

# Сравнительный анализ напряжений в несимметричных многослойных композитных пластинах на основе асимптотической теории и трехмерного конечно-элементного расчета

© Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*В статье выполнен анализ точности разработанной ранее асимптотической теории многослойных тонких пластин. Сопоставлены результаты решения задачи об изгибе многослойной несимметричной пластины под давлением, полученные по асимптотической теории и по точной трехмерной теории упругости. Решение задачи в рамках асимптотической теории для случая несимметричной пластины получено впервые. Показано, что несимметричное расположение слоев пластины приводит к появлению продольных перемещений пластины при поперечном давлении. Для решения трехмерной задачи теории упругости использован программный конечно-элементный пакет ANSYS со специально построенной конечно-элементной сеткой. Эта сетка позволяет осуществлять сгущение конечно-элементных узлов по толщине пластины, сохраняя при этом относительно небольшое общее число конечных элементов сетки. Сопоставлены распределения всех напряжений по толщине пластины, полученные с помощью асимптотической теории и конечных элементов метода. Показано, что разработанная асимптотическая теория обеспечивает высокую точность решения по всем компонентам напряжений, включая поперечные и сдвиговые напряжения.*

**Ключевые слова:** асимптотическая теория пластин, многослойные тонкие пластины, несимметричные пластины, метод конечных элементов, поперечные напряжения, численное моделирование

**Введение.** Многослойные тонкостенные конструкции широко применяются в различных областях техники — при создании корпусов летательных аппаратов, морских судов, строительных сооружений, автотранспортных средств. Кроме широко распространенных трехслойных конструкций часто применяются многослойные конструкции с несимметричным расположением слоев относительно срединной поверхности.

Для расчета функционирования таких многослойных конструкций часто необходимы исследования на отсутствие расслоений между слоями при эксплуатации. При проведении таких расчетов требуется точная информация о распределении всех напряжений в слоях, как продольных нормальных, так и напряжений межслойного сдвига и поперечного сжатия или растяжения. Для расчета этих напряжений применяются специальные методики [1–11], а также прямые численные методы решения трехмерных задач теории упругости [12].

Однако расчет тонких многослойных конструкций требует применения очень мелких конечно-элементных сеток и, как следствие, мощных вычислительных средств и значительного машинного времени. Поэтому предпочтение часто отдают двумерным методам расчета тонкостенных конструкций, среди которых одним из наиболее эффективных является метод асимптотического осреднения тонких тел (асимптотическая теория тонких тел), разработанный в [12–17]. В [12, 15] проанализирована эффективность этого метода на примере симметричных многослойных пластин. Расчет несимметричных пластин следует рассмотреть отдельно.

Целью настоящей работы является проведение сравнительного анализа распределений полей напряжений в несимметричных пластинах, полученных с помощью асимптотической теории и прямого численного моделирования на основе конечно-элементного анализа.

**Исходная постановка задачи о расчете напряжений в тонкой многослойной пластине.** Рассмотрим тонкую многослойную пластину постоянной толщины  $h$ , длиной  $L$  и шириной  $b$ , для которой выполняются условия

$$\kappa = h/L \ll 1, \quad b/L \sim 1,$$

т. е. толщина много меньше длины, а ширина имеет один порядок с длиной. Введем безразмерные координаты  $x_k$ , которые будем называть глобальными:

$$x_k = \tilde{x}_k / L, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $\tilde{x}_k$  — обычные (размерные) декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось  $O\tilde{x}_3$  направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, ось  $O\tilde{x}_1$  направлена по длинной стороне  $L$  пластины, оси  $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$  принадлежат срединной поверхности пластины. Пластина является многослойной, все слои ортогональны к направлению  $O\tilde{x}_3$ .

Рассмотрим для пластины трехмерную задачу линейной теории упругости [18]:

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma_{ij} &= 0, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j), \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} &= -\tilde{p}_{\pm} \delta_{i3}, \\ \Sigma_T : u_i &= u_{ei}, \\ \Sigma_B : u_2 &= 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \\ \Sigma_S : [\sigma_{i3}] &= 0, \quad [u_i] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

состоящую из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на внешней и внутренней поверхности  $\Sigma_{3\pm}$  (их уравнение имеет вид  $\tilde{x}_3 = \pm h/2$ ), на торцевой поверхности  $\Sigma_T$  (их уравнение  $\tilde{x}_1 = 0, L$ ), на боковой поверхности  $\Sigma_B$  (ее уравнение  $\tilde{x}_2 = \pm b/2$ ) и условий контакта  $\Sigma_S$  слоев пластины, где  $[u_i]$  — скачок функций.

В системе (2) обозначены компоненты тензоров:  $\sigma_{ij}^*$  — напряжений,  $\varepsilon_{ij}^*$  — деформаций,  $C_{ijkl}(\tilde{x}_3)$  — тензора модулей упругости, а также  $u_j$  — компоненты вектора перемещений,  $\nabla_j = \partial/\partial\tilde{x}_j$  — оператор дифференцирования по декартовым координатам [19]. Тензор модулей упругости зависит от координаты  $x_3$ , так как этот тензор различен для разных слоев пластины.

Следуя [13], рассматриваем случай, когда давление  $\tilde{p}_{\pm}^*$  на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости  $O(\kappa^3)$  по сравнению с  $E_0$  — характерным значением модуля упругости материалов пластины (размерная величина),

$$\tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}, \quad p_{\pm} = O(1)E_0, \quad (3)$$

где  $O(1)$  — безразмерная величина порядка 1. Допущение (3), как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин.

**Асимптотическая теория расчета тонких многослойных пластин.** В [12–15] была разработана асимптотическая теория многослойных тонких пластин, в которой вводятся малый параметр  $\kappa = h/L \ll 1$  и локальная поперечная координата  $\xi = x_3/\kappa$ . Решение задачи (1) в асимптотической теории ищется в виде асимптотических разложений по малому параметру  $\kappa$  в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$\begin{aligned} u_k^* &= u_k^{*(0)}(x_I) + \kappa u_k^{*(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{*(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{*(3)}(x_I, \xi) + \dots, \\ \varepsilon_{ij}^* &= \varepsilon_{ij}^{*(0)} + \kappa \varepsilon_{ij}^{*(1)} + \kappa^2 \varepsilon_{ij}^{*(2)} + \dots, \\ \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij}^{*(0)} + \kappa \sigma_{ij}^{*(1)} + \kappa^2 \sigma_{ij}^{*(2)} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами  $I, J, K, L$ , принимают значения 1, 2, а индексы  $i, j, k, l$  — значения 1, 2, 3.

Подставляя асимптотические разложения (4) в систему уравнений (1) и собирая в ней члены при одинаковых степенях от  $\kappa$ ,

получаем рекуррентную последовательность специальных локальных задач теории упругости 0-го, 1-го, 2-го и 3-го и т. д. приближений для нахождения всех членов асимптотических разложений (4). Эти задачи имеют явное аналитическое решение. При последовательном их решении находим выражения  $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots$  и  $\sigma_{ij}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(3)}, \dots$  для всех приближений перемещений и напряжений в асимптотических разложениях через перемещения  $u_k^{(0)}$ , относящиеся к нулевому приближению. Для практических целей достаточно удерживать только начальные члены в этих асимптотических разложениях.

Для изгибных и сдвиговых напряжений начальные члены асимптотических разложений имеют следующий вид [12, 15]:

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKL}^{(0)} \left( \varepsilon_{KL}^{(0)} + \kappa \xi \eta_{KL}^{(0)} \right) + \kappa \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)}. \quad (5)$$

Для напряжений межслойного сдвига имеем

$$\sigma_{I3} = -\kappa \left\{ C_{IMKL}^{(0)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} - \kappa^2 \left\{ \xi C_{IMKL}^{(0)} \right\}_{\xi} \eta_{KL,M}^{(0)} + \kappa^2 P_{INKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)}. \quad (6)$$

Для поперечных нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & \kappa^2 \left\{ \left\{ C_{MNKL}^{(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)} - \kappa^3 (p_- + \Delta p (\xi + 1/2)) + \\ & + \kappa^3 \left\{ \left\{ \xi C_{MNKL}^{(0)} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \eta_{KL,MN}^{(0)} - \kappa^3 S_{RNKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,MNR}^{(0)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Delta p^* = p_+^* - p_-^*.$$

В этих формулах введены обозначения для комплексов упругих характеристик слоев пластины:

$$\begin{aligned} C_{IJKL}^{(0)} &= C_{IJKL} - C_{Ijk3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL}, \\ \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} &= C_{IJPQ}^{(0)} \langle \Psi_{PQKLM} \rangle_{\xi} - Z_{IJS} \left\{ C_{SMKL}^{(0)} \right\}_{\xi}, \\ Z_{JKL} &= \tilde{C}_{j3i3}^{-1} C_{i3JKL}, \quad \tilde{C}_{j3i3} = 2C_{j3i3} - \delta_{i3} C_{j333}, \\ 2\Psi_{IJKLM} &= -C_{s3KL} \left( \tilde{C}_{I3s3}^{-1} \delta_{MJ} + \tilde{C}_{J3s3}^{-1} \delta_{MI} \right), \quad 2\Psi_{IJsK} = \tilde{C}_{I3s3}^{-1} \delta_{KJ} + \tilde{C}_{J3s3}^{-1} \delta_{KI}, \\ P_{INKLM}^{(0)} &= \left\{ Z_{INS} \left\{ C_{SKLM}^{(0)} \right\}_{\xi} - C_{INPQ}^{(0)} \langle \Psi_{PQKLM} \rangle_{\xi} \right\}_{\xi}, \quad (8) \\ S_{RNKLM}^{(0)} &= \left\{ \left\{ Z_{RNS} \left\{ C_{SMKL}^{(0)} \right\}_{\xi} - C_{RNPO}^{(0)} \langle \Psi_{PQKLM} \rangle_{\xi} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi}. \end{aligned}$$

Введены операторы интегрирования:

$$\begin{aligned} \{f(x_I, \xi)\}_\xi &= \int_{-1/2}^{\xi} (f(x_I, \xi) - \langle f(x_I, \xi) \rangle) d\xi, \\ \langle f(q_I, \xi) \rangle_\xi &= \int_{-1/2}^{\xi} f(q_I, \xi) d\xi + \langle (\xi - 1/2) f(q_I, \xi) \rangle, \\ \langle f(x_I, \xi) \rangle &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x_I, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (9)$$

операторы дифференцирования по локальной координате  $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial \xi$  и по глобальным координатам  $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial x_j$ , а также обозначены деформации и кривизны срединной поверхности пластины в нулевом приближении:

$$\varepsilon_{KL}^{(0)} = \frac{1}{2} (u_{K,L}^{(0)} + u_{L,K}^{(0)}), \quad \eta_{IJ}^{(0)} = -u_{3,IJ}^{(0)}. \quad (10)$$

Для вычисления амплитуд перемещений нулевого приближения  $u_k^{*(0)}$  в асимптотической теории расчета пластин формулируются осредненные уравнения равновесия, получающиеся после подстановки разложений (4) в уравнения равновесия системы (2) и последующего их осреднения [12]:

$$T_{IJ,J} = 0, \quad Q_{J,J} = \Delta \bar{p}, \quad M_{IJ,J} - Q_I = 0, \quad (11)$$

где  $\Delta \bar{p} = \kappa^2 \Delta p$ ,  $T_{IJ}$  — усилия,  $M_{IJ}$  — моменты и  $Q_I$  — перерезывающие силы, которые вводятся с помощью следующих осредненных соотношений:

$$T_{IJ}^* = \langle \sigma_{IJ} \rangle, \quad M_{IJ}^* = \kappa \langle \xi \sigma_{IJ} \rangle, \quad Q_I^* = \langle \sigma_{I3} \rangle. \quad (12)$$

Подставляя выражения (5) для деформаций и напряжений в интегралы формул (12), получаем осредненные определяющие соотношения асимптотической теории пластин с точностью до первых двух приближений:

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} + K_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)}, \\ M_{IJ} &= B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где обозначены тензоры осредненных упругих констант пластины

$$\begin{aligned} \bar{C}_{IJKL}^* &= \langle C_{IJKL}^{*(0)} \rangle, \quad B_{IJKL} = \kappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \quad K_{IJKLM} = \kappa \langle \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle, \\ \bar{D}_{IJKL} &= \kappa^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \quad \bar{K}_{IJKLM} = \kappa^2 \langle \xi \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя выражения (10) в (13), а затем (13) в (11), получаем систему осредненных уравнений равновесия пластины относительно трех неизвестных функций  $u_1^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$ , которые зависят от глобальных переменных  $x_I$ .

Для симметричной пластины, у которой слои расположены симметрично относительно срединной плоскости ( $\xi = 0$ ),  $B_{IJKL}^* = 0$ . Этот случай исследован в [12]. В настоящей работе рассматривается случай несимметричной пластины.

**Задача об изгибе несимметричной пластины.** Рассмотрим задачу об изгибе несимметричной пластины прямоугольной формы, для которой тензор модулей упругости  $C_{ijkl}(\xi)$  не является четной функцией. Пластина нагружена равномерным давлением и жестко защемлена по торцам. Будем предполагать, что материалы слоев пластины являются ортотропными [19], тогда

$$Z_{IKL} = 0, \quad \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} = 0, \quad K_{IJKLM} = 0, \quad \bar{K}_{IJKLM} = 0, \quad (15)$$

$$\bar{C}_{1211} = \bar{C}_{1222} = 0, \quad B_{1211} = B_{1222} = 0, \quad D_{1211} = D_{1222} = 0$$

и решение системы уравнений (10)–(13) можно искать в виде

$$u_1^{(0)}(x_1), u_3^{(0)}(x_1), u_2^{(0)} = 0, T_{11}(x_1), T_{22}(x_1), M_{11}(x_1), M_{22}(x_1), Q_2 = 0, T_{12} = 0. \quad (16)$$

Ненулевые уравнения этой системы с граничными условиями для данной задачи примут вид

$$T_{11,1} = 0,$$

$$M_{11,11} = \Delta \bar{p},$$

$$T_{11} = \bar{C}_{1111} \epsilon_{11}^{(0)} + B_{1111} \eta_{11}, \quad T_{22} = \bar{C}_{2211} \epsilon_{11}^{(0)} + B_{2211} \eta_{11},$$

$$M_{11} = B_{1111} \epsilon_{11}^{(0)} + D_{1111} \eta_{11}, \quad M_{22} = B_{2211} \epsilon_{11}^{(0)} + D_{2211} \eta_{11}, \quad (17)$$

$$\epsilon_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)}, \quad \eta_{11}^{(0)} = -u_{3,11}^{(0)},$$

$$u_{3,1}^{(0)} \Big|_{x_1=0} = u_{3,1}^{(0)} \Big|_{x_1=1} = 0, \quad u_3^{(0)} \Big|_{x_1=0} = u_3^{(0)} \Big|_{x_1=1} = 0,$$

$$u_1^{(0)} \Big|_{x_1=0} = u_1^{(0)} \Big|_{x_1=1} = 0.$$

Решение этой задачи будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= A_1 x_1 (x_1^2 - 1) + A_2 x_1 (x_1 - 1), \\ u_3^{(0)} &= B x_1^2 (x_1 - 1)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $A_1, A_2, B$  — некоторые неизвестные константы. Функции  $u_i^{(0)}$ , выбранные в таком виде, удовлетворяют граничным условиям задачи (17). Подставляя (18) в систему (17), получаем выражения для констант:

$$B = -\frac{\Delta \bar{p} \bar{C}_{1111}}{24\Delta}, \quad A_1 = -\frac{\Delta \bar{p} D_{1111}}{6\Delta}, \quad (19)$$

$$A_2 = \frac{\Delta \bar{p} B_{1111}}{4\Delta}, \quad \Delta = D_{1111} C_{1111} - B_{1111}^2.$$

Используя формулы (14) и (16) и учитывая ортотропность материалов рассматриваемой пластины, преобразуем формулы (5)–(7) для напряжений

$$\sigma_{33} = \kappa^2 \left\{ \left\{ \tilde{C}_{1111} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \varepsilon_{11,11}^{(0)} + \kappa^3 \left\{ \left\{ \xi \tilde{C}_{1111} \right\}_{\xi} \right\}_{\xi} \eta_{11,11}^{(0)} - \kappa^3 \left( p_-^0 + \Delta p^0 (\xi + 1/2) \right),$$

$$\sigma_{II} = \tilde{C}_{II11} \left( \varepsilon_{11}^{(0)} + \kappa \xi \eta_{11}^{(0)} \right), \quad (20)$$

$$\sigma_{I3} = -\kappa \left\{ \tilde{C}_{II11} \right\}_{\xi} \varepsilon_{11,1}^{(0)} - \kappa^2 \left\{ \xi \tilde{C}_{II11} \right\}_{\xi} \eta_{11,1}^{(0)}.$$

**Сравнение с трехмерной теорией.** Для анализа точности полученного решения на основе разработанной асимптотической теории было проведено сравнение результатов расчета компонент тензора напряжений по формулам (20) и соответствующих компонент, рассчитанных по трехмерной теории упругости.

При численных расчетах толщина пластины  $h$  была выбрана равной 21 мм, а остальные геометрические параметры пластины были подобраны таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\kappa = \frac{h}{L} = \frac{\tilde{b}}{L} = 0,025,$$

обеспечивающее «тонкость» пластины. Граничные условия для трехмерной задачи теории упругости были заданы следующими:

$$\sigma_{i3} \Big|_{\tilde{x}_3 = \pm h/2} = -p_{\pm} \delta_{i3},$$

$$u_1 \Big|_{\tilde{x}_1 = 0} = u_1 \Big|_{\tilde{x}_1 = L} = 0,$$

$$u_2 \Big|_{\tilde{x}_2 = \pm \tilde{b}/2} = 0,$$

$$u_3 \Big|_{\tilde{x}_1 = 0} = u_3 \Big|_{\tilde{x}_1 = L} = 0.$$

Были выбраны следующие значения давления на внешней и внутренней поверхностях:  $p_+ = 10^7$  Па и  $p_- = 10^6$  Па. Пластина состояла из трех слоев, толщины которых соответствовали сетке

$A_3 = (-1/2, -1/42, 3/14, 1/2)$  по локальной координате  $\xi = \tilde{x}_3 / h$ .

Значения упругих характеристик ортотропных материалов слоев металлокерамической пластины приведены в табл. 1. Слой № 3 соответствует значению локальной координаты  $\xi = -0,5$ , а слой № 1 —  $\xi = 0,5$ .

Таблица 1

**Упругие характеристики материалов слоев несимметричной пластины**

Номер слоя	$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$E_3$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$G_{13}$ , ГПа	$G_{23}$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
1	200	200	200	76,923	76,923	76,923	0,3	0,3	0,3
2	60	60	40	23	15	15	0,15	0,2	0,2
3	300	300	300	111,111	111,111	111,111	0,35	0,35	0,35

Для численного решения трехмерной задачи теории упругости использован конечно-элементный комплекс ANSYS с тетраэдральным десятиузловым конечным элементом SOLID187. Для проведения расчетов на рассматриваемой пластине была сгенерирована сетка со сгущениями в окрестности расчетных нормальных сечений  $x_1 \in \{0,125; 0,25; 0,375; 0,5\}$  (которые далее будем называть опорными), что позволило сократить общее число конечных элементов. В расчете использовалось 25 конечных элементов на слой в окрестности опорных сечений и два конечных элемента на слой в остальных частях пластины (рис. 1). Общее число конечных элементов для всей пластины составило 10 864 455 (14 658 117 узлов).

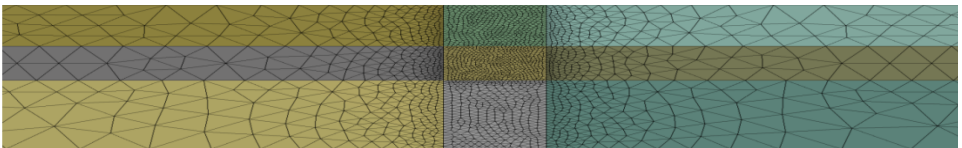


Рис. 1. Сетка в окрестности опорного сечения

На рис. 2–5 для сравнения показано распределение напряжений, рассчитанных по асимптотической теории (АТ) и полученных на основе численного решения трехмерной задачи теории упругости в опорных сечениях ( $a — x_1 = 0,125$ ,  $z — x_1 = 0,5$ ).

Относительное отклонение между решением на основе предложенной АТ и численным решением в ANSYS измерялось в метрике  $L_2[-1/2, 1/2]$ :

$$\delta(\sigma_{ij}, q_1) = \frac{\left\| \sigma_{ij}^{\text{ANSYS}}(q_1) - \sigma_{ij}^{\text{AT}}(q_1) \right\|_{L_2[-1/2, 1/2]}}{\left\| \sigma_{ij}^{\text{AT}}(q_1) \right\|_{L_2[-1/2, 1/2]}} \cdot 100 \% \quad (21)$$



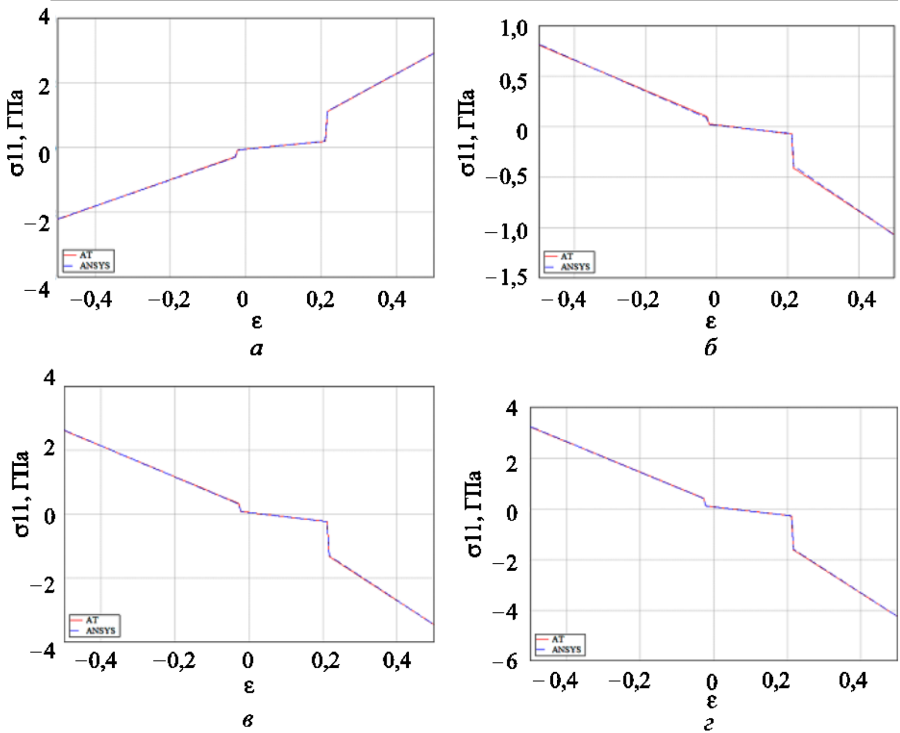


Рис. 2. Распределение изгибного напряжения  $\sigma_{11}$  по толщине пластины

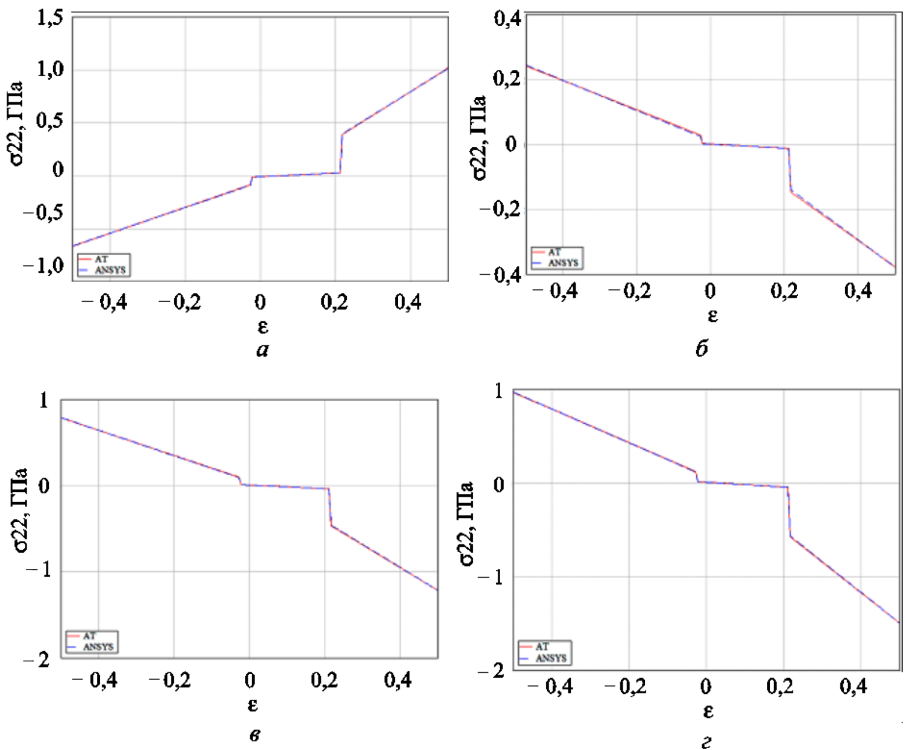


Рис. 3. Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{22}$  по толщине пластины

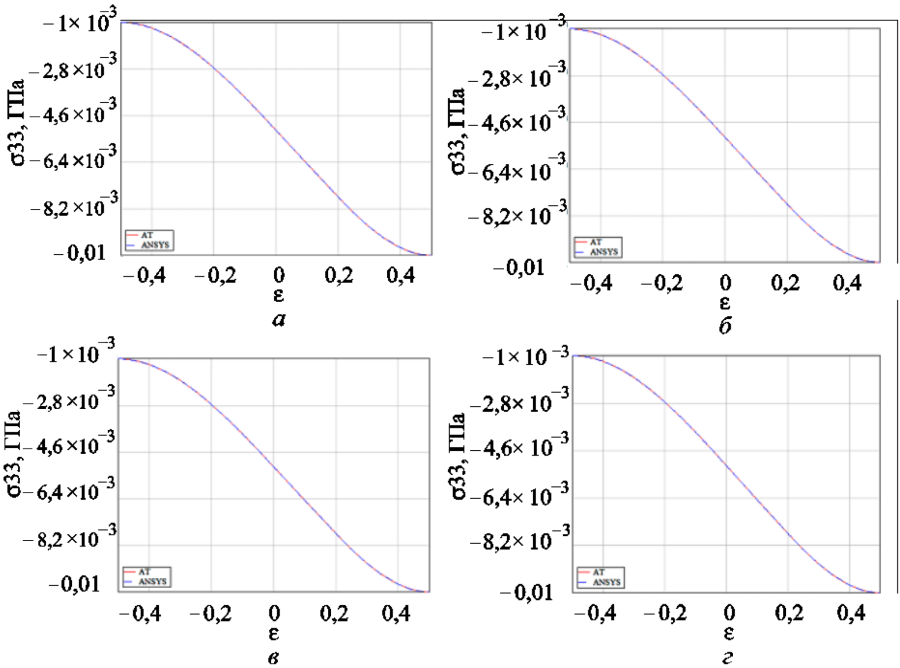


Рис. 4. Распределение поперечного напряжения  $\sigma_{33}$  по толщине пластины

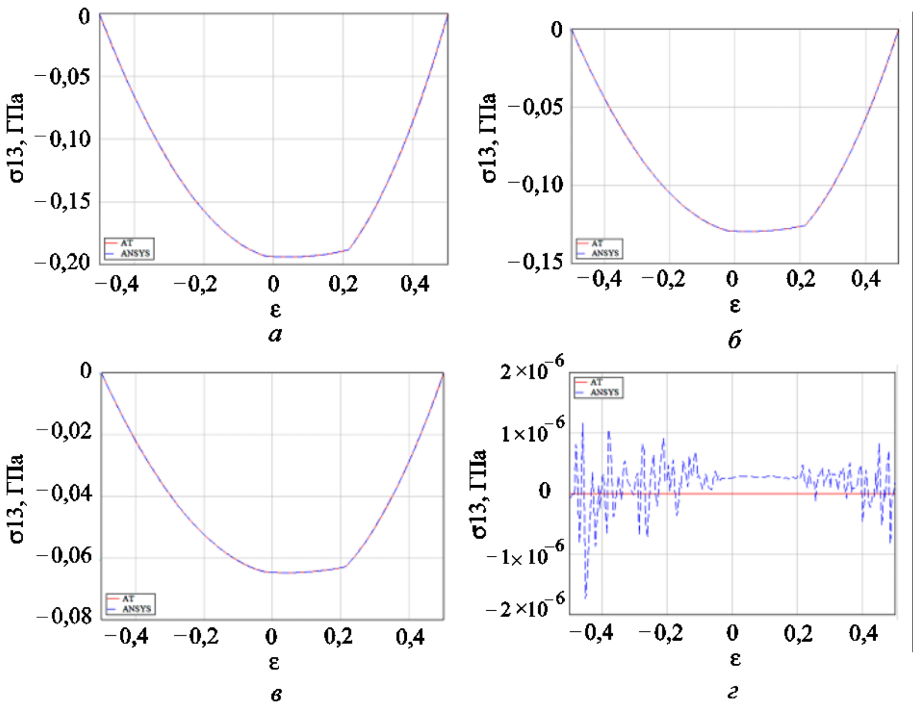


Рис. 5. Распределение напряжения  $\sigma_{13}$  по толщине трехслойной пластины

Отклонение для опорных сечений, рассчитанное по формуле (21), приведено в табл. 2.

Таблица 2

**Относительное отклонение компонент тензора напряжений, рассчитанных по асимптотической и трехмерной теориям в опорных сечениях**

$\sigma_{ij}$	$x_1$			
	0,125	0,25	0,375	0,5
$\sigma_{11}$	0,528	2,59	0,448	0,364
$\sigma_{22}$	2,779	3,059	2,647	0,452
$\sigma_{13}$	0,066	0,065	0,065	—
$\sigma_{33}$	0,021	0,012	0,013	0,009

Согласно формуле (20), компонента тензора напряжений  $\sigma_{13}$ , рассчитанная по АТ, в центральном сечении обращается при  $x_1 = 0,5$  в нуль. Численное решение, полученное на основе трехмерной теории (см. рис. 5, з), отражает близость к решению на основе асимптотической теории.

Результаты сравнения решений, полученных по асимптотической и трехмерной теориям, показывают, что АТ обеспечивает достаточно высокую точность для всех напряжений. Наибольшая точность достигается для поперечных и сдвиговых напряжений, наименьшая — для боковых нормальных напряжений  $\sigma_{22}$ . Тем не менее эта точность довольно высока — относительная ошибка не превышает 3 %, что является хорошим результатом для относительно короткой пластины (малый параметр 0,025). Точность расчетов повышается при стремлении малого параметра к нулю, т. е. для еще меньших значений  $k$ .

Таким образом, как и для симметричной пластины [12], разработанный метод позволяет получать довольно точные решения и для несимметричных пластин.

**Закключение.** Проведенный сравнительный анализ распределений напряжений в несимметричных многослойных пластинах, вычисленных на основе асимптотической теории и трехмерного конечно-элементного расчета, позволяет сделать вывод о том, что асимптотическая теория обладает значительными преимуществами в сопоставлении с трехмерным конечно-элементным методом решения задач для тонкостенных многослойных пластин: при использовании ее требуются значительно менее мощные вычислительные средства и существенно меньшее машинное время для достижения одинаковой точности расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.

- [2] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, pp. 255–272.
- [3] Tornabene F. Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2011, no. 200, pp. 931–952.
- [4] Алфатов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1980, 324 с.
- [5] Пешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Изв. РАН. МТТ*, 2006, № 6, с. 71–79.
- [6] Зверьев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.
- [7] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.
- [8] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct.*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.
- [9] Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине. *Докл. АН СССР*, 1987, т. 294, № 5, с. 1061–1065.
- [10] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore; London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.
- [11] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2004, 228 p.
- [12] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7 (19). URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html> (дата обращения 21.08.2017).
- [13] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.
- [14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортоотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.
- [15] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Моделирование и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым наполнителем. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 5, с. 66–82.
- [16] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д., Сборщиков С.В. Численное моделирование вязкоупругих характеристик пенопластов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 11 (59). DOI 10.18698/2308-6033-2016-11-1555
- [17] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. Asymptotic Theory for Vibrations of Composite Plates. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 60, pp. 2993–3002. NIKARI Ltd. [www.m-hikari.com](http://www.m-hikari.com) <https://doi.org/10.12988/ams.2016.68231>
- [18] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 580 с.
- [19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.

Статья поступила в редакцию 19.06.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Сравнительный анализ напряжений в несимметричных многослойных композитных пластинах на основе асимптотической теории и трехмерного конечно-элементного расчета. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 10. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-10-1693>

**Димитриенко Юрий Иванович** родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 350 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах.  
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

**Юрин Юрий Викторович** родился в 1989 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области механики композитов.  
e-mail: yvurin@yandex.ru

# Comparative stress analysis in nonsymmetrical multilayer composite plates in the asymptotic theory and three-dimensional finite element calculation

© Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article analyzes the accuracy of previously developed multilayer thin plates' asymptotic theory. We compare the solution results of the bending problem for a multilayer asymmetric plate under pressure obtained in the asymptotic theory and in the exact three-dimensional elasticity theory. The problem solution in the asymptotic theory for the asymmetric plate case was obtained for the first time. The paper shows that the plate layers' arrangement asymmetry leads to the longitudinal plate displacements at transverse pressure. We used a software finite-element ANSYS package with a specially constructed finite element mesh to solve the elasticity theory three-dimensional problem. This grid allows for a finite element nodes thickening along the plate thickness while maintaining a relatively small grid lateral elements total number. The paper compares all stresses distributed along the plate thickness, obtained by means of the asymptotic theory and finite elements method. We show that the developed asymptotic theory provides high solution accuracy for all stress components, including transverse and shear stresses.*

**Keywords:** asymptotic theory of plates, multilayer thin plates, asymmetric plates, finite element method, lateral stresses, numerical simulation

## REFERENCES

- [1] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov — Mechanics of Composite Materials*, 1988, vol. 24, no. 4, pp. 698–704.
- [2] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, pp. 255–272.
- [3] Tornabene F. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, no. 200, pp. 931–952.
- [4] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980, 324 p.
- [5] Sheshenin S.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids. A Journal of the Russian Academy of Sciences*, 2006, no. 6, pp. 71–79.
- [6] Zveryaev E.M., Makarov G.I. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics, RAS*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 308–321.
- [7] Nazarov S.A., Svirs G.H., Slutsky A.S. *Matematicheskii Sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 8, pp. 41–80.
- [8] Kohn R.V., Vogelius M. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.
- [9] Panasenko G.P., Reztsov M.V. *Dokl. AN SSSR — Reports of Acad. Sci. USSR*, 1987, vol. 294, no. 5, pp. 1061–1065.
- [10] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore, London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.
- [11] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Heidelberg, SpringerVerlag, 2004, 228 p.

- [12] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 7 (19). Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html> (accessed August 21, 2017).
- [13] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–100.
- [14] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
- [15] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Prozorovsky A.A., Erasov V.S., Yakovlev N.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2014, no. 5, pp. 66–82.
- [16] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, iss. 11, (59). DOI 10.18698/2308-6033-2016-11-1555
- [17] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 60, pp. 2993–3002. Available at: [www.m-hikari.com](http://www.m-hikari.com) <https://doi.org/10.12988/ams.2016.68231>
- [18] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solid-state mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 580 p.
- [19] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 1. Tenzorny analiz* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.

**Dimitrienko Yu.I.** (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sc. (Phys.-Math.), head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, head of the Scientific and Educational Center Supercomputer Engineering Modeling and Development of Software Complexes at BMSTU, member of the Academy of Engineering Sciences. Author of over 350 scientific publications in the field of continuum mechanics, computational mechanics, gas dynamics, mechanics and thermomechanics of composites, mathematical modeling in the science of materials. e-mail: [dimit.bmstu@gmail.com](mailto:dimit.bmstu@gmail.com)

**Yurin Yu.V.** (b. 1989) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2012. Post-graduate student of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, BMSTU. Author of 20 scientific publications in the field of composite mechanics. e-mail: [vyurin@yandex.ru](mailto:vyurin@yandex.ru)