулями упругости  $K_1$  и  $G_1$ , заключается в переходе к структурной модели условного композита. В последнем часть этого материала исполняет роль сплошной матрицы, а армирующими элементами являются включения в виде пор, к которым присоединена остальная часть этого же материала (в случае замкнутых пор можно считать, что каждая из них окружена некоторым слоем материала каркаса). Тогда каждую пору с присоединенным к ней материалом каркаса можно рассматривать как условное сплошное включение в матрицу, имеющее некоторые эквивалентные модули упругости  $K_*$  и  $G_*$ . Применительно к такой модели можно использовать известные варианты оценок эффективных значений модулей упругости композитов с дисперсными включениями [8, 15, 16].

При заданной пористости  $C_*$  рассматриваемого тела объемное содержание  $C'_*$  условных сплошных включений будет удовлетворять неравенству  $C'_* \geq C_*$ , в котором равенство формально соответствует предельному случаю отсутствия материала каркаса, когда  $C_* = 1$ . Простейший вариант определения эквивалентных модулей таких включений состоит в использовании верхних оценок, определяемых соотношениями (22) и (23), которые следуют из представленной выше двойственной вариационной формулировки задачи.

Тогда из равенств  $(1 - C_*)K_1 = (1 - C'_*)K_1 + C'_*K_*$  и  $(1 - C_*)G_1 = (1 - C'_*)G_1 + C'_*G_*$  находим

$$\bar{K}_* = K_*/K_1 = 1 - C_*/C'_*; \quad \bar{G}_* = G_*/G_1 = 1 - C_*/C'_*. \quad (29)$$

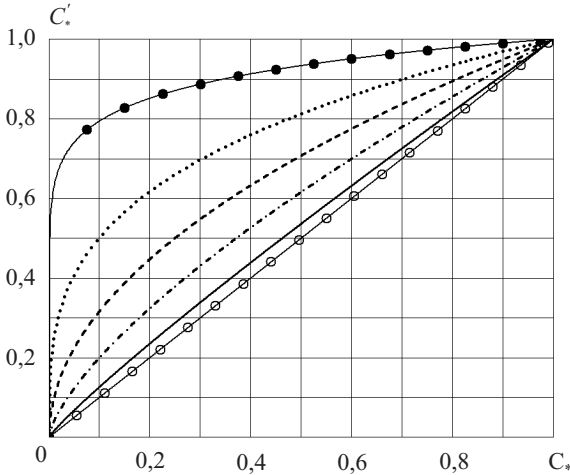
С учетом тех же соотношений (22) и (23) для построенной структурной модели условного композита получаем в виде безразмерных отношений нижние оценки модулей упругости

$$\bar{K}_c^- = K_c^-/K_1 = 1/(1 - C'_* + C'_*/\bar{K}_*); \quad \bar{G}_c^- = G_c^-/G_1 = 1/(1 - C'_* + C'_*/\bar{G}_*). \quad (30)$$

В достаточно общем случае связь между значениями  $C'_*$  и  $C_*$  целесообразно определить степенной зависимостью в виде  $C'_* = C_*^n$ , где  $n \in (0; 1)$ . При  $n \rightarrow 1$  условное сплошное включение вырождается в пору и эквивалентные модули принимают нулевые значения, а при  $n \rightarrow 0$  значения эквивалентных модулей совпадают с полученными выше верхними оценками.

На рис. 3 представлены зависимости  $C'_*$  от  $C_*$  при различных значениях  $n$ , причем сплошная прямая со светлыми кружками соответствует  $n = 1$ , сплошная без символов —  $n = 0,9$ , штрихпунктирная —

$n = 0,7$ , штриховая —  $n = 0,5$ , пунктирная —  $n = 0,3$  и сплошная с темными кружками —  $n = 0,1$ . Из анализа данных на рис. 3 следует, что чем ближе значение  $n$  к единице, тем меньше отличие  $C'_*$  от  $C_*$  и, согласно формулам (29), меньше значения  $\bar{K}_*$  и  $\bar{G}_*$ .



**Рис. 3.** Зависимости объемного содержания условных сплошных включений в модифицированной структурной модели пористого материала от его пористости

С учетом формулы  $C'_* = C_*^n$  из равенств (29) следует  $\bar{K}_* = \bar{G}_* = 1 - C_*^{1-n}$ , а из равенств (30) —  $\bar{K}_c^- = \bar{G}_c^- = 1 / \left( 1 - C_*^n + C_*^n / (1 - C_*^{1-n}) \right)$ .

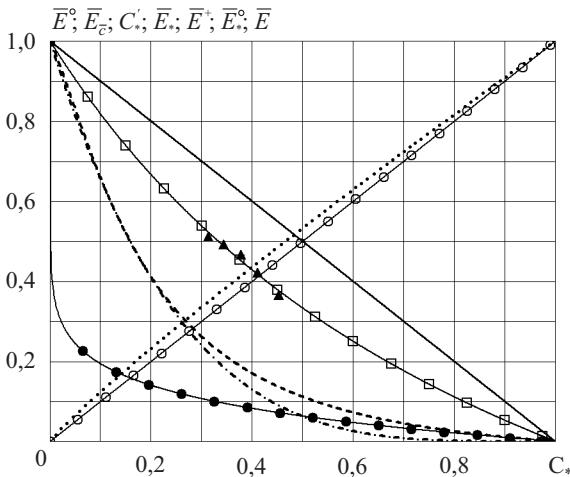
Но тогда для рассматриваемой структурной модели правая часть последнего равенства будет определять безразмерное отношение нижней оценки продольного модуля упругости в виде

$$\bar{E}_c^- = \frac{E_c^-}{E_1} = \frac{1}{1 - C_*^n + C_*^n / (1 - C_*^{1-n})} = \frac{1 - C_*^{1-n}}{1 + C_*^n - C_*^n}. \quad (31)$$

Конкретное значение показателя степени  $n$  выберем так, чтобы при одинаковых значениях  $C_*$  ординаты графика зависимости  $\bar{E}_c^-$  от  $C_*$  не были меньше ординат графика, определяемого формулой (26) при  $m = 4$ . Это условие приводит к неравенству  $\bar{E}^\circ \leq \bar{E}_c^-$ , которое должно быть выполнено при  $C_* \in [0; 1]$ . Из равенств (26) и (31) следует, что значения  $\bar{E}^\circ$  и  $\bar{E}_c^-$  совпадают при  $C_* = 0$  и  $C_* = 1$  и любом значении  $n \in (0; 1)$ , но могут совпасть и в некоторых внутренних

точках отрезка  $[0; 1]$ . Применение методов оптимизации [17, 18] позволяет установить, что такое совпадение при  $m = 4$  имеет место лишь при  $C_* \approx 0,1871$  и соответствует значению  $n \approx 0,9065$ .

На рис. 4 представлены построенные по формуле (26) при  $m = 4$  (штрихпунктирная линия) и формуле (31) при  $n = 0,9065$  (штриховая) графики зависимости от  $C_*$  соответственно  $\bar{E}^\circ$  и  $\bar{E}_c^-$ . Эти графики имеют общие точки при  $C_0 = 0$ ,  $C_* = 1$  и  $C_* \approx 0,1871$ . Сплошная прямая со светлыми кружками и пунктирная линия соответствуют зависимостям  $C'_* = C_*^n$  при  $n = 1$  и  $n = 0,9065$  соответственно, а сплошная кривая с темными кружками — зависимости  $\bar{E}_* = 1 - C_*^{1-n}$ , которая следует из формулы (29).



**Рис. 4.** Зависимости относительных значений модуля Юнга и объемного содержания условных сплошных включений в модифицированной структурной модели пористого материала от его пористости

Как и на рис. 3, сплошная прямая без символов соответствует формуле  $\bar{E}^+ = 1 - C_*$  для относительного значения верхней оценки продольного модуля упругости, а сплошная кривая со светлыми квадратами — формуле (28) при  $\nu_1 = 0,3$  для относительного значения  $\bar{E}_*^o$  этого модуля. Темными треугольниками отмечены полученные численным моделированием дискретные значения  $\bar{K}$  пеноалюминия, для каркаса которого использован алюминиевый сплав Д16 [19].

**Заключение.** Рассмотрены два типа пористых тел — пористое неоднородное тело и тело, каркас которого выполнен из однородного материала. Двусторонние оценки эффективных значений модулей

упругости, построенные с помощью двойственной вариационной формулировки задачи линейной упругости для неоднородного тела, не позволяют получить содержательную информацию о нижней границе области возможных эффективных значений этих модулей пористого тела с каркасом из однородного материала.

Для этого случая предложена модификация структурной модели пористого тела путем введения условных однородных сплошных включений, эквивалентных по упругим характеристикам порам, к которым присоединена некоторая часть однородного материала каркаса. Использование этой модификации позволило преодолеть возникшие затруднения и установить искомую нижнюю границу указанной области.

Предложенный подход может быть применен для прогнозирования упругих характеристик пористых материалов, что является важнейшей задачей при проектировании элементов конструкций из таких материалов.

*Работа выполнена в рамках государственных заданий  
Минобрнауки РФ (проекты 9.7784.2017/БЧ и 9.2422.2017/ПЧ).*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Комков М.А., Тарасов В.А. Влияние вязкости связующего в пропиточной ванне на пористость композита при мокром способе намотки. *Наука и образование. Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2014, № 12. DOI: 10.7463/1214.0745284
- [2] Nazarenko L.V. Thermoelastic Properties of Ortotropic Porous Materials. *Int. Appl. Mech.*, 1997, vol. 33, no. 2, pp. 114–122.
- [3] Федосова Н.А., Кольцова Э.М., Попова Н.А., Жариков Е.В. Керамоматричные композиты, модифицированные углеродными нанотрубками: искровое плазменное спекание, моделирование, оптимизация. *Новые огнеупоры*, 2015, № 12, с. 13–17.
- [4] Погожев Ю.С., Потанин А.Ю., Левашов Е.А., Ковалев Д.Ю. Особенности горения и структурообразования керамических материалов в системе  $Cr-Al-Si-B$ . *Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия*, 2014, № 4, с. 19–29.
- [5] Амосов А.П., Самборук А.Р., Самборук А.А., Ермошкин А.А., Закамов Д.В., Кривоцуцкий К.С. Самораспространяющийся высокотемпературный синтез нанопорошка карбида титана из гранулированной шихты. *Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия*, 2013, № 4, с. 31–38.
- [6] Зарубин В.С. *Моделирование*. Москва, Академия, 2013, 336 с.
- [7] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 512 с.
- [8] Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеподобных сред*. Москва, Наука, 1977, 400 с.
- [9] Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009, № 3, с. 36–49.

- [10] Bruno G., Efremov A.M., Levandovskyi A.N., Clausen B. Connecting the macro- and microstrain responses in technical porous ceramics: modeling and experimental validations. *J. Mater. Sci.*, 2011, vol. 46, pp. 161–173.
- [11] Roberts A., Garboczi E. Elastic Properties of Model Porous Ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 2000, vol. 83, no. 12, pp. 3041–3048.  
DOI: 10.1111/j.1151-2916.2000.tb01680.x
- [12] Torquato S. Random Heterogeneous Media: Microstructure and Improved Bounds on Elastic Properties. *Appl. Mech. Rev.*, 1991, vol. 44, pp. 37–76.
- [13] Смолин И.Ю., Еремин М.О., Макаров П.В., Буякова С.П., Кульков С.Н., Евтушенко Е.П. Численное моделирование механического поведения модельных хрупких пористых материалов на мезоуровне. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2013, № 5 (25), с. 78–90.
- [14] Зарубин В.С. *Прикладные задачи термпрочности элементов конструкции*. Москва, Машиностроение, 1985, 296 с.
- [15] Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. Москва, Мир, 1982, 336 с.
- [16] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Изотропные включения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2014, № 5 (98), с. 53–69.
- [17] Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. *Введение в методы оптимизации*. Москва, НИЦ ИНФРА-М, 2008, 272 с.
- [18] Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. *Методы оптимизации*. Москва, Издательский центр РИОР, 2012, 270 с.
- [19] Бутарович Д.О., Смирнов А.А., Рябов Д.М. Пеноалюминий как энергопоглощающий материал и его механические свойства. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2011, № 7, с. 53–58.

Статья поступила в редакцию 06.11.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зарубин В.С., Савельева И.Ю., Сергеева Е.С. Двусторонние оценки модулей упругости пористого твердого тела. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 12. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-12-1709>

**Зарубин Владимир Степанович** — д-р техн. наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ, лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники, действительный член Российской академии космонавтики имени К.Э. Циолковского. Профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор и редактор более 550 опубликованных работ в области прикладной математики и термомеханики. e-mail: zarubin@bmstu.ru

**Савельева Инга Юрьевна** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности. e-mail: inga.savelyeva@gmail.com

**Сергеева Елена Сергеевна** — ассистент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области моделирования механических свойств структурно-чувствительных композиционных материалов. e-mail: sergeeva.e.s@outlook.com



## Two-way estimates of porous solid body elasticity moduli

© V.S. Zarubin, I.Yu. Saveleva, E.S. Sergeeva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The dual variational formulation of the problem of linear elasticity of the porous non-homogeneous solid body consisting of the chaotically directed isotropic fragments with different elastic characteristics is used for constructing the two-way estimates of the effective elastic behaviour of such body. We have conducted the quantitative analysis of these estimates and compared them with the known previously published results. The presented calculated ratios can be applied for forecasting the effective values of elasticity moduli of the porous composite material reinforced with isotropic inclusions as well as the materials obtained by means of powder metallurgical techniques and self-propagating high-temperature synthesis.*

**Keywords:** porous solid body, effective values of the elasticity moduli, dual variational formulation, two-way estimates

### REFERENCES

- [1] Komkov M.A., Tarasov V.A. *Nauka i obrazovanie: Nauchnoe izdanie — Science and Education: Scientific Publication*, 2014, no. 12.  
DOI: 10.7463/1214.0745284
- [2] Nazarenko L.V. Thermoelastic Properties of Ortotropic Porous Materials. *International Applied Mechanics*, 1997, vol. 33, no. 2, pp. 114–122.
- [3] Fedosova N.A., Koltsova E.M., Popova N.A., Zharikov E.V. *Novye ognepory — Refractories and Industrial Ceramics*, 2015, no. 12, pp. 13–17.
- [4] Pogozhev Yu.S., Potanin A.Yu., Levashov E.A., Kovalev D.Yu. *Izvestiya vuzov. Poroshkovaya metallurgiya i funktsionalnye pokrytiya — Russian Journal of Non-Ferrous Metals*, 2014, no. 4, pp. 19–29.
- [5] Amosov A.P., Samboruk A.R., Samboruk A.A., Ermoshkin A.A., Zakamov D.V., Krivolutskiy K.S. *Izvestiya vuzov. Poroshkovaya metallurgiya i funktsionalnye pokrytiya — Russian Journal of Non-Ferrous Metals*, 2013, no. 4, pp. 31–38.
- [6] Zarubin V.S. *Modelirovanie [Modeling]*. Moscow, Akademiya Publ., 2013, 336 p.
- [7] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of mechanics and electro-dynamics of continuous media]*. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 512 p.
- [8] Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Inhomogeneous media elasticity theory]*. Moscow, Nauka Publ., 1977, 400 p.
- [9] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2009, no. 3, pp. 36–49.
- [10] Bruno G., Efremov A.M., Levandovskiy A.N., Clausen B. Connecting the macro- and microstrain responses in technical porous ceramics: modeling and experimental validations. *Journal of Materials Science*, 2011, vol. 46, pp. 161–173.
- [11] Roberts A., Garboczi E. Elastic properties of model porous ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, 2000, vol. 83, no. 12, pp. 3041–3048.  
DOI: 10.1111/j.1151-2916.2000.tb01680.x
- [12] Torquato S. Random Heterogeneous Media: Microstructure and Improved Bounds on Elastic Properties. *Applied Mechanics Reviews*, 1991, vol. 44, pp. 37–76.

- [13] Smolin I.Yu., Eremin M.O., Makarov P.V., Buyakova S.P., Kulkov S.N., Evtushenko E.P. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2013, no. 5 (25), pp. 78–90.
- [14] Zarubin V.S. *Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruksiy* [Applied problems of constructional elements thermostability]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 296 p.
- [15] Christensen R.M. *Mechanics of Composite Materials*. John Wiley & Sons, Inc., 1979 [In Russ.: Christensen R. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* (Introduction to composite mechanics). Moscow, Mir Publ., 1982, 336 p.].
- [16] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Saveleva I.Yu. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya: Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2014, no. 5 (98), pp. 53–69.
- [17] Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. *Vvedenie v metody optimizatsii* [Introduction to optimization methods]. Moscow, NITs INFRA-M Publ., 2008, 272 p.
- [18] Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, RIOR Publ., 2012, 270 p.
- [19] Butarovich D.O., Smirnov A.A., Ryabov D.M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2011, no. 7, pp. 53–58.

**Zarubin V.S.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Honoured Scientist and Engineer of the Russian Federation, Laureate of the Russian Federation Government prize in the field of science and engineering, full member of the Russian Academy of Cosmonautics named after K.E. Tsiolkovsky. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Author and editor of over 550 published works in the field of applied mathematics and thermomechanics. e-mail: zarubin@bmstu.ru

**Saveleva I.Yu.**, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 20 scientific works in the field of modelling transient heat conduction. e-mail: inga.savelyeva@gmail.com

**Sergeeva E.S.**, Assist. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 10 scientific works in the field of modelling the mechanical properties of structure-sensitive composite materials. e-mail: sergeeva.e.s@outlook.com