

Математическая модель разлета осколков метеорного тела после разрушения

© В.Т. Лукашенко^{1,2,3}, Ф.А. Максимов^{1,2}

¹ИАП РАН, Москва, 123056, Россия

²МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119992, Россия

³ВЦ им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ РАН, Москва, 119333, Россия

Для расчета обтекания системы осколков метеорного тела разработан метод моделирования на системе сеток, который позволяет рассматривать тела различных форм, размеров и масс, а также допускает достаточно произвольное относительное положение тел в потоке. Это дает возможность реализовать алгоритм сопряжения аэродинамического и баллистического расчетов. Алгоритм протестирован на примере задачи о разлете двух идентичных круговых цилиндров, которые расположены на прямой, перпендикулярной набегающему потоку. Полученные значения скоростей разлета тел хорошо согласуются с теоретическими оценками. Даны рекомендации применения метода для расчета и описания разлета двух круговых цилиндров разного размера. Рассмотрена задача о разлете двух тел, имеющих форму половинок цилиндра. Показано, что вследствие явления гистерезиса тела должны совершать периодические колебания расходящегося характера.

Ключевые слова: моделирование, динамика, метеорное тело, разрушение, осколки, сверхзвук, полет

Введение. При входе в атмосферу метеорное тело под воздействием увеличивающегося скоростного напора и теплового нагрева разрушается. В результате разрушения может образовываться достаточно сложная система из многих тел (осколков). Аэродинамические свойства каждого тела в такой системе не будут соответствовать аэродинамическим свойствам тела, подобного по геометрии, но обтекаемого изолированно. Необходимо учитывать взаимное влияние тел, которое может быть значительным. Задача определения аэродинамических свойств системы таких тел (каждого и в среднем всех) является достаточно сложной.

При исследовании движения системы из двух тел вначале следует решить задачу определения аэродинамических характеристик тел в достаточно широком диапазоне возможных относительных положений, а затем задачу динамики фактически с учетом взаимного влияния. При этом для системы из двух тел выбор их возможных относительных положений достаточно хорошо оценивается. Однако оценку аэродинамических свойств можно осуществить только с помощью экспериментальных исследований в аэродинамических трубах или используя методы вычислительной аэродинамики. Примеры экспериментальных исследований аэродинамических свойств систе-

мы тел приведены в работах [1–3], примеры расчетных исследований применительно к метеорной тематике — в работах [4–6]. На основе полученных аэродинамических свойств можно рассчитать траектории.

Если рассматривается система из более чем двух тел, то количество возможных конфигураций системы, необходимых для анализа и проведения аэродинамического расчета, многократно возрастает, что практически исключает разбиение задачи на аэродинамическую и баллистическую. Поэтому предпочтительнее в таком случае решение сопряженной задачи, когда аэродинамическая и баллистическая задачи решаются параллельно.

Исходя из текущей конфигурации рассматривается задача об обтекании системы тел и определяются аэродинамические свойства каждого элемента. Затем изменяются их координаты и скорости в соответствии с имеющимися скоростями и действующими на них силами. Пример исследования динамики двух тел с помощью решения сопряженной задачи приведен в работе [7].

С точки зрения сложности решения задачи и громоздких вычислений основная проблема заключается в решении задачи об обтекании системы тел с учетом взаимной интерференции. В работе [8] предложен метод моделирования, который позволяет рассматривать обтекание системы тел в достаточно произвольной конфигурации. Цель настоящей работы — разработать и провести адаптацию метода для решения сопряженной задачи.

Алгоритм решения сопряженной задачи. При заданном расположении тел решается задача обтекания системы тел методом, изложенным в работе [8]. В соответствии с этим методом систему тел обтекает равномерный поток с постоянной скоростью. Аналогично исследуются аэродинамические свойства тел при испытаниях в аэродинамических трубах. При этом учитывается относительное положение разных тел, но не учитываются различия в скорости. Решив задачу обтекания методом установления, можно рассчитать аэродинамические силы, действующие на каждое из тел, по найденному распределению давления.

На следующем шаге решается баллистическая задача. Движение каждого тела описывает система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad m \frac{du}{dt} = -c_x \rho \frac{V^2}{2} S, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = c_y \rho \frac{V^2}{2} S,$$

где x, y — координаты тела; u, v — проекции скорости соответственно на направления осей координат x и y ; t — время; m — масса тела; c_x, c_y — коэффициенты аэродинамического сопротивления и подъемной силы; ρ — плотность воздуха (среды), в которой движется система тел; $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ — модуль скорости; S — характерная площадь.

В постановке, используемой в настоящей работе, исключено вращение тел под воздействием аэродинамического момента.

В соответствии с данными уравнениями проводится расчет состояния системы (координат и скорости тел) через некоторый малый интервал времени. Аэродинамические коэффициенты при этом определяются по решению аэродинамической задачи, а значения баллистических параметров — по текущим значениям для каждого из тел.

На следующем шаге тела перемещаются на сетке решения задачи обтекания [8] — каждое тело на расстояние, соответствующее относительному смещению тел в системе (т. е. за исключением смещения всей системы в среднем). Шаг интегрирования по времени выбирается из условия так, чтобы максимальное смещение тел на сетке для расчета обтекания составляло не более задаваемого значения. Такое условие необходимо для обеспечения хорошего начального приближения для решения задачи с помощью метода установления и, соответственно, быстрого установления течения. Кроме того, все газодинамические расчеты проводятся при фиксированном числе Маха. В случае изменения скорости набегающего потока на каждом шаге интегрирования применение метода установления требовало бы значительных вычислений и, как следствие, временных затрат.

В общем случае скорости разных тел в системе имеют различные значения. Предполагается, что первоначально тела двигаются почти с одинаковой скоростью или есть направление, в котором вся система тел имеет преобладающее движение с некоторой средней скоростью. Скорость каждого отдельного элемента может иметь некоторое относительно небольшое отклонение от среднего значения. Именно при среднем значении скорости осуществляется аэродинамический расчет. Если какое-то тело имеет значительно отличающуюся скорость, то оно будет заведомо быстро удаляться от системы, и тогда его движение можно рассматривать независимо от остальных тел системы. При экспериментальном исследовании эффектов интерференции в рамках испытаний в аэродинамической трубе также фиксируется полетное число Маха всей системы и рассматривается только влияние относительного положения тел в системе, но не относительное движение тел в системе.

Теория разлета двух одинаковых тел. Тестирование алгоритма. Алгоритм основан на предположении о малой зависимости аэродинамических характеристик от числа Маха при больших сверхзвуковых скоростях. Для проверки и подтверждения этого предположения были проведены тестовые расчеты обтекания двух одинаковых цилиндров, которые расположены на прямой, перпендикулярной вектору скорости при трех значениях числа Маха 3, 6 и 12, в зависимости от расстояния между ними. Если в качестве характерного размера взять

радиус цилиндров, то величина y есть отношение смещения центра цилиндра от плоскости симметрии течения к радиусу. Когда цилиндры касаются, $y = 1$. На рис. 1 и 2 приведены результаты расчетов.

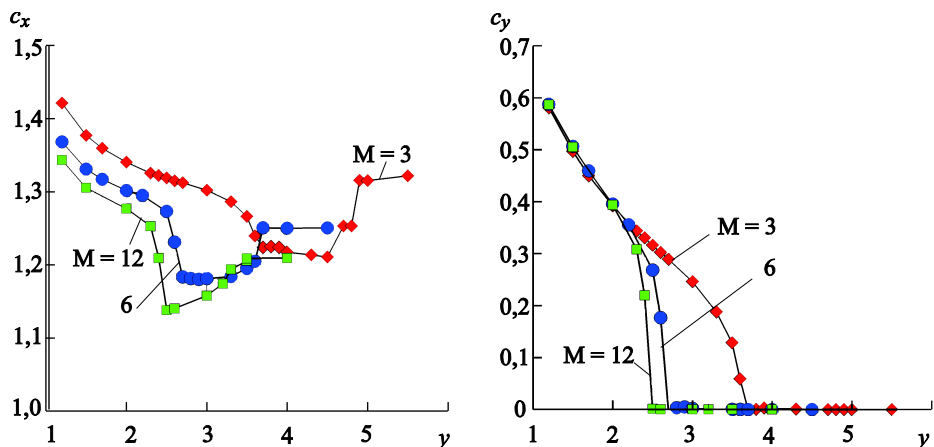


Рис. 1. Значения аэродинамических коэффициентов для задачи обтекания двух одинаковых цилиндров при различных значениях числа Маха

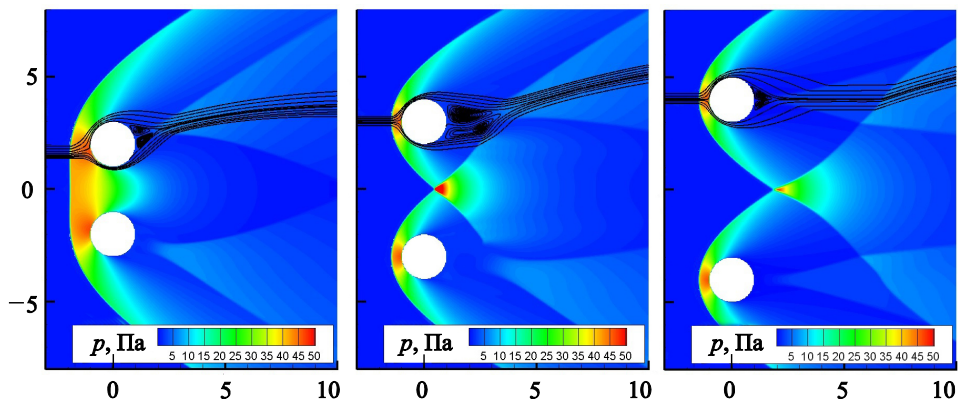


Рис. 2. Распределение безразмерного давления p и линий тока на плоскости при y , равном 2, 3 и 4 ($M = 6$)

Можно выделить три режима обтекания: 1) коллективное обтекание, когда головные ударные волны объединяются и интерференция приводит к образованию силы расталкивания; 2) влияние на течение в донной области соседнего тела, что приводит к снижению полного сопротивления (боковая сила при этом режиме отсутствует); 3) изолированное обтекание при достаточно большом удалении друг от друга. Все эти режимы реализуются независимо от числа Маха, но расстояние, на котором реализуется взаимодействие тел, с увеличением числа Маха сжимается. Отличие в аэродинамических коэффици-

циентах при $M = 6$ и 12 незначительно. При $M = 3$ режим коллективного обтекания и образования в этом случае рассталкивающей силы сохраняется до большого удаления между телами.

Если рассматривается разлет двух одинаковых тел, то достаточно просто можно построить приближенное решение [9]. Действительно, если предположить, что за время разлета продольная скорость изменяется не очень сильно, т. е. разлет происходит при некоторой средней продольной скорости, тогда движение в боковом направлении описывается уравнением

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = c_y \rho \frac{V^2}{2} S.$$

Коэффициент подъемной силы c_y зависит только от y , и в предположении постоянного значения величины $k = \frac{1}{m} \rho \frac{V^2}{2} S$ получаем решение:

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = v^2 = 2k \int_{y_0}^y c_y dy + C_1, \quad t = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{2k \int_{y_0}^y c_y dy + C_1}} + C_2.$$

Скорость разлета тел (т. е. боковая скорость, которую тела приобретают в результате аэродинамического взаимодействия) определяется интегралом от коэффициента подъемной силы. Если предположить, что в начальный момент при $y = y_0$ скорость разлета частей $v_{y_0} = 0$, то максимальная боковая скорость составит

$$v_p^2 = 2k L f(y_0), \quad f(y_0) = \int_{y_0}^{y_m} c_y dy,$$

где L — характерный размер (в данном случае радиус цилиндров); y_m — расстояние, при котором аэродинамическое взаимодействие прекращается.

Окончательно скорость разлета двух одинаковых тел представим в виде

$$v_p = V \sqrt{\frac{\rho S L}{m} f(y_0)}.$$

Аналогично можно представить время, за которое тела разлетаются:

$$t_p = \frac{L}{V} \sqrt{\frac{m}{\rho SL}} g(y_0),$$

где $g(y_0) = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\int_{y_0}^y c_y dy}}$.

Функции $f = f(y_0)$ и $g = g(y_0)$, рассчитанные для трех вариантов числа Маха, по данным, приведенным на рис. 1, иллюстрирует рис. 3. Если в начальный момент времени два тела касались, т. е. $y_0 = 1$, то для разлета надо взять крайнюю левую точку на графике. По результатам расчетов видно, что действительно при больших числах Маха ($M > 6$) аэродинамические свойства мало изменяются, и оценки, например, скорости разлета тел, сделанные по результатам аэродинамических расчетов при $M = 6$ и при $M = 12$, будут отличаться незначительно. Если в начальный момент времени тела расположены на расстоянии, близком к точке прекращения взаимодействия, то время разлета неограниченно растет (скорость разлета при этом почти равна нулю).

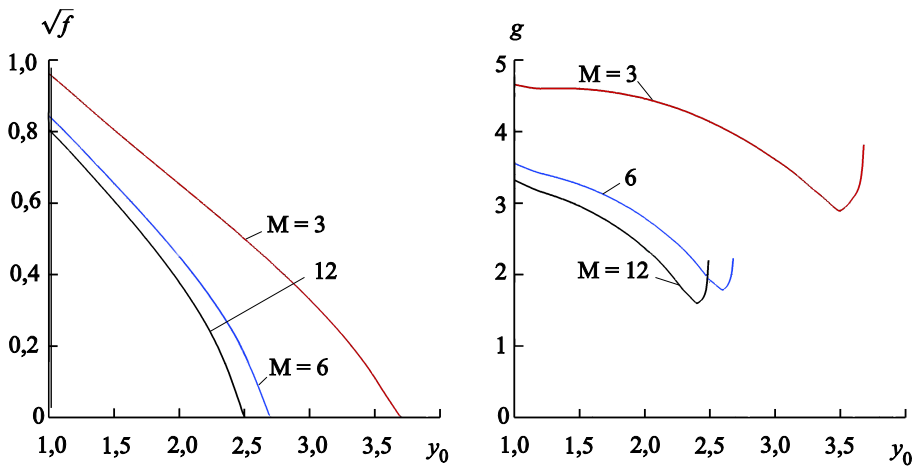


Рис. 3. Функции $f(y_0)$ и $g(y_0)$, определяющие соответственно скорость и время разлета двух одинаковых тел при различных числах Маха

В соответствии с описанным выше алгоритмом решения сопряженной аэродинамической и баллистической задачи были проведены расчеты разлета двух тел, каждое массой 1 кг, в виде цилиндров с радиусом $R = 0,027$ м и шириной 0,054 м, которые разлетались в условиях атмосферы у поверхности Земли ($\rho = 1,293 \text{ кг/м}^3$) при разной

начальной скорости V обоих тел и различном начальном расстоянии y_0 между ними. Результаты расчетов скорости разлета по приведенной выше формуле v_p и полученные в соответствии с алгоритмом решения сопряженной задачи v_{pS} достаточно хорошо согласуются (табл. 1).

Таблица 1

Скорости разлета

| Параметры расчета | Порядковый номер численного эксперимента | | | | |
|---|--|------|------|------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Начальная скорость тел V , м/с | 1000 | 2000 | 4000 | 1000 | 2000 |
| Начальное расстояние между телами y_0 (безразмерная величина) | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 2,0 | 2,0 |
| Скорость разлета по теоретической формуле v_p , м/с | 9,1 | 15,5 | 29,4 | 6,6 | 9,0 |
| Скорость разлета по решению сопряженной задачи v_{pS} , м/с | 9,5 | 17,2 | 35,0 | 7,0 | 11,3 |

Численное исследование задачи о разлете двух тел. Алгоритм решения сопряженной задачи может быть использован для анализа достаточно произвольной начальной конфигурации расположения тел. При этом можно рассматривать тела различных размеров и масс. Результат моделирования динамики двух разных тел приведен на рис. 4. Рассматриваются два тела разного размера ($R_1 = 0,027$ м, $R_2 = 0,0135$ м) и различной массы ($m_1 = 1$ кг, $m_2 = 0,25$ кг). В начальный момент времени тела находятся на прямой, перпендикулярной вектору скорости, и на расстоянии $2R_1$ между центрами тел, а начальная скорость полета составляет 2000 м/с.

Вначале тела обтекаются с образованием общей головной ударной волны и между ними действует рассталкивающая сила. Далее меньшее тело, фактически обладающее худшими баллистическими свойствами, интенсивнее замедляет движение и начинает отставать от более крупного тела. При этом зона дозвукового течения в передней части не является общей, а реализуется около каждого тела. Меньшее тело фактически находится в поле течения, индуцированном большим телом. Как только меньшее тело «сносится» вверх и вниз по потоку, влияние его на большее тело сводится к донной области, что несколько уменьшает коэффициент сопротивления, но боковая сила при этом уже не возникает. В конце меньшее тело находится перед головной ударной волной, созданной большим телом, при этом наличие сзади ударной волны снижает данное сопротивление меньшего тела.

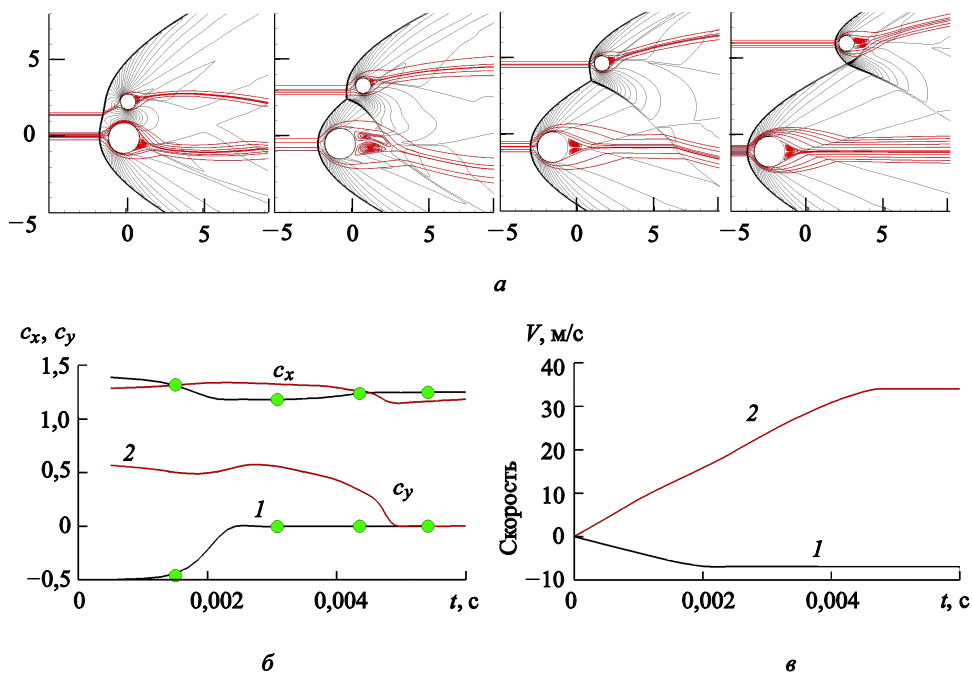


Рис. 4. Разлет двух разных тел:

a — изолинии давления и линии тока на плоскости ($t = 15, 30, 44, 54 \cdot 10^{-4}$ с); *б, в* — поведение аэродинамических характеристик

Приведем нетривиальный пример разлета двух тел. Действительно, если рассматривать два симметричных тела, например два круговых цилиндра, то с удалением друг от друга между ними не будут образовываться силы растаскивания и боковые. Если взять несимметричную форму, то ситуация может быть иной. Близкой к реальности представляется ситуация, когда рассматривается разлет двух тел в виде двух половинок кругового цилиндра (рис. 5), т. е. цилиндр разрезается пополам вдоль прямой по потоку. При малом расстоянии между ними, так же, как и между двумя круговыми цилиндрами, будет действовать расталкивающая сила. При достаточно большом удалении друг от друга вследствие несимметричности формы поперечного сечения тел на верхнее тело будет действовать сила вниз, на нижнее — вверх, т. е. тела должны разлететься, а затем затормозиться и, набрав боковую скорость к друг другу, вернуться в исходное положение. После этого колебание должно повториться. Такая система образует «маятник». Подчеркнем, что в рассматриваемой постановке не допускается вращение тел по углу тангажа.

Моделирование системы из двух половинок кругового цилиндра иллюстрируют рис. 5, 6.

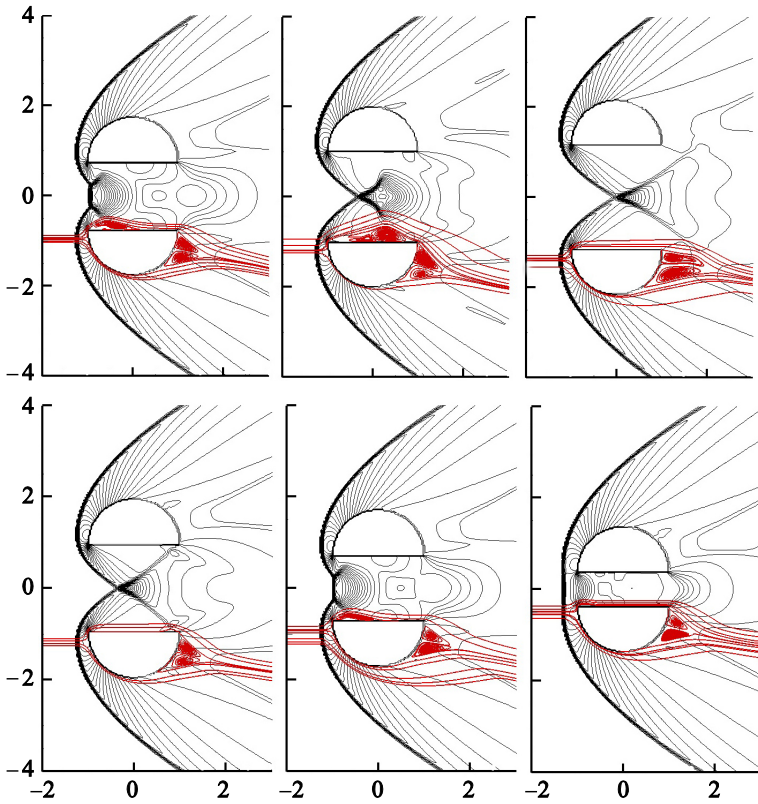


Рис. 5. Разлет двух тел в виде половинок цилиндра (черным цветом выделены изолинии давления, красным — линии тока)

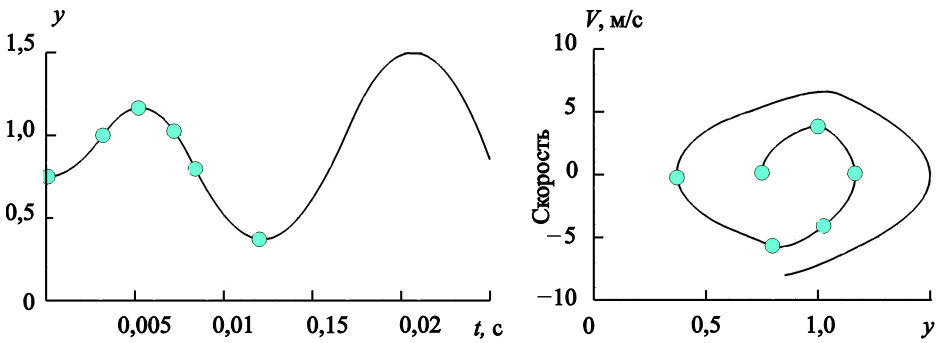


Рис. 6. Изменение расстояния до среза y и скорости v при разлете двух тел в виде половинок цилиндра. Маркерами отмечены точки, для которых приведены картины течения

В соответствии с описанным ранее предположением при достаточно малом начальном расстоянии $y_0 = 0,75$ между телами действует рассталкивающая сила, которая приводит к образованию скорости разлета. При $y \approx 1$ боковая скорость перестает расти и начинает

уменьшаться. Фактически при таком расстоянии между телами они обтекаются независимо, а несимметричная форма приводит к образованию силы по направлению друг к другу.

Наличие сил столкновения приводит наконец к тому, что скорость разлета гасится, и они приобретают скорость по направлению друг к другу. Если бы система вернулась в исходное положение, то получился бы предположенный ранее «маятник». Однако расчеты показали, что колебания носят расходящийся характер. При возвращении системы в положение $y = 0,75$ (пятая точка, отмеченная маркером) тела имеют скорость друг к другу (а в начальном положении скорость была равна нулю). Для того чтобы затормозить и начать разлет, тела сближаются на меньшее расстояние. В итоге зависимость $y = y(t)$ имеет вид синусоиды с растущей амплитудой.

Объяснение такого результата приведено на рис. 7.

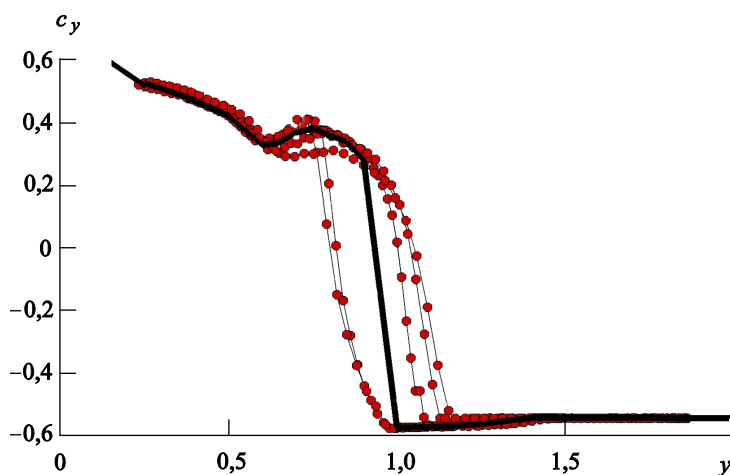


Рис. 7. Зависимость коэффициента боковой силы c_y от координаты y :
 ● — результаты динамического расчета; — результаты длительного расчета методом установления

Если не рассматривать окрестность $y \approx 1$, то видно, что результаты расчетов по динамическому расчету и расчету путем длительного установления с получением каждого варианта y с помощью использования в качестве начального приближения результата, полученного при меньшем значении y , достаточно хорошо согласуются, т. е. если не рассматривается окрестность некоторой критической точки, то принятое для установления количество шагов в динамической постановке вполне достаточно для установления. Около критической точки динамическое решение обладает свойством гистерезиса [10]. Если система подходит к критической точке из области меньших значений y , то перестройка решения и переход к решению с образованием силы

друг к другу затягивается (т. е. реализуется справа от «жирной» линии). Если же система подходит к критической точке из области больших значений y , то перестройка решения и переход к решению с образованием рассталкивающей силы задерживается (т. е. реализуется слева от «жирной» линии). Образование дополнительной «площади» в зависимости $c_y = c_y(y)$ приводит к тому, что энергия системы за цикл увеличивается, процесс становится расходящимся. Вследствие нарастающей амплитуды тела должны обязательно столкнуться.

Заключение. Для исследования обтекания систем тел в условиях значительной интерференции разработан метод решения сопряженной аэродинамической и баллистической задачи. Проведенные тестовые расчеты разлета двух одинаковых тел показали хорошее согласование результатов динамического расчета и теоретической оценки скорости разлета двух тел. Разработанный метод рекомендуется применять для анализа движения двух разных тел и системы из двух половинок кругового цилиндра. В последнем случае тела при разлете должны совершать циклы разлета с последующим притяжением друг к другу. Из-за явления гистерезиса амплитуда колебаний возрастает и тела обязательно должны столкнуться.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Петров К.П. *Аэродинамика тел простейших форм*. Москва, Изд-во «Факториал», 1998, 432 с.
- [2] Ковалев П.И., Менде Н.П. *Альбом сверхзвуковых течений*. Санкт-Петербург, Изд-во Политехнического ун-та, 2011, 251 с.
- [3] Хлебников В.С. *Аэротермодинамика элементов летательных аппаратов при стационарном и нестационарном сверхзвуковом отрывном обтекании*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2014, 168 с.
- [4] Андреев А.А., Холодов А.С. О сверхзвуковом обтекании затупленных тел с учетом интерференции. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1989, т. 29, № 1, с. 142–147.
- [5] Ждан И.А., Стулов В.П., Стулов П.В. Аэродинамическое взаимодействие двух тел в сверхзвуковом потоке. *Доклады Академии наук*, 2004, т. 396, № 2, с. 191–193.
- [6] Максимов Ф.А. Аэродинамическое взаимодействие двух тел в сверхзвуковом потоке. *Сб. трудов Международ. научн. конф. «Проблемы баллистики-2006 (Санкт-Петербург, 19–23 июня 2007 г.)»*. Санкт-Петербург, 2007, т. 2, с. 44–48.
- [7] Барри Н.Г. Динамика двух сферических объектов в сверхзвуковом потоке. *Доклады Академии наук*, 2010, т. 434, № 5, с. 620–621.
- [8] Максимов Ф.А. Сверхзвуковое обтекание системы тел. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2013, т. 5, № 6, с. 969–980.
- [9] Барри Н.Г. Модель разлета фрагментов разрушенного метеороида. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, 2005, № 4, с. 56–59.
- [10] Гувернюк С.В., Максимов Ф.А. Сверхзвуковое обтекание плоской решетки цилиндрических стержней. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2016, т. 56, № 6, с. 1025–1033.

Статья поступила в редакцию 20.02.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Лукашенко В.Т., Максимов Ф.А. Математическая модель разлета осколков метеорного тела после разрушения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 9.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-9-1669>

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XLI Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 января 2017 г.



Лукашенко Владислав Тарасович — аспирант механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, мл. науч. сотр. (по совместительству) ИАП РАН, мл. науч. сотр. ВЦ им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ РАН. Область деятельности и научных интересов: газовая динамика; вычислительная математика; математическое моделирование природных явлений; движение тел в космическом пространстве, жидких и газовых средах.
e-mail: lukashenko-vt@yandex.ru



Максимов Федор Александрович — д-р техн. наук, ведущий науч. сотр. ИАП РАН, профессор механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Область деятельности и научных интересов: аэродинамика; численное моделирование; математическое моделирование природных явлений.
e-mail: f_a_maximov@mail.ru

Numerically simulated model of meteor body fragments distribution after destruction

© V.T. Lukashenko^{1,2,3}, F.A. Maksimov^{1,2}

¹Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (ICAD RAS), Moscow, 123056, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119992, Russia

³Institution of the Russian Academy of Sciences
Dorodnitsyn Computing Centre of RAS, Moscow, 119333, Russia

To calculate the flow-around of the meteor body fragments system, we have developed a simulation technique based on the grid system. This method helps to consider the bodies of various shapes, sizes and masses and also allows for fairly random relative body position in the flow. It gives an opportunity to implement the algorithm of conjugating aerodynamic and ballistic analyses. The algorithm was tested through the problem of two identical circular cylinders dispersion, the cylinders being located on the right line perpendicular to the approach flow. The obtained values of the bodies dispersion speed properly conform to the theoretical estimates. We provide recommendations for applying the computing technique and describing the dispersion of two circular cylinders of different sizes. The article considers the problem of two bodies' dispersion, the bodies having the shape of cylinder halves. It is shown that due to the hysteresis effect the bodies must execute periodic diverging oscillations.

Keywords: simulation, dynamics, meteor body, destruction, fragments, supersonic, flying

REFERENCES

- [1] Petrov K.P. *Aerodinamika tel prosteyshikh form* [Aerodynamics of simplest shapes bodies]. Moscow, Faktorial Publ., 1998, 432 p.
- [2] Kovalev P.I., Mende N.P. *Albom sverkhzvukovykh techeniy* [The album of supersonic flows]. St. Petersburg, Polytechnic University Publ., 2011, 251 p.
- [3] Khlebnikov V.S. *Aerothermodynamika elementov letatelnykh apparatov pri statsionarnom i nestatsionarnom sverkhzvukovom otrivnom obtekanii* [Aerothermodynamics of flying vehicles elements during the stationary and nonstationary supersonic separation flow]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 168 p.
- [4] Andreyev A.A., Kholodov A.S. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, vol. 29, no. 1, pp. 142–147.
- [5] Zhdan I.A., Stulov V.P., Stulov P.V. *Doklady Akademii nauk — Doklady Physics*, 2004, vol. 396, no. 2, pp. 191–193.
- [6] Maksimov F.A. *Aerodinamicheskoye vzaimodeystviye dvukh tel v sverkhzvukovom potoke* [Aerodynamic coupling of two bodies in the supersonic flow]. *Sb. trudov Mezhdunar. nauchn. konf. „Problemy ballistiki–2006 (Sankt-Peterburg, 19–23 iyunya 2007 g.)”* [Proceedings of the International Scientific Conference “The problems of ballistics–2006 (St. Petersburg, June 19–23, 2007)”. St. Petersburg, 2007, vol. 2, pp. 44–48.
- [7] Barri N.G. *Doklady Akademii nauk — Doklady Physics*, 2010, vol. 434, no. 5, pp. 620–621.
- [8] Maksimov F.A. *Kompyuternyye issledovaniya i modelirovaniye — Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 6, pp. 969–980.

- [9] Barri N.G. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya I. Matematika. Mekhanika* — *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2005, no. 4, pp. 56–59.
- [10] Guvernuyuk S.V., Maksimov F.A. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* — *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 6, pp. 1025–1033.

Lukashenko V.T., post-graduate, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Junior Research Scientist (as a second job), Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (ICAD RAS), Junior Research Scientist at the Institution of the Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS. Research interests include: gas dynamic theory, computational mathematics, mathematical modeling of natural phenomena, motion of bodies in space, liquid and gaseous environments. e-mail: lukashenko-vt@yandex.ru

Maksimov F.A., Dr. Sc. (Eng.), Leading Research Scientist, Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (ICAD RAS), Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University. Research interests include: aerodynamics, numerical simulation, mathematical modeling of natural phenomena. e-mail: f_a_maximov@mail.ru