УДК 531.01+521.13 DOI 10.18698/2308-6033-2017-11-1704

Численно-аналитическое построение и исследование устойчивости периодических движений симметричного спутника

© Е.А. Сухов[1], Б.С. Бардин[1,2]

[1] Московский авиационный институт (МАИ), Москва, 125993, Россия
[2] Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, 101990, Россия

Одним из частных случаев движения динамически симметричного спутника — твердого тела относительно центра масс на круговой орбите является его гиперболоидальная прецессия. Если гиперболоидальная прецессия устойчива, то уравнения движения спутника допускают существование семейств периодических движений, которые описывают колебания оси динамической симметрии спутника в окрестности гиперболоидальной прецессии и могут быть получены в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра — амплитуды колебаний. Различают два типа указанных движений — короткопериодические и долгопериодические. Если амплитуда не мала, то для построения данных движений необходимо применить численный метод. В трехмерном пространстве параметров задачи авторами была построена область существования долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника. Рассмотрены случаи резонанса и отсутствия резонанса третьего порядка. Исследована задача орбитальной устойчивости долгопериодических движений в первом приближении. Приведены постановка задачи, результаты аналитического построения периодических движений при отсутствии резонансов. Дано краткое описание методики численного построения семейств периодических решений. Изложены результаты численно-аналитического построения семейств долгопериодических решений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии, в окрестности резонанса. Для малых значений амплитуды сделаны выводы об орбитальной устойчивости указанных решений в первом приближении.

Ключевые слова: *гамильтонова система, периодические движения, динамически симметричный спутник, численное продолжение семейств решений, регулярная прецессия, орбитальная устойчивость, резонанс*

Введение. Анализу движения динамически симметричного спутника на круговой орбите посвящено большое число работ [1–8]. Особенно детально исследованы движения симметричного спутника, которые описываются точными частными решениями уравнений движения. К этим движениям относятся положения относительного равновесия, регулярные прецессии, а также колебания и вращения спутника в плоскости орбиты его центра масс. Устойчивость регулярных прецессий и нелинейных колебаний в их окрестности рассмотрена в работах [4–14]. В [7, 8] выполнен полный и строгий анализ устойчивости плоских колебаний и вращений симметричного спутника.

Уравнения движения в динамике спутников, как правило, не могут быть проинтегрированы в квадратурах, поэтому актуальной задачей является разработка методов их численного интегрирования, а также асимптотических методов построения их решений. В работах [15–18] предложены методы численного и аналитического построения семейств периодических движений, которые позволяют свести краевую задачу численного интегрирования к более простой задаче Коши. Эти методы применялись для построения «замороженных» орбит в теории движении искусственного спутника Земли [19]. С их помощью исследовались периодические движения, рождающиеся из регулярной прецессии симметричного спутника [13, 14, 17]. В частности, в работах [13, 17] для некоторых частных значений параметров задачи выполнено численно-аналитическое построение семейств короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии. В работе [14] получена область существования указанных семейств для всех допустимых параметров задачи.

В настоящей работе выполнено численно-аналитическое построение семейств долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии, при отсутствии резонансов и в окрестности резонанса $\omega_2 = 2\omega_1$.

Постановка задачи. Рассмотрим спутник — твердое тело, центр масс которого движется в центральном гравитационном поле сил по круговой орбите. Для описания движения спутника относительно центра масс введем орбитальную *OXYZ* и связанную *Oxyz* системы координат. Оси *OZ*, *OX*, *OY* направим по радиусу-вектору центра масс спутника, трансверсали к орбите и нормали к плоскости орбиты. Оси *Ox*, *Oy*, *Oz* направим вдоль главных центральных осей инерции спутника, моменты инерции относительно которых обозначим J_1, J_2, J_3. Будем считать спутник динамически симметричным $(J_1 = J_2)$. Взаимное расположение орбитальной и связанной систем координат зададим углами Эйлера ψ, θ, φ.

Уравнение движения динамически симметричного спутника записываются в канонической форме с гамильтонианом [3, 5]:

$$H = \frac{p_\psi^2}{2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{\gamma\cos\theta}{\sin^2\theta} + \cos\psi \operatorname{ctg}\vartheta \quad p_\psi - \sin\psi p_\psi +$$

$$+\frac{1}{2}\gamma^2 \operatorname{ctg}^2\theta + \gamma\frac{\cos\psi}{\sin\theta} + \frac{1}{2}\delta\cos^2\theta, \qquad (1)$$

где p_ψ и p_θ — безразмерные импульсы, соответствующие координатам ψ и θ; $\gamma = \alpha\beta$; $\delta = 3(\alpha - 1)$ — безразмерные параметры [17], здесь $\alpha = J_3 / J_1$, $\beta = r_0 / \omega_0$ (r_0 — проекция абсолютной угловой скорости спутника на его ось динамической симметрии Oz; ω_0 — угловая скорость центра масс).

Независимой переменной является истинная аномалия $\nu = \omega_0 t$. Координата φ — циклическая, соответствующий ей импульс p_φ сохраняет постоянное значение.

Уравнения движения с гамильтонианом (1) имеют частное решение $\vartheta_0 = \pi / 2$, $\cos\psi_0 = -\gamma$, $p_{\theta 0} = \sin\psi_0$, $p_{\psi 0} = 0$, отвечающее гиперболоидальной прецессии спутника, при которой его ось динамической симметрии лежит в плоскости, перпендикулярной радиусу-вектору центра масс, и составляет угол $\pi - \psi_0$ с нормалью к плоскости орбиты. При $\delta > 0$ гиперболоидальная прецессия устойчива по Ляпунову [6]. Ранее в работах [13, 17] для некоторых частных случаев геометрии масс спутника рассматривалась задача о существовании и построении периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии. Для решения этой задачи в [13] разработана программная реализация метода численного продолжения по параметру семейств периодических движений гамильтоновых систем, предложенного в [16].

Аналитическое построение ляпуновских периодических движений. Если частоты ω_1, ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$) линейной системы не связаны резонансными соотношениями до четвертого порядка включительно, то при подходящем выборе канонических переменных функция Гамильтона (1) в окрестности гиперболоидальной прецессии может быть приведена к следующей нормальной форме:

$$K = \frac{1}{2}\omega_1\left(q_1^2 + p_1^2\right) + \frac{1}{2}\omega_2\left(q_2^2 + p_2^2\right) + a_{20}\left(q_1^2 + p_1^2\right)^2 +$$

$$+ a_{11}\left(q_1^2 + p_1^2\right)\left(q_2^2 + p_2^2\right) + a_{02}\left(q_2^2 + p_2^2\right)^2 + O_5, \qquad (2)$$

где a_{20}, a_{11}, a_{02} — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров γ и δ; O_5 — совокупность членов порядка 5 и выше.

Каноническая система уравнений с гамильтонианом (2) имеет следующие семейства периодических решений, существование которых гарантируется теоремой Ляпунова о голоморфном интеграле:

$$q_1 = c\sin\left(\omega_1\nu + 4c^2 a_{20}\nu\right) + O\left(c^3\right); \; p_1 = c\cos\left(\omega_1\nu + 4c^2 a_{20}\nu\right) + O\left(c^3\right); \qquad (3)$$

$$q_2 = O\left(c^3\right); \quad p_2 = O\left(c^3\right);$$

$$q_2 = c\sin\left(\omega_2\nu + 4c^2 a_{02}\nu\right) + O\left(c^3\right); \;\; p_2 = c\cos\left(\omega_2\nu + 4c^2 a_{02}\nu\right) + O\left(c^3\right); \quad (4)$$

$$q_1 = O\left(c^3\right), p_1 = O\left(c^3\right)$$

с периодами $T_1 = 2\pi / \ \omega_1 + 4c^2 a_{20} + O\left(c^4\right)$ и $T_2 = 2\pi / \ \omega_2 + 4c^2 a_{20} + O\left(c^4\right)$ ($T_2 < T_1$) соответственно; (3) и (4) суть сходящиеся при достаточно малых значениях амплитуды c степенные ряды, представляющие соответственно долго- и короткопериодические движения .

О численном продолжении семейств периодических движений. Для построения семейств периодических движений при произвольных значениях амплитуды использовался метод численного продолжения периодических решений гамильтоновых систем, разработанный С.Р. Каримовым и А.Г. Сокольским в [16]. Идея этого метода была предложена A. Deprit и J. Henrard [15], ее суть состоит во введении в окрестности известного (опорного) решения локальных координат $\overline{w} = \left[n_u \, m_u \, n_v \, m_v\right]^T$, где n_u и n_v — нормальные смещения; m_u — тангенциальное смещение, m_v — энергетическое смещение. Это позволяет свести краевую задачу нахождения периодического решения к задаче Коши.

Поиск нового периодического решения осуществляется в два этапа: предиктора и корректора. На этапе предиктора в результате численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающей изменение величин n_u, m_u, n_v, m_v, находят поправки к начальным условиям опорного решения, дающие начальные условия нового, приближенно-периодического решения, которые затем уточняют на этапе корректора.

Программная реализация указанного численного метода и методика выбора приращений параметров описаны в работе [13]. Погрешность $\Delta z = \Delta z(h, \gamma, \delta) = \left|z(T) - z(0)\right|$ получаемых на каждом шаге решений не превышала $1 \cdot 10^{-5}$. Ранее в работе [14] для всех допустимых значений параметров задачи были построены области существования (рис. 1) и орбитальной устойчивости (рис. 2) в первом приближении короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника.

Численно-аналитическое построение семейств долгопериодических движений при значениях параметров, близких к резонансу $\boldsymbol{\omega_2 = 2\omega_1}$. Если в системе наблюдается параметрический резонанс $\omega_2 = 2\omega_1$, то в окрестности поверхности, ограничивающей область параметрического резонанса, существуют два семейства долгопериодических движений и одно семейство короткопериодических движений.

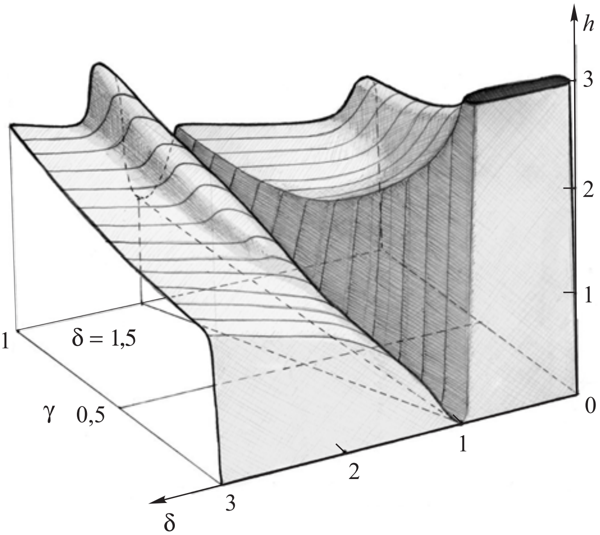
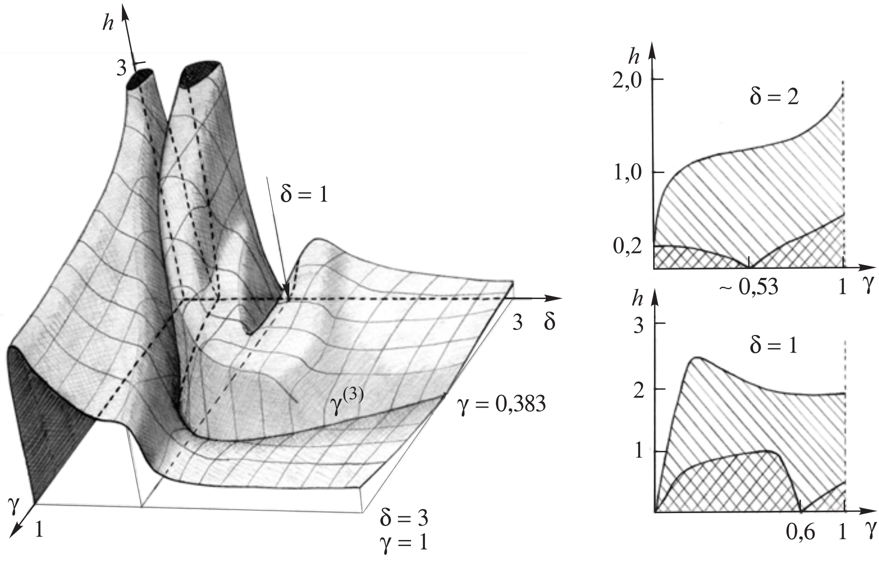


Рис. 1. Поверхность, ограничивающая сверху область существования короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, в пространстве параметров h, γ, δ:
h — параметр энергии; γ, δ — кинематический и инерционный параметры; в точке $\gamma = 0$, $\delta = 1$ имеет место резонанс $\omega_2 = \omega_1$



а *б*

Рис. 2. Поверхность, ограничивающая сверху область орбитальной устойчивости в первом приближении короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, в пространстве параметров h, γ, δ (*а*) и сечения (*б*) области существования короткопериодических движений (*косая штриховка*) и области их устойчивости (*перекрестная штриховка*) плоскостями $\delta = 2$ и $\delta = 1$

Найдем уравнение указанной поверхности в пространстве параметров h, γ, δ, где h — константа энергии системы с гамильтонианом (1). Для этого посредством канонической замены переменных $\psi, \theta, p_\psi, p_\theta \to \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ приведем гамильтониан (1) к нормальной форме:

$$K^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\omega_1\left(\xi_1^2+\eta_1^2\right)+\frac{1}{2}\omega_2\left(\xi_2^2+\eta_2^2\right)+A\ \ \xi_2\left(\eta_1^2-\xi_1^2\right)-2\eta_2\xi_1\eta_1\ \ +O_4, \quad (5)$$

где A — резонансный коэффициент, зависящий от ω_1 и ω_2.

Введем новое время τ по формуле $\tau = \omega_1 \nu$ и выполним масштабирующую каноническую замену переменных $\xi_1 = \varepsilon a x_1$, $\xi_2 = \varepsilon a x_2$, $\eta_1 = \varepsilon a y_1$, $\eta_2 = \varepsilon a y_2$ с валентностью $n = 1/\varepsilon^2 a^2$, которая приводит гамильтониан (5) к виду

$$K^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}(2+\mu)\left(x_2^2+y_2^2\right)+\frac{1}{2}\left(x_1^2+y_1^2\right)+$$

$$+\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{4}\ \ x_2\left(y_1^2-x_1^2\right)-2y_2x_1y_1\ \ +O\left(\varepsilon^2\right), \quad (6)$$

где $\mu = \omega_2/\omega_1 - 2$; ε — малые параметры (коэффициент невязки частот и масштабный коэффициент); $a = \sqrt{2}\omega_1/4A$ [9].

Канонические уравнения с гамильтонианом (6) имеют однопараметрическое семейство короткопериодических решений вида

$$x_2 = \sqrt{C}\sin\Omega(\tau+\tau_0)+O(\varepsilon); \quad y_2 = \sqrt{C}\sin\Omega(\tau+\tau_0)+O(\varepsilon), \quad (7)$$

где $\Omega = 2+\mu+O(\varepsilon^2)$; C — постоянный параметр.

Если выполнено неравенство $|\mu| < \varepsilon\sqrt{2C}$, то короткопериодические решения (7) орбитально устойчивы в линейном приближении, если же $|\mu| > \varepsilon\sqrt{2C}$, то — орбитально неустойчивы. Последнее неравенство задает область параметрического резонанса, границы которой определяются уравнением

$$\mu^2 = 2\varepsilon^2 C. \quad (8)$$

Для того чтобы получить уравнения границы (8) в пространстве исходных параметров задачи, выразим параметры C, μ и ε через ω_1, ω_2 и константу энергии h. Константа энергии h^* системы с гамильтонианом (6) связана с константой энергии h исходной системы с гамильтонианом (1) и параметром C соотношениями

$$C = \frac{2h^*}{2+\mu} + O(\varepsilon^2); \quad h^* = nh = \frac{8A^2 h}{\varepsilon^2 \omega_1}. \tag{9}$$

Второе равенство в (9) получено подстановкой (7) в (6). Подставив в (8) выражение для параметра C из (9) и заменив коэффициент невязки частот по формуле $\mu = \omega_2/\omega_1 - 2$, получим следующее уравнение для границы области параметрического резонанса:

$$\omega_2 \left(\omega_2 - 2\omega_1\right)^2 = 32A^2\omega_1 h + O(h^2). \tag{10}$$

Уравнение границы области параметрического резонанса в исходных параметрах станем искать в виде ряда $\gamma(\delta, h) = \gamma^{(3)}(\delta) + \sqrt{h}\gamma_1(\delta) + O(h)$, где выражение $\gamma^{(3)}(\delta) = \pm\dfrac{\sqrt{-4\delta^3 + 17\delta^2 - 4\delta}}{5\delta}$ задает зависимость γ от δ при точном резонансе $\omega_2 = 2\omega_1$. Подставив этот ряд в (10) и приравняв коэффициенты при равных степенях *h*, определим $\gamma_1(\delta)$ и получим уравнение границы области параметрического резонанса в пространстве параметров h, γ, δ:

$$\gamma(\delta, h) = \gamma^{(3)}(\delta) \pm \frac{\sqrt{6}\,|3\delta - 2|\sqrt[4]{5+5\delta}}{25\sqrt{\delta(4-\delta)}}\sqrt{h} + O(h). \tag{11}$$

Поверхность, задаваемая уравнением (11), показана на рис. 3. При значениях γ, δ, близких к резонансным, и малом *h* эта поверхность хорошо аппроксимирует границы области параметрического резонанса, что подтверждается совпадением результатов аналитического и численного решения (см. рис. 3 и 4, *а*).

Для нахождения семейств долгопериодических движений воспользуемся методикой, изложенной в работе А.П. Маркеева [9]. Посредством замены переменных $x_1, x_2, y_1, y_2 \to Q_1, Q_2, P_1, P_2$ гамильтониан (6) можно привести к виду

$$K^{\mathrm{III}} = P_1 + \mu P_2 + \varepsilon\left(P_1 - 2P_2\right)\sqrt{P_2}\sin(Q_2) + O(\varepsilon^2), \tag{12}$$

где $P_1 \geq 2P_2$.

Система с гамильтонианом (12) имеет первый интеграл $P_1 = C$, где C — параметр, связанный с исходными параметрами задачи через соотношения (9). Используя первый интеграл и отбрасывая в (12) члены выше первой степени по ε, получаем приближенную систему с гамильтонианом

$$K^{\mathrm{IV}} = \mu P_2 + \varepsilon(C - 2P_2)\sqrt{P_2}\sin(Q_2), \tag{13}$$

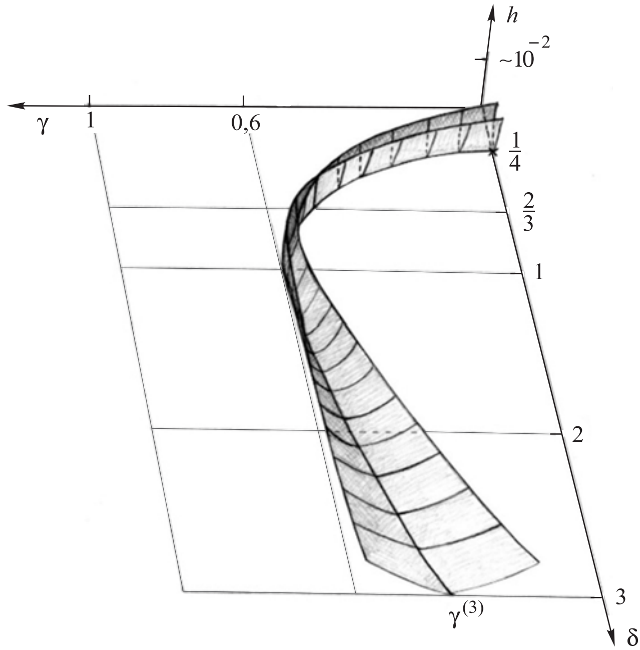


Рис. 3. Граница области параметрического резонанса в пространстве параметров h, γ, δ, полученная аналитически при малых значениях параметра энергии h и всех допустимых значениях кинематического γ и инерционного δ параметров

описывающую долгопериодические движения в окрестности границы области параметрического резонанса.

Положения равновесия Q_2^*, P_2^* системы с гамильтонианом (13) определяются уравнениями

$$\dot{Q}_2^* = \frac{dK^{\mathrm{IV}}}{dP_2^*} = 0; \qquad \dot{P}_2^* = -\frac{dK^{\mathrm{IV}}}{dQ_2^*} = 0.$$

В зависимости от значений параметра μ число положений равновесия будет различным. В области Γ_1 (рис. 4, *б*) существует только положение равновесия $Q_2^* = \dfrac{\pi}{2}$, $P_2^* = \dfrac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 6\varepsilon^2 C}}{6\varepsilon}$ (I), в области Γ_2 — только положение равновесия $Q_2^* = -\dfrac{\pi}{2}$, $P_2^* = \dfrac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 6\varepsilon^2 C}}{6\varepsilon}$ (II). В области Γ_3 существует как положение равновесия I, так и положение равновесия II. При малых значениях μ границы областей совпадают с границей области параметрического резонанса и определяются уравнением (11). В переменных $\psi, \theta, p_\psi, p_\theta$ указанным положениям

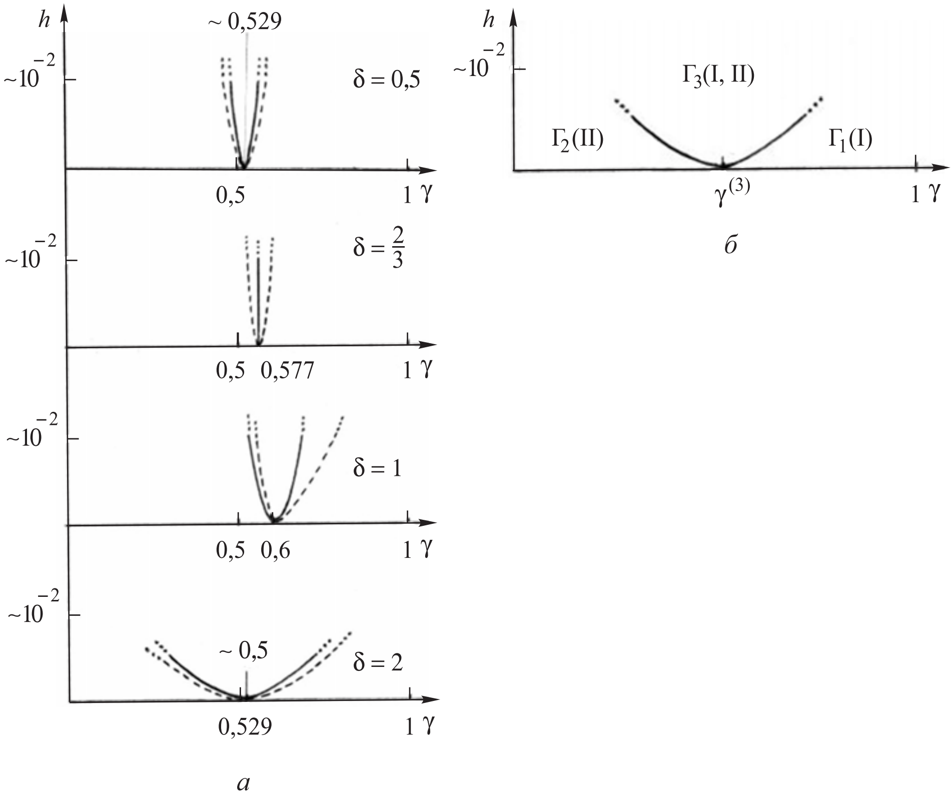


Рис. 4. Взаимное расположение результатов численного (*пунктирные линии*) и аналитического (*сплошные линии*) построения границы области параметрического резонанса в плоскости δ = const в случае $\delta = 0{,}5$; $\delta = 2/3$, $\delta = 1$ и $\delta = 2$ при малых значениях параметра энергии h (*а*) и расположение семейств долгопериодических движений относительно поверхности параметрического резонанса в сечении δ = const при малых значениях параметра h (*б*); в областях Γ_1 и Γ_2 существует по одному семейству долгопериодических движений, в области Γ_3 имеются два семейства долгопериодических движений

равновесия соответствуют два семейства долгопериодических движений (которые далее также будем обозначать I и II). В окрестности резонанса $\omega_2 = 2\omega_1$ семейства долгопериодических движений I и II орбитально устойчивы в первом приближении [9]. С помощью численного метода, описанного выше, указанные семейства были продолжены по параметрам до границ их существования при значениях константы энергии $h \leq 0{,}1$. Результаты численного исследования представлены на рис. 5–7, где через $\gamma^{(3)}$ обозначена кривая резонанса $\omega_2 = 2\omega_1$, через $\gamma^{(4)}$ — кривая резонанса $\omega_2 = 3\omega_1$.

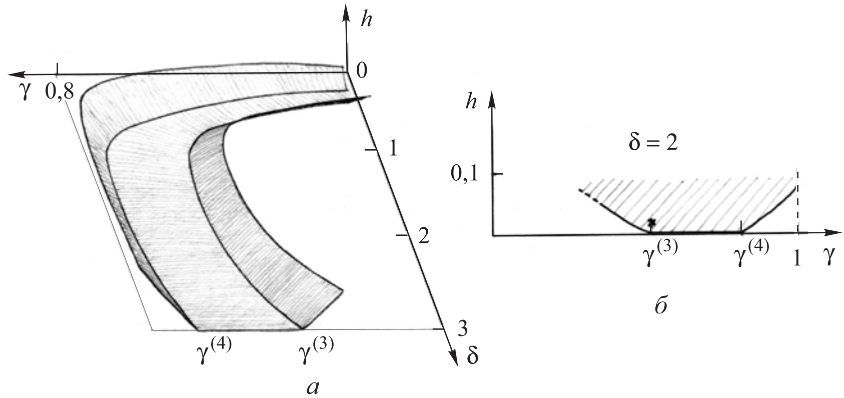


Рис. 5. Граница области существования семейства долгопериодических движений I в пространстве параметров h, γ, δ при малых значениях параметра энергии h (*а*) и ее сечение плоскостью $\delta = 2$ (*б*); *косой штриховкой* показана область существования

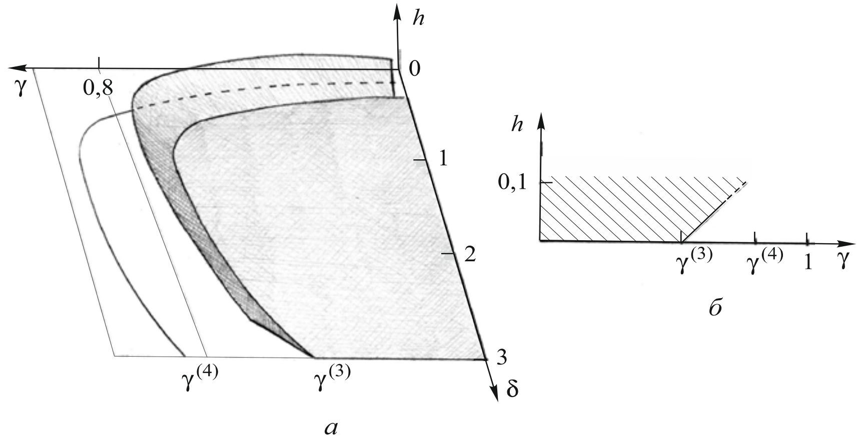


Рис. 6. Граница области существования семейства долгопериодических движений II в пространстве параметров h, γ, δ при малых значениях параметра энергии h (*а*) и ее сечение плоскостью $\delta = 2$ (*б*); *косой штриховкой* показана область существования

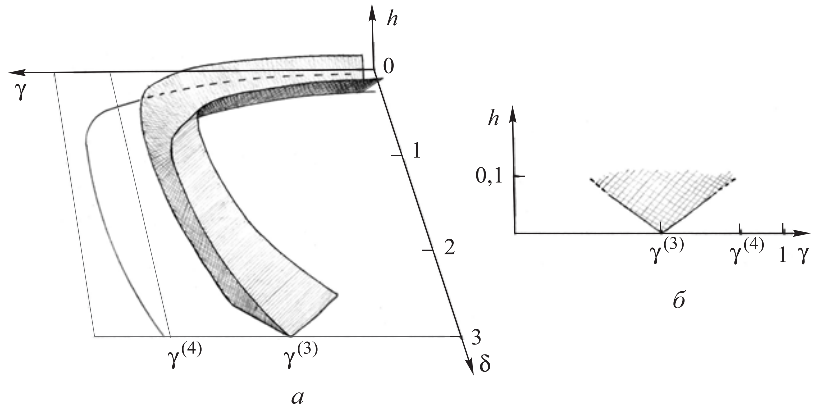


Рис. 7. Граница области существования семейств долгопериодических движений I и II в пространстве параметров h, γ, δ при малых значениях параметра энергии h (*а*) и ее сечение плоскостью $\delta = 2$ (*б*); *косой штриховкой* показана область существования

На рис. 8 показаны траектории точки пересечения оси динамической симметрии спутника и единичной сферы, соответствующие движениям, принадлежащим семействам долгопериодических движений I и II. Эти семейства были построены аналитически в окрестности параметрического резонанса при значениях параметров $\gamma = 0,577$; $\delta = 1,5$ и продолжены по энергетическому параметру h до значения $h = 0,85$.

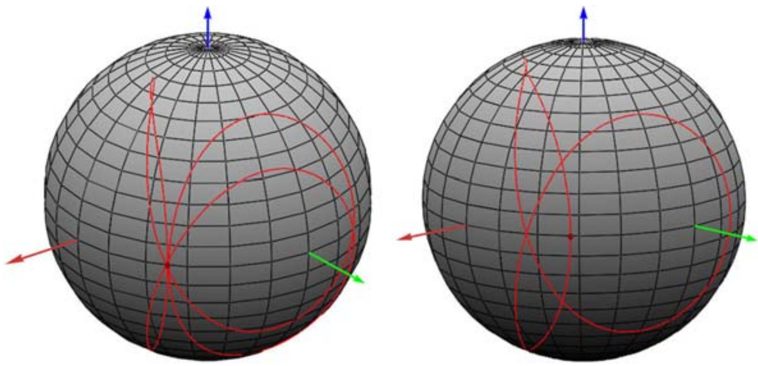


Рис. 8. Траектории точки пересечения оси динамической симметрии спутника и единичной сферы для семейств I и II долгопериодических движений при значениях параметров $\gamma = 0,577$; $\delta = 1,5$; $h = 0,85$

Заключение. В работе выполнено численно-аналитическое построение семейств долгопериодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии, исследован вопрос об их бифуркации при малых амплитудах и орбитальной устойчивости в первом приближении.

Исследование выполнено в рамках государственного задания (проект № 3.3858.2017/4.6).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубошин Г.Н. О вращательном движении искусственных небесных тел. *Бюл. ИТА АН СССР*, 1960, т. 7, № 7, с. 511–520.

[2] Кондурарь В.Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара. *Астрономический журнал*, 1959, т. 36, № 5, с. 890–901.

[3] Белецкий В.В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1975, 308 с.

[4] Сокольский А.Г., Хованский С.А. Периодические движения, близкие гиперболоидальной прецессии спутника на круговой орбите. *Космические исследования*, 1979, т. XVII, вып. 2, с. 208–217.

[5] Маркеев А.П. *Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс*. Москва–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009, 369 с.

[6] Черноусько Ф.Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника. *Прикладная математика и механика*, 1964, т. 28, №. 1, с. 155–157.

[7] Markeev A.P., Bardin B.S. On stability of planar oscillations and rotations of satellite in a circular orbit. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2003, vol. 85, no. 1, pp. 51–66.

[8] Bardin B.S. On orbital stability of planar motions of symmetric satellites in the case of first and second order resonances. *Monografias de la Real Academia De Ciencias. Actas de las VI Jornadas de Mecánica Celeste*, 2004, no. 25, pp. 59–70.

[9] Маркеев А.П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1. *Прикладная математика и механика*, 1999, т. 63, № 5, с. 757–769.

[10] Бардин Б.С., Чекин А.М. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 3:1. *Прикладная математика и механика*, 2009, т. 73, № 3, с. 353–367.

[11] Bardin B.S. On nonlinear motions of hamiltonian system in case of fourth order resonance. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2007, vol. 12, no. 1, pp. 86–100.

[12] Бардин Б.С. Об орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае резонанса 3:1. *Прикладная математика и механика*, 2007, т. 71, № 6, с. 976–988.

[13] Сухов Е.А., Бардин Б.С. Численно-аналитическое построение семейства периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 5. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-5-1489

[14] Сухов Е.А., Бардин Б.С. О периодических движениях, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника. *Тез. докл. LIII Всерос. конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники.* Москва, РУДН, 2017, 32 с.

[15] Deprit A., Henrard J. Natural Families of Periodic Orbits. *The Astronomical Journal*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 158–172.

[16] Каримов С.Р., Сокольский А.Г. Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем. *Препринт. ИТА АН СССР*, 1990, № 9, 32 с.

[17] Сокольский А.Г., Хованский С.А. О численном продолжении периодических решений лагранжевой системы с двумя степенями свободы. *Космические исследования*, 1983, т. 21, № 6, с. 851–860.

[18] Lara M., Peláez J. On the numerical continuation of periodic orbits. An intrinsic, 3-dimentional, differential, predictor-corrector algorithm. *Astronomy & Astrophysics*, 2002, vol. 389, pp. 692–701.

[19] Lara M., Deprit A., Elipe A. Numerical continuation of families of frozen orbits in the zonal problem of artificial satellite theory. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1995, vol. 62, pp. 167–181.

Статья поступила в редакцию 15.09.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сухов Е.А., Бардин Б.С. Численно-аналитическое построение и исследование устойчивости периодических движений симметричного спутника. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 11.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-11-1704

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XLI Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 января 2017 г.

Сухов Егор Аркадьевич родился в 1990 г., окончил МАИ в 2014 г. Аспирант кафедры мехатроники и теоретической механики МАИ, младший научный сотрудник научно-исследовательского отдела кафедры МАИ. Область научных интересов: теория устойчивости, теория нелинейных колебаний, небесная механика, динамика спутников. e-mail: sukhov.george@gmail.com

Бардин Борис Сабирович родился в 1966 г., окончил МАИ в 1989 г. Д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой мехатроники и теоретической механики МАИ, профессор РАН. Область научных интересов: теория устойчивости, теория нелинейных колебаний, небесная механика, динамика спутников.
e-mail: bsbardin@yandex.ru

Numerical and analytical plotting of periodic motion and investigating motion stability in the case of a symmetric satellite

© E.A. Sukhov[1], B.S. Bardin[1,2]

[1] Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, 125993, Russia
[2] Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 101990, Russia

A specific case of motion of a solid dynamically symmetric satellite along a circular orbit in reference to the centre of mass is its hyperboloid precession. If the hyperboloid precession is stable, the equations of satellite motion allow for existence of periodic motion families that describe the oscillations of the satellite's dynamical symmetry axis in the vicinity of the hyperboloid precession. It is possible to derive these families in the form of convergent series in powers of the small parameter, i.e. the oscillation amplitude. There exist two types of these motions: short-term and long-term. If the amplitude is not small, it is necessary to employ a numerical method in order to plot the motions. In the three-dimensional space of the problem parameters, the authors plotted the region where long-term motions exist that stem from the hyperboloid precession of a symmetric satellite. We deal with the cases of resonance being present and third order resonance being absent. We conducted a first-order investigation of the orbital stability problem for long-term motions. We provide the problem statement and the results of plotting the periodic motions analytically in the absence of resonances. We describe in brief the method for plotting the periodic solution families numerically. We present the results of numerical and analytical plotting of long-term solution families stemming from the hyperboloid precession in the vicinity of the resonance. We draw conclusions on the first-order orbital stability of said solutions for small amplitudes.

Keywords: *Hamiltonian system, periodic motions, dynamically symmetric satellite, numerical continuation of solution families, regular precession, orbital stability, resonance*

REFERENCES

[1] Duboshin G.N. *Byul. ITA AN SSSR — Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy of the USSR Academy of Sciences*, 1960, vol. 7, no. 7, pp. 511–520.
[2] Kondurar V.T. *Astronomicheskiy zhurnal — Astronomy Reports*, 1959, vol. 36, no. 5, pp. 890–901.
[3] Beletskiy V.V. *Dvizhenie sputnika otnositelno tsentra mass v gravitatsionnom pole* [Satellite motion in a gravitational field in reference to the centre of mass]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1975, 308 p.
[4] Sokolskiy A.G., Khovanskiy S.A. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1979, vol. 17, no. 2, pp. 208–217.
[5] Markeev A.P. *Lineynye gamiltonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otnositelno tsentra mass* [Linear Hamiltonian systems and certain stability problems for motion of a satellite in reference to its centre of mass]. Moscow, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Computer Research Institute Publ., 2009, 369 p.
[6] Chernousko F.L. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1964, vol. 28, no. 1, pp. 155–157.

[7] Markeev A.P., Bardin B.S. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2003, vol. 85, no. 1, pp. 51–66.

[8] Bardin B.S. *Monografias de la Real Academia De Ciencias. Actas de las VI Jornadas de Mecánica Celeste*, 2004, no. 25, pp. 59–70.

[9] Markeev A.P. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 757–769.

[10] Bardin B.S., Chekin A.M. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 3, pp. 353–367.

[11] Bardin B.S. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2007, vol. 12, no. 1, pp. 86–100.

[12] Bardin B.S. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, no. 6, pp. 976–988.

[13] Sukhov E.A., Bardin B.S. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, no. 5. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-5-1489

[14] Sukhov E.A., Bardin B.S. O periodicheskikh dvizheniyakh, rozhdayushchikhsya iz giperboloidalnoy pretsessii simmetrichnogo sputnika [On periodic motions stemming from hyperboloid precession of a symmetric satellite]. *Tez. dokl. LIII Vseros. konf. po problemam dinamiki, fiziki chastits, fiziki plazmy i optoelektroniki* [Proc. of the 53rd Russian National Conference on the problems of dynamics, particle physics, plasma physics and optoelectronics]. Moscow, Peoples' Friendship University of Russia Publ., 2017, 32 p.

[15] Deprit A., Henrard J. *The Astronomical Journal*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 158–172.

[16] Karimov S.R., Sokolskiy A.G. *Metod prodolzheniya po parametram estestvennykh semeystv periodicheskikh dvizheniy gamiltonovykh sistem* [A parameter-based continuation method for natural periodic motion families in Hamiltonian systems]. Preprint. Institute of Theoretical Astronomy of the USSR Academy of Sciences, 1990, no. 9, 32 p.

[17] Sokolskiy A.G., Khovanskiy S.A. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1983, vol. 21, no. 6, pp. 851–860.

[18] Lara M., Peláez J. *Astronomy & Astro-physics*, 2002, vol. 389, pp. 692–701.

[19] Lara M., Deprit A., Elipe A. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1995, vol. 62, pp. 167–181.

Sukhov E.A. (b. 1990) graduated from Moscow Aviation Institute in 2014. Post-graduate student, Department of Mechatronics and Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute; Research Assistant, Science and Research Department, Moscow Aviation Institute. Specialises in stability theory, non-linear oscillation theory, celestial mechanics, satellite dynamics. e-mail: sukhov.george@gmail.com

Bardin B.S. (b. 1966) graduated from Moscow Aviation Institute in 1989. Dr. Sc. (Phys.-Math.), Head of the Department of Mechatronics and Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute; Professor, Russian Academy of Sciences. Specialises in stability theory, non-linear oscillation theory, celestial mechanics, satellite dynamics.
e-mail: bsbardin@yandex.ru