

В. С. М о р е в а

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ВИХРЕВОГО ВЛИЯНИЯ
В МОДИФИЦИРОВАННОЙ СХЕМЕ МЕТОДА
ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Представлены аналитические формулы для модифицированного классического метода вихревых элементов — метода вихревых элементов с нулевыми касательными компонентами скорости. Данные формулы позволяют вычислить коэффициенты матрицы, аппроксимирующей интегральное уравнение, к которому сводится решение задачи о моделировании обтекания профилей, и повысить точность расчетов.

E-mail: morevavs@rambler.ru

Ключевые слова: метод вихревых элементов, профиль, вихревой слой.

Введение. Метод вихревых элементов (МВЭ) — один из эффективных численных методов моделирования нестационарного обтекания профилей потоком несжимаемой среды [1–3]. Суть метода заключается в замене профиля вихревым слоем, расположенным на его поверхности, с заранее неизвестной интенсивностью. Аэродинамический след за телом моделируется большим количеством изолированных вихревых элементов, движущихся в потоке по определенному закону (в случае идеальной среды — по траекториям жидких частиц). При этом скорость среды в любой точке области течения определяется как суперпозиция набегающего потока, скоростей, индуцированных всеми вихревыми элементами аэродинамического следа и вихревым слоем на профиле. Интенсивность вихревого слоя находится из граничного условия на профиле. В дальнейшем часть завихренности, сосредоточенной в вихревом слое (либо она вся в случае покоящегося или поступательно движущегося профиля), становится свободной и пополняет аэродинамический след.

Таким образом, интенсивность вихревого слоя необходимо вычислять на каждом шаге расчета по времени. Точность ее нахождения определяет правильность моделирования аэродинамического следа, точность вычисления аэродинамических нагрузок, действующих на профиль, и в конечном итоге корректность решения всей задачи.

Существующие численные схемы, обычно используемые в МВЭ, в ряде случаев приводят к существенным погрешностям вычисления интенсивности вихревого слоя. Особенно сильно это проявляется при моделировании обтекания профилей с угловыми точками и острыми кромками, в частности, крыловых профилей. При исследовании задач аэроупругости данный эффект может оказывать решающее значение и приводить к качественно неверному решению.

В связи с этим актуальной задачей является переход к новой расчетной схеме МВЭ, которая позволяет избежать отмеченных недостатков “классического” подхода и существенно повысить точность решения задач. Представляется перспективным использование известного подхода [4], основанного на сведении задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма, в то время как в рамках “классической” реализации МВЭ возникает необходимость решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Проведенное сравнение двух подходов на примере расчета обтекания профилей простейших форм, показало высокую эффективность “модифицированной” расчетной схемы МВЭ. Следует отметить, что существенной особенностью разработанного подхода является выполнение граничных условий не в отдельных (контрольных) точках на профиле, а в среднем на участках профиля, на которых интенсивность вихревого слоя полагается постоянной. Это приводит к необходимости вычисления интегралов, которые в работе [5] находились численно с использованием квадратурных формул Гаусса.

Целью данной работы является получение точных аналитических выражений для вычисления вихревого влияния в рамках “модифицированного” метода вихревых элементов.

Постановка задачи гидродинамики. Движение вязкой несжимаемой среды описывается уравнением неразрывности $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ и уравнениями Навье–Стокса

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nu \Delta \vec{V} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right),$$

где $\vec{V}(\vec{r}, t)$ — скорость набегающего потока, $p(\vec{r}, t)$ — давление, $\rho = \text{const}$ — плотность среды, ν — коэффициент кинематической вязкости. В идеальной жидкости $\nu = 0$ и уравнения Навье–Стокса переходят в уравнения Эйлера.

В качестве граничных условий выступают условие прилипания $\vec{V}(\vec{r}, t) = 0$ либо условие непротекания $\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}) = 0$ на профиле и условия затухания возмущений на бесконечности

$$\vec{V}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{V}_\infty, \quad p(\vec{r}, t) \rightarrow p_\infty, \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty.$$

В терминах завихренности $\vec{\Omega}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{V}(\vec{r}, t)$ уравнения движения среды могут быть записаны в форме Гельмгольца:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{U}) = 0. \quad (1)$$

Здесь $\vec{U}(\vec{r}, t) = \vec{V}(\vec{r}, t) + \vec{W}(\vec{r}, t)$, $\vec{W}(\vec{r}, t)$ — диффузионная скорость, пропорциональная коэффициенту вязкости и равная нулю для идеальной среды [3].

При известном распределении завихренности скорость среды может быть вычислена с использованием закона Био–Савара:

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi}, t) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS.$$

Согласно уравнению (1), завихренность в области течения движется по линиям поля скоростей \vec{U} . “Новая” завихренность генерируется только на профиле в виде вихревого слоя, влияние которого на поле скоростей в области течения эквивалентно влиянию обтекаемого профиля. Таким образом, из граничного условия на профиле следует интегральное уравнение относительно интенсивности вихревого слоя.

С математической точки зрения задача поиска интенсивности вихревого слоя в текущий момент времени эквивалентна задаче о моделировании стационарного обтекания профиля потоком идеальной среды. При расчете нестационарного обтекания профиля аналогичную задачу следует решать на каждом шаге по времени.

Модифицированный подход в МВЭ. Рассмотрим задачу о моделировании обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой среды [5] при отсутствии завихренности в области течения. Профиль моделируется тонким вихревым слоем с интенсивностью $\gamma(p_0) = \gamma(x_0, y_0)$. Скорость $\vec{V} = (v_x, v_y, 0)^T$ может быть найдена в любой точке течения по закону Био–Савара (точка $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)^T$ лежит на поверхности профиля K , $\vec{\gamma}(\vec{r}_0) = \gamma(\vec{r}_0)\vec{k}$ – вектор интенсивности вихревого слоя, $\vec{k} = (0, 0, 1)^T$):

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}_\infty + \oint_K \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0}.$$

Предельные значения скорости среды на поверхности профиля равны

$$\vec{V}_\pm(\vec{r}) = \vec{V}_\infty + \oint_K \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0} \pm \left(\frac{\vec{\gamma}(\vec{r})}{2} \times \vec{n}(\vec{r}) \right).$$

Здесь $\vec{n}(\vec{r})$ – вектор единичной нормали к поверхности профиля в точке \vec{r} , вектор $\vec{V}_+(\vec{r})$ соответствует предельному значению скорости со стороны потока, $\vec{V}_-(\vec{r})$ – предельному значению скорости со стороны профиля.

Для того чтобы определить интенсивность вихревого слоя γ , необходимо решить уравнение $\vec{V}_-(\vec{r}) = \vec{0}$ на поверхности профиля, которое эквивалентно любому из уравнений $\vec{V}_- \cdot \vec{n} = 0$ и $\vec{V}_- \cdot \vec{\tau} = 0$ [4]. В “классическом” МВЭ используется условие равенства нулю нормальных компонент скорости на границе профиля (назовем этот подход НМВЭ), в то время как в рамках рассматриваемого в данной работе подхода

используется условие равенства нулю касательных компонент скорости (КМВЭ) среды. Последнее сводится к интегральному уравнению Фредгольма:

$$\oint_K \frac{[\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \cdot \vec{\tau}(\vec{r})}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \gamma(\vec{r}_0) dl_{r_0} - \frac{\gamma(\vec{r})}{2} = -\vec{\tau}(\vec{r}) \cdot \vec{V}_\infty. \quad (2)$$

На гладких участках профиля ядро данного уравнения ограничено величиной $\kappa/(2\pi)$, где κ — кривизна профиля в соответствующей точке.

Для выделения единственного решения уравнения (2) используется дополнительное условие [1].

Результаты расчетов показывают, что точность решения повышается, если обеспечивать выполнение (2) не в отдельных точках r_p , $p = 1, \dots, N$ на профиле, а в среднем по участку профиля — панели K_p , длина которой равна L_p , $p = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L_p} \int_{K_p} \left[\oint_K \frac{[\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \cdot \vec{\tau}(\vec{r})}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \gamma(\vec{r}_0) dl_{r_0} \right] dl_r - \\ & - \frac{1}{L_p} \int_{K_p} \frac{\gamma(\vec{r})}{2} dl_r = -\frac{1}{L_p} \int_{K_p} \vec{\tau}(\vec{r}) \cdot \vec{V}_\infty dl_r, \quad p = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

В отличие от НМВЭ, где интенсивность вихревого слоя сосредотачивалась в одной точке на панели, в КМВЭ завихренность считается равномерно распределенной по всей панели. Тогда внутренний интеграл в первом слагаемом в (3) преобразуется в сумму влияний панелей с распределенной интенсивностью:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^N \frac{1}{L_p} \int_{K_p} \left[\int_{K_q} \frac{[\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \cdot \vec{\tau}(\vec{r})}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \gamma(\vec{r}_0) dl_{r_0} \right] dl_r - \\ & - \frac{1}{L_p} \int_{K_p} \frac{\gamma(\vec{r})}{2} dl_r = -\frac{1}{L_p} \int_{K_p} \vec{\tau}(\vec{r}) \cdot \vec{V}_\infty dl_r, \quad p = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

Неизвестная функция $\gamma(\vec{r})$ постоянна на каждой панели, и (4) можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^N \left(A_{ij}(1 - \delta_{ij}) - \frac{1}{2}\delta_{ij} \right) \gamma_j = -B_i. \quad (5)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $B_i = \vec{\tau}_i \cdot \vec{V}_\infty$ — влияние набегающего потока на i -ю панель, неизвестная переменная γ_j — интенсивность вихревого слоя на j -й панели, A_{ij} — коэффициент матрицы взаимо-

влияний панелей,

$$A_{ij} = \frac{1}{L_i} \int_{K_i} \left[\int_{K_j} \frac{[\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)] \cdot \vec{\tau}_i}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0} \right] dl_r,$$

$\vec{\tau}(\vec{r}) = \vec{\tau}_i$ — направляющий вектор i -й панели.

Для того чтобы записать окончательную формулу для матричного коэффициента A_{ij} , заметим, что он представляет собой среднее значение на i -й панели касательной компоненты скорости, индуцируемой j -й панелью в предположении, что интенсивность вихревого слоя на j -й панели единичная. Для его вычисления сначала запишем выражения для средней величины поля скоростей на i -й панели, индуцируемого j -й панелью:

$$\vec{V}_{ij} = \frac{1}{L_i} \int_{K_i} \left[\int_{K_j} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0} \right] dl_r.$$

На рис. 1 введено несколько вспомогательных векторов: векторы \vec{d} и \vec{d}_0 сонаправлены с i -й и j -й панелями, их длина L_i и L_j соответственно; векторы \vec{s}_1 и \vec{s}_2 соединяют начало j -й панели с началом и концом i -й панели; векторы \vec{p}_1 и \vec{p}_2 соединяют конец j -й панели с началом и концом i -й панели. В результате после преобразований можно получить следующую формулу:

$$\vec{V}_{ij} = \frac{1}{2\pi|\vec{d}_0||\vec{d}|^2} \left[q_1^{(1)}\vec{c}_1 + q_2^{(1)}\vec{c}_2 + q_3^{(1)}\vec{c}_3 + \left(q_1^{(2)}\vec{c}_1 + q_2^{(2)}\vec{c}_2 + q_3^{(2)}\vec{c}_3 \right) \times \vec{k} \right].$$

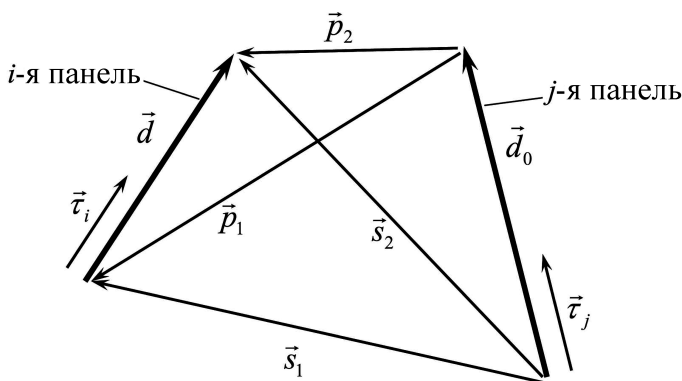


Рис. 1. Две панели профиля и вспомогательные векторы

Здесь

$$\begin{aligned}
 q_1^{(1)} &= \operatorname{arctg} \frac{\vec{d} \cdot \vec{p}_1}{z_1} - \operatorname{arctg} \frac{\vec{d} \cdot \vec{p}_2}{z_1}, \\
 q_2^{(1)} &= \operatorname{arctg} \frac{\vec{d} \cdot \vec{s}_2}{z_2} - \operatorname{arctg} \frac{\vec{d} \cdot \vec{s}_1}{z_2}, \\
 q_3^{(1)} &= \operatorname{arctg} \frac{\vec{d}_0 \cdot \vec{p}_2}{z_3} - \operatorname{arctg} \frac{\vec{d}_0 \cdot \vec{s}_2}{z_3}; \\
 z_1 &= (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)_z, \quad z_2 = (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)_z, \quad z_3 = (\vec{s}_2 \times \vec{p}_2)_z; \quad (6) \\
 q_1^{(2)} &= \ln \frac{|\vec{p}_2|}{|\vec{p}_1|}, \quad q_2^{(2)} = \ln \frac{|\vec{s}_1|}{|\vec{s}_2|}, \quad q_3^{(2)} = \ln \frac{|\vec{p}_2|}{|\vec{s}_2|}; \\
 \vec{c}_1 &= (\vec{d}_0 \cdot \vec{p}_1) \vec{d} + (\vec{d} \cdot \vec{s}_1) \vec{d}_0 - (\vec{d} \cdot \vec{d}_0) \vec{s}_1, \\
 \vec{c}_2 &= (\vec{d}_0 \cdot \vec{s}_1) \vec{d} + (\vec{d} \cdot \vec{s}_1) \vec{d}_0 - (\vec{d} \cdot \vec{d}_0) \vec{s}_1 = \vec{c}_1 + (\vec{d}_0 \cdot \vec{d}_0) \vec{d}, \\
 \vec{c}_3 &= (\vec{d} \cdot \vec{d}) \vec{d}_0.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что теперь коэффициент матрицы A_{ij} представляет собой скалярное произведение

$$A_{ij} = \vec{V}_{ij} \cdot \vec{\tau}_i.$$

Для соседних панелей $\vec{p}_1 = 0$, $\vec{s}_2 \neq 0$, коэффициенты $q_1^{(1)}$ и $q_1^{(2)}$ равны нулю. Для соседних панелей при $\vec{s}_2 = 0$ векторы \vec{d}_0 и \vec{d} следует заменить на $(-\vec{d}_0)$ и $(-\vec{d})$ соответственно; тогда получим предыдущий случай при $\vec{p}_1 = 0$, $\vec{s}_2 \neq 0$.

При решении нестационарной задачи аэродинамики во внешнем течении присутствуют изолированные вихревые элементы, моделирующие вихревой след за обтекаемым профилем. Их положения \vec{r}_w и интенсивности Γ_w известны, $w = 1, \dots, N_{wake}$. Они оказывают влияние на поле скоростей среды, поэтому их следует учесть при вычислении интенсивности вихревого слоя на профиле. Для этого в правую часть уравнения (5) необходимо добавить слагаемые, соответствующие касательным скоростям на i -й панели, вызванным w -ми вихревыми элементами следа:

$$B_i^{wake} = \vec{\tau}_i \cdot \sum_{w=1}^{N_{wake}} \vec{V}_w^{wake},$$

где

$$\vec{V}_w^{wake} = \frac{\Gamma_w}{L_i} \int_{K_i} \left[\frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_w)}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}_w|^2} \right] dl_r. \quad (7)$$

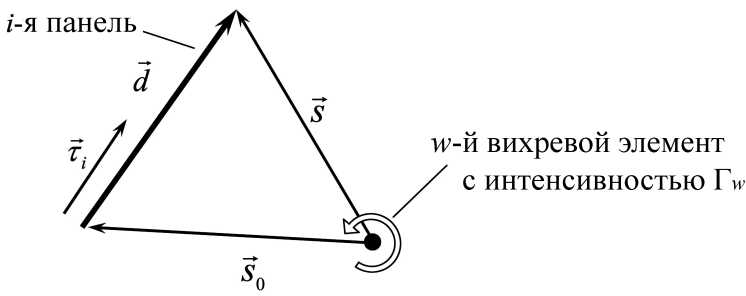


Рис. 2. i -я панель на профиле, w -й вихревой элемент вихревого следа и вспомогательные векторы

На рис. 2 по аналогии с рис. 1 для вычисления скорости \vec{V}_w^{wake} введены некоторые вспомогательные векторы: векторы \vec{s}_0 и \vec{s} соединяют начало и конец i -й панели с w -ым вихревым элементом, расположенным в точке \vec{r}_w . Используя эти векторы, выражение (7) можно привести к виду

$$\vec{V}_w^{wake} = -\frac{\Gamma_w}{2\pi|\vec{d}|^2} \left[\alpha \vec{d} + \beta (\vec{d} \times \vec{k}) \right]. \quad (8)$$

Здесь

$$\alpha = \arctan \frac{\vec{s} \cdot \vec{d}}{z_0} - \arctan \frac{\vec{s}_0 \cdot \vec{d}}{z_0}, \quad \beta = \ln \frac{|\vec{s}|}{|\vec{s}_0|}, \quad z_0 = (\vec{d} \times \vec{s}_0)_z. \quad (9)$$

Таким образом, получены точные формулы для расчета вихревого влияния в методе вихревых элементов с касательными компонентами скорости, в котором интенсивность вихревого слоя на профиле представляется кусочно-постоянной функцией, а выполнение граничного условия обеспечивается не в отдельных (контрольных) точках, а в среднем на панелях.

Выводы. В работе рассмотрена задача о моделировании обтекания профиля потоком несжимаемой среды. Для ее решения в рамках метода КМВЭ с помощью аппроксимации интенсивности вихревого слоя кусочно-постоянной линейной функцией получены аналитические формулы, позволяющие вычислить коэффициенты матрицы, аппроксимирующей интегральное уравнение, к которому сводится решение задачи.

Разрабатываемый метод может быть применен для моделирования нестационарного обтекания профилей и решения задач аэрогидроупругости.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК-6482.2012.08).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л и ф а н о в И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 521 с.
2. L e w i s R. I. Vortex Element Methods For Fluid Dynamic Analysis Of Engineering Systems. Cambridge University Press, 2005.
3. А н д р о н о в П. Р., Г у в е р н ю к С. В., Д ы н н и к о в а Г. Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. – М.: Изд-во МГУ, 2006. – 184 с.
4. К е м п к а S. N., G l a s s M. W., P e e r y J. S., S t r i c k l a n d J. H. Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations. SANDIA REPORT SAND96-0583 UC-700, 1996.
5. М а к а р о в а М. Е. Расчет стационарного безотрывного обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Сер. Естественные науки. 2011. Специальный выпуск “Прикладная математика”. – С. 63–74.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012