УДК: 538.574.4 DOI 10.18698/2308-6033-2017-12-1707

Прикладные аспекты высокочастотной модели Зоммерфельда при описании рассеяния поля ограниченными препятствиями в задачах теории установившихся колебаний

© В.Ф. Апельцин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Обратные задачи теории дифракции и распространения волн наиболее востребованы в практических инженерных приложениях. Математические модели таких задач построены на основе принципа Гюйгенса. Этот принцип как физическая модель формирования рассеянного поля в задачах рассеяния электромагнитных (или акустических) волн ограниченными препятствиями предполагает, что рассеянное поле порождается токами, индуцированными (наведенными) первичным возбуждающим полем на поверхности рассеивателя или в его объеме либо, в общем случае, на каждой границе разрыва параметров среды. Такое вторичное поле в совокупности с возбуждающим обеспечивает выполнение краевых условий. При этом рассеянное поле распространяется в целом трансверсально перечисленным выше поверхностям.

Фактически все прямые методы приближенного численного решения краевых задач данного типа используют принцип Гюйгенса для построения математических моделей волновых явлений. Это относится к методу интегральных уравнений (поверхностных или объемных), методу вспомогательных токов, неортогональных рядов и к методам конечных элементов различных модификаций. Тем не менее такой подход имеет недостатки: медленную сходимость в высокочастотной области, проблему рэлеевского представления рассеянного поля во внешних краевых задачах, значительные трудности получения приемлемого по точности численного решения, если модель содержит диэлектрические слои с толщиной, намного меньшей длины волны.

Показано, что метод Зоммерфельда, или его обобщения на случай препятствий, отличных от круга (сферы), позволяет разрешить приведенные проблемы и обеспечивает в высокочастотном случае явные решения обратных задач. В частности, для синтеза антирадарного покрытия летательного аппарата в виде формулы для определения его диэлектрической проницаемости, а также для описания нового оптического эффекта в освещенной области, на основе которого возможно создание устройства для неразрушающего контроля параметров тонких синтетических пленок.

Ключевые слова: *принцип Гюйгенса, электромагнитные волны, дифракция, асимптотика, метод Зоммерфельда, формулы Келлера, принцип просветленной оптики*

Введение. В последние десятилетия математические модели рассеяния электромагнитных волн на металлических препятствиях с диэлектрическим покрытием востребованы в инженерных приложениях радиофизики в связи с разработкой антирадарных покрытий летательных аппаратов. Кроме того, с развитием нанотехнологий все более актуальной становится задача создания методов неразрушающего контроля параметров тонких полимерных пленок.

В полном объеме постановка этих задач предполагает трехмерную модель, однако в высокочастотном диапазоне такие модели, как показано В.А. Фоком, с высокой степенью точности могут быть заменены плоской двумерной моделью рассеяния на бесконечном металлическом цилиндре с диэлектрическим покрытием, поперечное сечение которого совпадает с сечением трехмерного тела в плоскостях главных кривизн поверхности препятствия.

Краевые задачи электродинамики, моделирующие взаимодействие электромагнитного поля с диэлектрическими телами или с металлическими телами, покрытыми слоем диэлектрика, относятся к классическим задачам математической физики и всесторонне исследовались на протяжении длительного времени. Следует отметить, что в последние годы появляются работы, свидетельствующие о возможности обнаружения в этих моделях новых эффектов [1–5].

Задача возбуждения кругового цилиндра из однородного диэлектрика электромагнитным полем также исследуется достаточно давно и относится к классу краевых задач электродинамики, решение которой формально строится в явном виде благодаря возможности сведения ее к скалярной и применения классического метода разделения переменных вследствие совпадения границы неоднородности с координатной поверхностью цилиндрической системы координат [6].

В большинстве работ, представляющих результаты расчетов параметров поля, рассеянного такими препятствиями, используются для представления решения ряды Рэлея как результат разделения переменных [6–8], метод вспомогательных токов [9], а также метод поверхностных или объемных интегральных уравнений. Однако все эти методы имеют один общий недостаток: медленную сходимость в высокочастотной области. Причина заключается в том, что все перечисленные выше подходы к построению решения используют в качестве модели волнового процесса принцип Гюйгенса.

Принцип Гюйгенса как физическая модель формирования поля в задачах рассеяния электромагнитных волн ограниченными препятствиями предполагает, что рассеянное поле формируется токами, наведенными первичным возбуждающим полем на поверхности рассеивающего тела или в его объеме либо, в общем случае, на каждой границе разрыва материальных параметров среды. Такое поле в суперпозиции с возбуждающим обеспечивает выполнение необходимых краевых условий на всех границах. При этом рассеянное поле распространяется в пространстве в целом трансверсально поверхности препятствия и другим имеющимся границам непрерывности параметров среды.

Фактически вся совокупность прямых методов приближенного численного построения решения соответствующих краевых задач этого типа использует принцип Гюйгенса для построения математической модели. К таким методам относятся в первую очередь метод интегральных уравнений (поверхностных или объемных), а также методы вспомогательных токов, неортогональных рядов, конечных элементов и различные их модификации.

В то же время хорошо известны основные недостатки этого подхода к решению краевых задач электродинамики (или акустики):

1) медленная сходимость в высокочастотном случае, не позволяющая получить численное решение с приемлемой точностью;

2) возникновение при наличии в составе рассеивающего тела диэлектрических слоев (покрытий металлического тела), толщина которых меньше длины волны, плохо обусловленных системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (с определителем, близким к нулю);

3) проблема справедливости представления рассеянной части поля вне ограниченного препятствия в виде только уходящих от него волн всюду вне его границы (проблема рэлеевского представления рассеянного поля).

Отметим также, что наибольший интерес в практических приложениях представляют обратные задачи теории рассеяния волн. Но обратные задачи при их численном приближенном решении предполагают возможность решения множества прямых задач, поскольку сводятся к вариационным постановкам. Решение же этих прямых задач с использованием традиционного принципа Гюйгенса осложняется всеми приведенными выше обстоятельствами.

Асимптотический подход к построению решения задачи дифракции волн на ограниченном препятствии в высокочастотном случае, обобщающий метод Зоммерфельда, дает возможность выписывать решения обратных задач в явном виде, как, например, в случае задачи синтеза антирадарного покрытия металлического тела на основе обобщения принципа просветленной оптики.

Формулы Келлера для выпуклого металлического цилиндра, покрытого тонким слоем диэлектрика. Рассмотрим представление рассеянного поля в плоском случае внешней краевой задачи Дирихле при дифракции поля внешнего источника на гладком контуре вне окружности, описанной вокруг препятствия. Запишем представление в виде

$$u_S(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi} \tag{1}$$

при гармонической зависимости решения от времени вида $e^{-i\omega t}$. Решение, содержащее цилиндрические функции $H_n^{(2)}(kr)$, отбрасывается как не удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда. Неизвестные коэффициенты A_n находят из краевого условия на границе препятствия при его выполнении, например, в проекциях с использованием методов относительно полной системы функций $\left\{H_n^{(1)}\left[k\rho\left(\varphi\right)\right]e^{in\varphi}\right\}$ $(r=\rho(\varphi)$ — уравнение границы в полярных координатах), что приводит к бесконечной СЛАУ. Однако предположение о справедливости представления (1) всюду, вплоть до границы препятствия составляет содержание гипотезы Рэлея. Но даже в случае простых замкнутых кривых, границы которых описываются полиномами, критерии справедливости этого представления являются достаточно жесткими [10].

Если строить решение в соответствии с методом Зоммерфельда [11] или его обобщением на случай препятствий с некоординатными границами, то в качестве базиса по радиальной координате в проекционном подходе берется система цилиндрических функций

$$H^{(1)}_{\nu_k(\varphi)}\left[kr\right], \tag{2}$$

ортогональная по r на интервале $[\rho\left(\varphi\right);\ \infty]$ с весом $1/r$ и удовлетворяющая не только условию излучения, но и краевому условию Дирихле на границе.

При условии, что $\nu_k\left(\varphi\right)$ — корни дисперсионного уравнения

$$H^{(1)}_{\nu}\left[k\rho\left(\varphi\right)\right]=0. \tag{3}$$

Однако это приводит к построению асимптотического высокочастотного решения для цилиндра с металлической границей (а также покрытого слоем однородного диэлектрика) вида

$$\tilde{u}(r,\varphi;r_0,\varphi_0)=$$

$$=\frac{\left[\sigma(L_1)\sigma(L_0)\right]^{1/6}e^{i4\pi/3}}{4k_0^{2/3}\sqrt{\pi}}\frac{\exp\left\{ik_0\left[S(M_0,L_0)+S(L_0,L_1)+S(L_1,M_1)-S_\delta(L_0,L_1)\right]\right\}}{\sqrt{S(M_0,L_0)}\sqrt{S(L_1,M_1)}}\times$$

$$\times\sum_m\frac{\tilde{C}_m\exp\{-\gamma_m\int\limits_{S(L_0)}^{S(L_1)}\sigma^{-2/3}(s)ds\}}{1-\exp[ik_0(S-S_\delta)-\gamma_m\oint\limits_L\sigma^{-2/3}(s)ds]}+$$

$$+\frac{\left[\sigma(K_0)\sigma(K_1)\right]^{1/6}e^{i4\pi/3}}{4k_0^{2/3}\sqrt{\pi}}\frac{\exp\left\{ik_0\left[S(M_0,K_0)+S(K_0,K_1)+S(K_1,M_1)-S_\delta(K_0,K_1)\right]\right\}}{\sqrt{S(M_0,K_0)}\sqrt{S(K_1,M_1)}}\times$$

$$\times\sum_m \frac{\tilde{C}_m \exp\{-\gamma_m \int\limits_{S(K_0)}^{S(K_1)} \sigma^{-2/3}(s)ds\}}{1-\exp[ik_0(S-S_\delta)-\gamma_m \oint\limits_L \sigma^{-2/3}(s)ds]}, \tag{4}$$

являющегося обобщением формул Келлера для случая цилиндра с покрытием.

Здесь $\sigma(s)$ — радиус кривизны контура в текущей точке; $\delta(s)$ — толщина слоя в той же точке; $\gamma_m = -i\left(\frac{k_0}{6}\right)^{1/3} e^{i^{\pi/3}} q_m$; S — периметр границы; $S_\delta = \left(\frac{k^2}{k_0^2}-1\right)\oint\limits_L \frac{\delta(s)}{\sigma(s)}ds$, $S_\delta(K_0, K_1) = \left(\frac{k^2}{k_0^2}-1\right)\int\limits_{s(K_0)}^{s(K_1)} \frac{\delta(s)}{\sigma(s)}ds$, $S_\delta(L_0, L_1) = \left(\frac{k^2}{k_0^2}-1\right)\int\limits_{s(L_0)}^{s(L_1)} \frac{\delta(s)}{\sigma(s)}ds$ — поправки, учитывающие наличие покрытия. При отсутствии покрытия все слагаемые с нижним индексом «δ» обращаются в нуль. Наличие в выражении (4) двух слагаемых соответствует распространению вокруг препятствия бесконечного набора обегающих волн двух типов: первый — против часовой стрелки, второй — по часовой стрелке. При этом в отличие от представления (1) ни одно из них не отбрасывается. Тем самым проблема рэлеевского представления снимается при переходе к обобщению метода Зоммерфельда (проблема 3 — см. выше). Кроме того, при таком негюйгенсовом характере распространения дифракционного поля наличие тонкого (по сравнению с длиной волны) слоя диэлектрика на металлической поверхности не представляет никаких затруднений, т. е. снимается проблема 2. Детали вывода представления (4) изложены в работе [12] и в содержащихся в ней ссылках.

Обратная задача синтеза диэлектрического покрытия металлического цилиндра, подавляющего рассеяние поля в заданном направлении. Явное асимптотическое приближение вида (4) дает также возможность явного решения обратной задачи синтеза диэлектрического (антирадарного) покрытия, обеспечивающего подавление рассеяния в заданном направлении [12].

При требовании выполнения интерференционного взаимного погашения обежавшего препятствие дифракционного поля и геометрооптической его части в освещенной области получим явную формулу для относительной диэлектрической проницаемости, обеспечивающей необходимый эффект, если ограничиться лишь первым слагаемым ряда (4), использовав его быструю сходимость, что снимает проблему 1:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{k_0 S + i\gamma_1 \oint\limits_L \sigma^{-2/3}(s)\,ds - i\ln\{\tau(k_0,\varphi_0)\} + 2\pi m}{k_0 \oint\limits_L \dfrac{\delta(s)}{\sigma(s)}\,ds}, \qquad (5)$$

где $\tau(k_0,\varphi_0) = 1 + \dfrac{2\left[k_0\rho(\varphi_0)\right]^{1/3}}{\sqrt{k_0 b(\varphi_0)}}\tilde{C}_1 \exp\Big\{i\Big(2k_0\delta(\varphi_0) - \pi\nu_1(\varphi_0) -$

$- 2\,\mathrm{arctg}\big(k_0\delta(\varphi_0)\big) + \dfrac{\pi}{12}\Big)\Big\}.$

Из формулы (5) следует, что действительная часть относительной диэлектрической проницаемости слоя, обеспечивающая взаимное интерференционное погашение геометро-оптической части поля и первой дифракционной волны, квантована целочисленным параметром m. Это соответствует счетному набору возможных значений диэлектрической проницаемости, определяющих необходимое число полуволн обегающего поля, укладывающихся на пройденном ими оптическом пути и приходящих в освещенную область в противофазе с геометрооптической частью поля в направлении его распространения. В то время как мнимая часть относительной диэлектрической проницаемости отвечает за выравнивание амплитуд двух слагаемых рассеянного поля.

Такой способ минимизации обратного рассеяния можно назвать обобщенным принципом просветленной оптики. Этот подход легко распространить и на случай подавления рассеянного поля в нескольких выбранных направлениях.

Явное высокочастотное асимптотическое приближение, полученное обобщенным методом Зоммерфельда для металлического тела с диэлектрическим покрытием, позволяет получить также некоторые оптические эффекты, например малый сдвиг наблюдаемого положения точечного источника в присутствии такого тела [3]. Этот эффект может быть успешно использован для неразрушающего контроля параметров тонких синтетических пленок (например, в нанотехнологиях). Достаточно предположить равномерное скольжение такой пленки, подсвечиваемой лучом оптического лазера, по поверхности полированного металлического цилиндра. Тогда малое смещение границы свет — тень позволяет следить за отклонением параметров пленки (толщина, плотность) от заданных.

Заключение. Приведенные примеры использования обобщения метода Зоммерфельда в задачах стационарного рассеяния волн на ограниченном металлическом теле, покрытом слоем диэлектрика, свидетельствуют о том, что в области высоких частот эта модель распространения поля физически более адекватна явлению дифракции волн, чем решения, построенные по принципу Гюйгенса, так как позволяет избежать проблем математических моделей, построенных с его помощью. В свою очередь, это дает возможность построения явного приближенного решения обратных задач, таких как синтез антирадарного покрытия летательных аппаратов, а также других эффективных практических приложений, например, для создания устройства неразрушающего контроля параметров тонких синтетических пленок.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Макаров А.М., Лунева Л.А., Макаров К.А. О сопряжении плоских гармонических волн на поверхности раздела двух однородных изотропных сред в классической электродинамике. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 3 (30), с. 29–36.

[2] Макаров А.М., Лунева Л.А., Макаров К.А. О некоторых эффектах при падении плоской гармонической электромагнитной волны на границу диэлектрик — проводник. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009, № 2 (23), с. 57–70.

[3] Апельцин В.Ф. Оптический эффект малого смещения наблюдаемого положения источника излучения, полученный математическим моделированием задачи высокочастотного рассеяния. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 2. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-2-36

[4] Апельцин В.Ф., Мозжорина Т.Ю. Свойства одномерного фотонного кристалла как отражающей или волноведущей структуры в случае Н-поляризованного возбуждения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 3–27.

[5] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.

[6] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.

[7] Величко Е.А., Николаенко А.П. Влияние диэлектрического покрытия на рассеяние плоской электромагнитной волны металлическим цилиндром. *Радиофизика и радиоастрономия*, 2013, т. 18, № 1, с. 65–74

[8] Котляр В.В., Личманов М.А. Дифракция плоской электромагнитной волны на градиентном диэлектрическом цилиндре. *Компьютерная оптика*, 2003, вып. 25, с. 11–15.

[9] Дмитренко А.Г., Голцварт Е.П. Решение задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре методом вспомогательных токов. *Радиотехника и электроника*, 2011, т. 56, № 5, с. 600–607.

[10] Апельцин В.Ф. О методе неортогональных рядов во внешних задачах теории установившихся колебаний. *ДАН СССР*, 1981, т. 260, № 5, с. 310–313.

[11] Зоммерфельд А. *Дифференциальные уравнения в частных производных физики*. Москва, ИЛ, 1950.

[12] Апельцин В.Ф. Высокочастотное возбуждение тонкого диэлектрического покрытия гладкого металлического цилиндра Е-поляризованным полем точечного источника. *Электромагнитные волны и электронные системы*, 2000, т. 5, № 1, с. 4–1.

Статья поступила в редакцию 23.10.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Апельцин В.Ф. Прикладные аспекты высокочастотной модели Зоммерфельда при описании рассеяния поля ограниченными препятствиями в задачах теории установившихся колебаний. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 12. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-12-1707

Апельцин Виктор Филиппович родился в 1944 г., окончил Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1968 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 80 научных работ в области численных и аналитических методов исследования краевых задач электродинамики. e-mail: vapeltsin@hotmail.com

Applied aspects of the high-frequency Drude—Sommerfeld model for describing field scattering on finite targets in problems of steady-state vibration theory

© V.F. Apeltsin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Inverse problems of diffraction theory and wave propagation are most important for real-world engineering applications. Huygens' Principle forms the basis for mathematical models of such problems. This principle, taken as a physical model of scattered field formation in the problems of electromagnetic (or acoustic) wave scattering on finite targets, assumes that the scattered field is generated by currents that the initial excitation field induces over the scattered surface or in its bulk, or, in a general case, along each parameter discontinuity boundary in a medium. This secondary field coupled with the excitation one ensures fulfilment of boundary conditions. In this case the scattered field generally propagates transversally to the surfaces listed above.

In practice, all direct methods of obtaining approximate numerical solutions to this type of boundary problems employ Huygens' Principle to construct mathematical models of wave phenomena. This concerns the integral equation method (surface or volumetric), methods of auxiliary currents, of non-orthogonal series, and various modifications of finite element methods. Nevertheless, this approach has its drawbacks: slow convergence in the high-frequency region, the problem of Raleigh representation of scattered field in external boundary problems, and considerable difficulties in deriving an acceptably accurate numerical solution for a model containing dielectric layers with thicknesses much smaller than the wavelength.

We show that the Sommerfeld method, or its generalization for the case of targets different from a circle (a sphere), makes it possible to solve the problems outlined above and ensure explicit solutions for the high-frequency case. In particular, when synthesizing radiation-absorbent aircraft coating, it can yield an equation determining its permittivity, and it can also describe a new optical effect in an illuminated area that may lead to creating a device for nondestructive control of thin synthetic film parameters.

Keywords: *Huygens' principle, electromagnetic waves, diffraction, asymptotics, Sommerfeld method, Keller's equations, anti-reflection optical coating principle*

REFERENCES

[1] Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2008, no. 3 (30), pp. 29–36.

[2] Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2009, no. 2 (23), pp. 57–70.

[3] Apeltsin V.F. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, issue 2. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-2-36.

[4] Apeltsin V.F., Mozzhorina T.Yu. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 3–27.

[5] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum mechanics.

In 4 vols. Vol. 2. Universal laws of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.

[6] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnykh sred* [Mathematical models of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008.

[7] Velichko E.A., Nikolaenko A.P. *Radiofizika i radioastronomiya — Radio Physics and Radio Astronomy*, 2013, vol. 18, no. 1, pp. 65–74.

[8] Kotlyar V.V., Lichmanov M.A. *Kompyuternaya optika — Computer Optics*, 2003, no. 25, pp. 11–15.

[9] Dmitrenko A.G., Goltsvart E.P. *Radiotekhnika i elektronika — Journal of Communications Technology and Electronics*, 2011, vol. 56, no. 5, pp. 600–607.

[10] Apeltsin V.F. *DAN SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1981, vol. 260, no. 5, pp. 310–313.

[11] Sommerfeld A. *Partielle Differentialgleichungen der Physik* [Partial differential equations in physics]. Leipzig, 1948. [In Russ.: Sommerfeld A. *Differentsialnye uravneniya v chastnykh proizvodnykh fiziki*. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1950].

[12] Apeltsin V.F. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy — Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2000, vol. 5, no. 1, pp. 4–1.

Apeltsin V.F. (b. 1944) graduated from the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, in 1968. Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of approximately 80 scientific publications in the field of numerical and analytical methods of investigating boundary problems in electrodynamics.
e-mail: vapeltsin@hotmail.com