УДК 517.9

И. К. Марчевский

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В ПОТОКЕ ДЛЯ ПРОФИЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗЕЙ С МАЛЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Получены условия устойчивости по Ляпунову для профиля, помещенного в поток и способного совершать колебания с тремя степенями свободы. Рассмотрены случаи малых коэффициентов демпфирования связей и близких собственных частот колебаний. Полученные достаточные условия устойчивости и неустойчивости положений равновесия являются обобщениями полученных ранее условий.

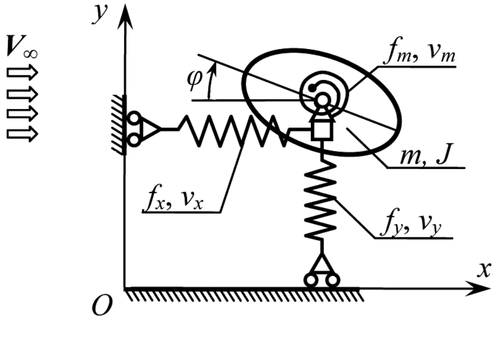
E-mail: iliamarchevsky@mail.ru

Ключевые слова: *профиль, устойчивость по Ляпунову, демпфирование, первое приближение, аэродинамические нагрузки, критерий Гурвица.*

Введение. В работах [1–3] поставлена и решена задача об исследовании устойчивости по Ляпунову положений равновесия в потоке динамической системы, состоящей из профиля, закрепленного при помощи идеально упругих либо вязкоупругих связей с линейной диссипацией. Полученные в указанных работах достаточные условия устойчивости и неустойчивости обобщают ранее известные условия и критерии. Рассмотренная расчетная схема изображена на рисунке.

Здесь m и J — масса и момент инерции в расчете на единицу длины профиля; f_x, f_y, f_m — коэффициенты упругости горизонтальной, вертикальной и крутильной связей соответственно; ν_x, ν_y, ν_m — их коэффициенты диссипации.

Воздействие на профиль со стороны потока учитывается при помощи зависящих только от угла атаки профиля стационарных аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента (C_{xa}, C_{ya} и C_m), через которые выражаются соответствующие аэродинамические нагрузки в расчете на



Расчетная схема в задаче исследования устойчивости положений равновесия профиля в потоке

единицу длины профиля:

$$F_{xa}=\frac{1}{2}C_{xa}\rho V_\infty^2 b,\quad F_{ya}=\frac{1}{2}C_{ya}\rho V_\infty^2 b,\quad M_z=\frac{1}{2}C_m\rho V_\infty^2 b^2.$$

Здесь ρ — плотность среды, V_∞ — скорость набегающего потока, b — характерный размер (хорда профиля).

При выводе условий устойчивости используются безразмерные частоты собственных колебаний (фактически — безразмерные жесткости связей)

$$\omega_x^2=\frac{f_x b}{\rho_0 V_\infty^2 h},\quad \omega_y^2=\frac{f_y b}{\rho_0 V_\infty^2 h},\quad \omega_m^2=\frac{f_m}{\sigma\rho_0 b V_\infty^2 h}$$

и безразмерные вязкости связей

$$\mu_x=\frac{\nu_x}{\rho\, bV_\infty},\quad \mu_y=\frac{\nu_y}{\rho\, bV_\infty},\quad \mu_m=\frac{\nu_m}{\sigma\rho\, b^3 V_\infty},$$

где ρ_0 — средняя плотность профиля (отношение массы m к площади сечения Σ); h — второй характерный размер профиля, определяемый так, что $b\cdot h=\Sigma$; σ — безразмерный параметр, определяемый формой профиля и вычисляемый по формуле $\sigma=J/(\rho_0 b^3 h)$.

Введенный естественным образом параметр

$$\varepsilon=\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{b}{h}$$

является малым ($\varepsilon\ll 1$), если плотность материала профиля ρ_0 много больше плотности набегающего потока ρ, а два его характерных размера близки. Для таких профилей, которые названы тяжелыми плохообтекаемыми, удалось получить довольно простые условия устойчивости, которые приведены в таблице.

Таблица

Параметры системы	Достаточные условия асимптотической устойчивости	
	Для идеально упругих связей	Для вязко-упругих связей
Движение с 3 степенями свободы		
$\omega_x=\omega_y$	$\begin{cases}M>0\\P>0\\W>0\\F>0\end{cases}$	$\begin{cases}M_\mu>0\\W_\mu>0\\F>0\end{cases}$
$\omega_x\neq\omega_y$	$\begin{cases}G>0\\P>0\\F>0\end{cases}$	$\begin{cases}G_\mu>0\\F>0\end{cases}$

При выводе условий устойчивости для системы уравнений движения профиля записывалась система дифференциальных уравнений первого приближения, а для анализа знаков действительных частей корней ее характеристического уравнения использовался критерий Гурвица [3]. При этом в окончательных выражениях, представляющих собой многочлены по степеням малого параметра ε, пренебрегается всеми членами за исключением члена с младшей степенью ε.

В таблице для краткости приняты следующие обозначения полученных ранее условий:

$$G = C'_{ya} + C_{xa}, \qquad G_\mu = G + 2\mu_y,$$
$$M = G + 2C_{xa}, \qquad M_\mu = G_\mu + 2(C_{xa} + \mu_x),$$
$$W = C_{xa}(C'_{ya} + C_{xa}) + C_{ya}(C_{ya} - C'_{xa}),$$
$$W_\mu = (C_{xa} + \mu_x)(C'_{ya} + C_{xa} + 2\mu_y) + C_{ya}(C_{ya} - C'_{xa}),$$
$$P = \frac{C'_{xa}C_m}{\omega_x^2 - \omega_m^2} + \frac{2C'_{ya}C'_m}{\omega_y^2 - \omega_m^2}, \qquad F = \frac{2f_m}{\rho b^2} - V_\infty^2 C'_m.$$

В упомянутых выше работах [1–3] приведены также достаточные условия как устойчивости, так и неустойчивости для систем с одной и двумя степенями свободы — частных случаев динамической системы, изображенной на рисунке, имеющих меньшее число степеней свободы.

Целью данной работы является исследование устойчивости рассмотренной механической системы в потоке при малом демпфировании связей, а также при близких значениях собственных частот колебаний ω_x и ω_y.

Условия устойчивости для систем с малой диссипацией в связях. Заметим, что условия устойчивости, полученные для профиля с вязкоупругими связями, не переходят в условия для профиля с идеально упругими связями, если положить коэффициенты демпфирования равными нулю. Тем не менее, никакого «парадокса», аналогичного, например, известному в механике парадоксу Циглера [4], здесь не наблюдается. Анализ проведенной процедуры вывода условий устойчивости показывает, что условия, полученные для случая идеально упругих связей, справедливы не только при $\mu_x = \mu_y = \mu_m = 0$, но и в случае, когда коэффициенты μ_x и μ_y малы, а коэффициент μ_m мал по сравнению с ε, т.е.

$$\mu_x \ll 1, \qquad \mu_y \ll 1, \qquad \mu_m \ll \varepsilon.$$

В то же время условия устойчивости и неустойчивости, полученные для случая вязкоупругих связей, справедливы хоть и для достаточно широкого, но, тем не менее, ограниченного диапазона коэффициентов демпфирования связей

$$\mu_x \ll \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \mu_y \ll \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \ll \mu_m \ll \frac{1}{\varepsilon}.$$

При исследовании других ситуаций достаточно простых и «лаконичных» условий устойчивости, аналогичных представленным в таблице, может не получиться, поскольку знак слагаемого с младшей степенью ε в таких случаях может не определять знака всей суммы. Здесь, по-видимому, целесообразно найти значения миноров соответствующих матриц Гурвица численно и проанализировать их знаки.

Рассмотрим важный с практической точки зрения случай, когда безразмерный коэффициент демпфирования μ_m порядка ε. Для простоты обозначим

$$\mu_m = \varkappa_m \varepsilon.$$

Процедура исследования устойчивости в данном случае становится несколько более трудоемкой по сравнению с базовыми случаями, тем не менее, исследование знаков миноров матрицы Гурвица показывает, что возможны два основных случая.

• При $\omega_x^2 \neq \omega_y^2$ для асимптотической устойчивости положения равновесия достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} C'_{ya} + C_{xa} + 2\mu_y > 0, \\ \dfrac{C'_m C'_{ya}}{\omega_y^2 - \omega_m^2} + 2\dfrac{C_m C'_{xa}}{\omega_x^2 - \omega_m^2} + 4\varkappa_m \sigma > 0, \\ \dfrac{2f_m}{\rho b^2} > V_\infty^2 C'_m, \end{cases} \tag{1}$$

или, с учетом ранее введенных в таблице обозначений,

$$\begin{cases} G_\mu > 0, \\ P + 4\varkappa_m \sigma > 0, \\ F > 0. \end{cases}$$

Эти условия формально справедливы для любых $\mu_x \ll 1/\varepsilon$, $\mu_y \ll 1/\varepsilon$. Если же дополнительно $\mu_y \ll 1$, то в первом неравенстве полученной системы им можно пренебречь.

• При $\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega^2$ условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$\begin{cases} C'_{ya} + 3C_{xa} + 2(\mu_y + \mu_x) > 0, \\ \dfrac{C'_{ya} C'_m}{\omega^2 - \omega_m^2} + 2\dfrac{C'_{xa} C_m}{\omega^2 - \omega_m^2} + 4\varkappa_m \sigma > 0, \\ (C_{xa} + \mu_x)(C_{xa} + C'_{ya} + 2\mu_y) + C_{ya}(C_{ya} - C'_{xa}) > 0, \\ \dfrac{2f_m}{\rho b^2} > V_\infty^2 C'_m, \end{cases} \tag{2}$$

или, более кратко,

$$\begin{cases} M_\mu > 0, \\ P + 4\varkappa_m \sigma > 0, \\ W_\mu > 0, \\ F > 0. \end{cases}$$

Эти условия также формально справедливы для любых $\mu_x \ll 1/\varepsilon$, $\mu_y \ll 1/\varepsilon$, но если дополнительно выполняется $\mu_x \ll 1$ и $\mu_y \ll 1$, то в первом и третьем неравенствах выписанной системы этими величинами можно пренебречь.

Для неустойчивости в рассмотренных случаях достаточно, чтобы хотя бы одно из неравенств в (1) и (2) соответственно поменяло смысл на противоположный.

Если теперь проанализировать (1) и (2), то становится очевидно, что при $\varkappa_m \ll 1$ (т.е. при $\mu_m \ll \varepsilon$) последними слагаемыми во вторых неравенствах можно пренебречь по сравнению с первыми двумя, и тогда данные условия устойчивости переходят в приведенные в таблице условия для систем с идеально упругими связями.

Если же $\varkappa_m \gg 1$, что соответствует $\mu_m \gg \varepsilon$, первыми двумя слагаемыми во вторых неравенствах можно пренебречь по сравнению с последним, поэтому эти неравенства выполняются «автоматически», и тогда условия устойчивости (1) и (2) переходят в приведенные в таблице условия для систем с вязкоупругими связями.

Условия устойчивости для систем с близкими жесткостями связей. Если провести аналогичный анализ для случаев совпадения и несовпадения квадратов частот ω_x^2 и ω_y^2, то можно получить, что условия устойчивости, приведенные в таблице для случая $\omega_x^2 = \omega_y^2$, остаются справедливыми и в случае близких квадратов частот, когда

$$\left|\omega_x^2 - \omega_y^2\right| \ll \varepsilon,$$

в то время как условия устойчивости, выведенные для случая $\omega_x^2 \neq \omega_y^2$, справедливы при

$$\varepsilon \ll \left|\omega_x^2 - \omega_y^2\right| \ll \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ниже рассмотрим «промежуточный» случай, когда квадраты частот колебаний ω_x^2 и ω_y^2 отличаются на величину порядка ε, т.е.

$$\left|\omega_x^2 - \omega_y^2\right| = \delta\varepsilon.$$

Исследование знаков действительных частей корней характеристического уравнения матрицы системы уравнений движения через анализ знаков миноров матрицы Гурвица показывает, что возможны два случая.

• При идеально упругих связях условия асимптотической устойчивости положения равновесия профиля принимают вид

$$\begin{cases} C'_{ya} + 3C_{xa} > 0, \\ \dfrac{C'_{ya}C'_m}{\omega_y^2 - \omega_m^2} + \dfrac{2C'_{xa}C_m}{\omega_x^2 - \omega_m^2} > 0, \\ (C'_{ya} + 3C_{xa})^2 \cdot \big(C_{xa}(C'_{ya} + C_{xa}) + C_{ya}(C_{ya} - C'_{xa})\big) + \\ \quad + 4C_{xa}(C'_{ya} + C_{xa})\omega_x^2\delta^2 > 0, \\ \dfrac{2f_m}{\rho b^2} > V_\infty C'_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Используя введенные в таблице обозначения, эти условия можно записать в виде

$$\begin{cases} M > 0, \\ P > 0, \\ M^2 \cdot W + 4C_{xa}\omega_x^2\delta^2 \cdot G > 0, \\ F > 0. \end{cases}$$

• При вязкоупругих связях получаются следующие условия устойчивости:

$$\begin{cases} C'_{ya} + 3C_{xa} + 2(\mu_y + \mu_x) > 0, \\ \big(C'_{ya} + 3C_{xa} + 2(\mu_x + \mu_y)\big)^2 \cdot \big((C_{xa} + \mu_x)(C'_{ya} + C_{xa} + 2\mu_y) + \\ \quad + C_{ya}(C_{ya} - C'_{xa})\big) + 4(C_{xa} + \mu_x)(C'_{ya} + C_{xa} + 2\mu_y)\omega_x^2\delta^2 > 0, \\ \dfrac{2f_m}{\rho b^2} > V_\infty C'_m, \end{cases} \qquad (4)$$

или, в более краткой форме записи с учетом введенных выше обозначений,

$$\begin{cases} M_\mu > 0, \\ M_\mu^2 \cdot W_\mu + 4(C_{xa} + \mu_x)\omega_x^2\delta^2 \cdot G_\mu > 0, \\ F > 0. \end{cases}$$

Для неустойчивости, как и ранее, достаточно, чтобы хотя бы одно из неравенств в (3) и (4) поменяло смысл на противоположный.

Анализ условий (3) и (4) показывает, что они естественным образом переходят в условия, указанные в таблице для случая $\omega_x^2 = \omega_y^2$, при $\delta \ll 1$, что соответствует мало различающимся частотам

$$\left|\omega_x^2 - \omega_y^2\right| \ll \varepsilon,$$

и в условия для случая $\omega_x^2 \neq \omega_y^2$ при $\delta \gg 1$, т.е. при существенно различающихся ω_x^2 и ω_y^2, когда

$$\left|\omega_x^2 - \omega_y^2\right| \gg \varepsilon.$$

Условия устойчивости для систем с близкими жесткостями связей и малой диссипацией. Рассмотрим также случай, когда безразмерный коэффициент демпфирования крутильной связи порядка ε, а безразмерные квадраты частот ω_x^2 и ω_y^2 близки и различаются на величину порядка ε, т.е.

$$\mu_m = \varkappa_m \varepsilon \qquad \text{и} \qquad \left|\omega_x^2 - \omega_y^2\right| = \delta \cdot \varepsilon.$$

Процедура получения условий устойчивости для такого случая существенно осложняется ввиду громоздкости аналитических выражений, которые необходимо преобразовывать и упрощать. Тем не менее, и в этом случае удается получить достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия профиля в потоке, которые имеют вид

$$\begin{cases} C'_{ya} + 3C_{xa} + 2(\mu_y + \mu_x) > 0, \\ \dfrac{C'_{ya} C'_m}{\omega_y^2 - \omega_m^2} + \dfrac{2C'_{xa} C_m}{\omega_x^2 - \omega_m^2} + 4\varkappa_m \sigma > 0, \\ \big(C'_{ya} + 3C_{xa} + 2(\mu_x + \mu_y)\big)^2 \cdot \big((C_{xa} + \mu_x)(C'_{ya} + C_{xa} + 2\mu_y) + \\ + C_{ya}(C_{ya} - C'_{xa})\big) + 4(C_{xa} + \mu_x)(C'_{ya} + C_{xa} + 2\mu_y)\omega_x^2 \delta^2 > 0, \\ \dfrac{2f_m}{\rho b^2} > V_\infty C'_m, \end{cases}$$

или, используя буквенные обозначения,

$$\begin{cases} M_\mu > 0, \\ P + 4\varkappa_m \sigma > 0, \\ M_\mu^2 \cdot W_\mu + 4(C_{xa} + \mu_x)\omega_x^2 \delta^2 \cdot G_\mu > 0, \\ F > 0. \end{cases}$$

Для неустойчивости достаточно изменения смысла любого из четырех выписанных неравенств.

Заключение. В работе получены условия устойчивости для профиля, помещенного в поток и способного совершать колебания с тремя степенями свободы. Рассмотрены случаи малых коэффициентов демпфирования связей и близких собственных частот колебаний. Полученные достаточные условия устойчивости и неустойчивости положений равновесия являются обобщениями полученных ранее условий и в предельных случаях сводятся к условиям устойчивости, приведенным в таблице.

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект № МК–6482.2012.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М а р ч е в с к и й И. К. Об условиях устойчивости положения равновесия профиля в потоке // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2007. – № 4. – С. 29–36.
2. М а р ч е в с к и й И. К. Математическое моделирование обтекания профиля и исследование его устойчивости в потоке по Ляпунову: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – М., 2008. – 119 с.
3. М а р ч е в с к и й И. К. Устойчивость по Ляпунову положений равновесия профиля в потоке. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 132 с.
4. П а н о в к о Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – Л.: Наука, 1989. – 252 с.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012