УДК 514.85 DOI 10.18698/2308-6033-2017-7-1661

Дискретные ориентации космического аппарата

© С.А. Берестова, Н.П. Копытов, Е.А. Митюшов

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, 620002, Россия

Рассмотрена проблема моделирования набора дискретных ориентаций космического аппарата, который может быть использован при тестировании систем управления его положениями в пространстве. В основу модели положен критерий равномерного заполнения ориентационного пространства. Использован авторский универсальный метод случайного равномерного распределения точек на гладких регулярных поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве и его обобщение для гиперповерхностей, заданных параметрическим способом, в многомерных пространствах. Найдена функция плотности совместного распределения ориентационных параметров в виде углов Эйлера при равномерном распределении точек на поверхности в трехмерном пространстве. Установлено, что равномерно распределенные точки на поверхности трехмерной единичной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве определяют соответствующее множество параметров Родрига — Гамильтона, что подтверждает факт двулистного накрытия трехмерной гиперсферой группы специальных ортогональных матриц $SO(3)$. *Осуществлен переход от непрерывного к равномерному дискретному распределению. Реализован алгоритм дискретного заполнения пространства ориентаций на основе использования правильных центросимметричных многогранников в четырехмерном пространстве, вершины которых формируют множества необходимых параметров Родрига — Гамильтона или кватернионов. Даны конструктивное доказательство правильности созданного алгоритма и его иллюстрация путем визуализации положений тела в трехмерном пространстве на примере создания 12 дискретных ориентаций, равномерно заполняющих ориентационное пространство на основе двадцатичетырехячейника в четырехмерном пространстве. Показано, что в общем случае при создании системы дискретных ориентаций космических аппаратов могут быть использованы сведения о координатах вершин пяти правильных четырехмерных многогранников (тессеракта, шестнадцатиячейника, двадцатичетырехячейника, стодвадцатиячейника, шестисотячейника). Описана возможная область практических применений предложенных результатов.*

Ключевые слова: *параметры Родрига — Гамильтона, кватернионы, ориентационное пространство, трехмерная гиперсфера, правильные многогранники, равномерное заполнение*

Введение. В ряде работ [1–6] авторами представлены результаты исследований, посвященных проблеме описания и моделирования равномерных распределений точек на поверхностях в евклидовых пространствах различной размерности, а также рассмотрены возможности применения равномерных распределений точек на поверхностях для практических целей, включая аэрокосмические области. Одним из полученных результатов является представление множества случайных равновероятных вращений в виде множества случайных точек, равномерно распределенных на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном пространстве [6]. Данный результат может быть полезен для моделирования ориентаций космических аппаратов, описываемых кватернионами, либо параметрами Родрига — Гамильтона при тестировании их систем управления [7, 8].

Доказательство того, что множество случайных равновероятных вращений может быть представлено множеством равномерно распределенных случайных точек на поверхности трехмерной гиперсферы, позволяет перейти к равномерному дискретному распределению точек на гиперсфере и, как следствие, равномерному дискретному заполнению пространства вращений — ориентационного пространства. Для этого могут быть использованы правильные пространственные многогранники. Вершины данных многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу, дадут дискретное равномерное распределение точек на гиперсфере и, соответственно, дискретный набор ориентаций, соответствующий равномерному заполнению пространства вращений.

Равномерное распределение точек на гиперповерхностях. В работах [1–4] авторами был предложен метод описания и моделирования случайных равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве, а также его обобщение для пространств различной размерности [5, 6].

Пусть функции $x_1(u_1, u_2, ..., u_m)$, $x_2(u_1, u_2, ..., u_m)$, $\ldots$, $x_n(u_1, u_2, ..., u_m)$, где $(u_1, u_2, ..., u_m) \in D$, определяют гладкую регулярную m-мерную поверхность в n-мерном евклидовом пространстве. Здесь D — m-мерная область определения функций $x_1(u_1, u_2, ..., u_m)$, $x_2(u_1, u_2, ..., u_m)$, $\ldots$, $x_n(u_1, u_2, ..., u_m)$. Плотность распределения параметров $u_1, u_2, ..., u_m$, соответствующая равномерному распределению точек на этой поверхности, определяется функцией

$$f(u_1,u_2,...,u_m) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{g}}{\iiint\limits_D \ldots \int \sqrt{g}\, du_1 du_2 \ldots du_m}, & (u_1,u_2,...,u_m) \in D; \\ 0, & (u_1,u_2,...,u_m) \notin D. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $g = \det(g_{ij})$ — определитель матрицы метрического тензора на поверхности. Матрица метрического тензора на поверхности имеет вид

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}.$$

Здесь $i, j=1, 2, ..., m,$ $g_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_j}$ (где k — индекс суммирования, принимающий значения 1...n).

Генерирование параметров $u_1, u_2, ..., u_m$ по функции (1) с помощью обобщенного метода Неймана дает случайное равномерное распределение точек на заданной гиперповерхности в многомерном евклидовом пространстве.

Случайные равновероятные вращения и случайное равномерное распределение точек на трехмерной гиперсфере. Одним из возможных приложений описанного выше метода для равномерного распределения точек на гиперповерхностях является его использование в задачах, связанных с вращением трехмерного евклидова пространства. Такие вращения описаны группой ортогональных матриц $SO(3)$ [9]. Принимая во внимание, что в работе [10] рассмотрена общая связь групп преобразований и поверхностей в многомерных евклидовых пространствах, предлагаемый подход может оказаться полезным и при решении более широкого спектра задач.

Наиболее распространенный способ описания вращений твердого тела — использование системы углов Эйлера ψ, ϑ, φ. При этом функцию плотности совместного распределения углов Эйлера, используемую для описания и моделирования множества равновероятных вращений твердого тела, можно записать в виде равенства [11, 12]:

$$f(\psi, \vartheta, \varphi)=\frac{\sin\vartheta}{8\pi^2}. \tag{2}$$

Другой способ описания вращения твердого тела — использование параметров Родрига — Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ [13, 14], тождественных компонентам единичного кватерниона вращения $\lambda=\lambda_0+$ $+\lambda_1\vec{i}+\lambda_2\vec{j}+\lambda_3\vec{k}$. Параметры Родрига — Гамильтона удовлетворяют условию нормировки

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1 \tag{3}$$

и связаны с углами Эйлера соотношениями

$$\lambda_0=\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2};\ \lambda_1=\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2};$$

$$\lambda_2 = \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2};\ \lambda_3 = \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}, \qquad (4)$$

где $0 \le \psi \le 2\pi$; $0 \le \vartheta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Используя геометрическую интерпретацию кватерниона как вектора четырехмерного пространства, можно каждому значению кватерниона поставить в соответствие точку с координатами $x_1 = \lambda_0$, $x_2 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$, $x_4 = \lambda_3$ в четырехмерном евклидовом пространстве с системой координат $Ox_1x_2x_3x_4$. С учетом соотношения (3) для координат каждой такой точки будет выполняться условие

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1. \qquad (5)$$

Соотношение (5) тождественно уравнению трехмерной единичной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве. Таким образом, множество возможных значений параметров Родрига — Гамильтона можно рассматривать как множество координат точек трехмерной единичной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве. При этом уравнения (4) связи между параметрами Родрига — Гамильтона и углами Эйлера используются в качестве параметрических уравнений для задания данной единичной гиперсферы:

$$\begin{gathered} x_1 = \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2};\ x_2 = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}; \\ x_3 = \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2};\ x_4 = \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}, \end{gathered} \qquad (6)$$

где $0 \le \psi \le 2\pi$; $0 \le \vartheta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Теперь, для гиперсферы, заданной уравнениями (6), используя формулу (1), найдем функцию плотности совместного распределения параметров (в данном случае углов Эйлера), которая соответствует равномерному распределению точек на ее поверхности. Результаты аналитических преобразований дают функцию (2). Исходя из этого, можно сделать вывод: множество равномерно распределенных точек на поверхности трехмерной единичной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве дает множество значений параметров Родрига — Гамильтона, соответствующих множеству равновероятных вращений твердого тела, что является отражением факта двулистного накрытия трехмерной гиперсферой группы $SO(3)$ [13].

Представление случайных вращений точками на трехмерной единичной гиперсфере в четырехмерном пространстве было рассмотрено в работе П. Робертса и Д. Винча [15], а также упомянуто в работе М.В. Боровкова и Т.И. Савеловой [16]. При этом в статье [15] была использована параметризация трехмерной гиперсферы, отличная от параметризации (6), а вопрос о равномерном распределении точек на гиперсфере рассмотрен не был.

Правильные четырехмерные многогранники и равномерное заполнение ориентационного пространства. Ранее был рассмотрен вопрос моделирования случайных равновероятных вращений с помощью модели непрерывного равномерного распределения точек на трехмерной гиперсфере. Заменив непрерывное распределение точек на трехмерной гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве дискретным распределением конечного числа точек, можно получить набор дискретных значений параметров Родрига — Гамильтона, задающий дискретную систему ориентаций космического аппарата, которая «равномерно» заполняет все ориентационное пространство.

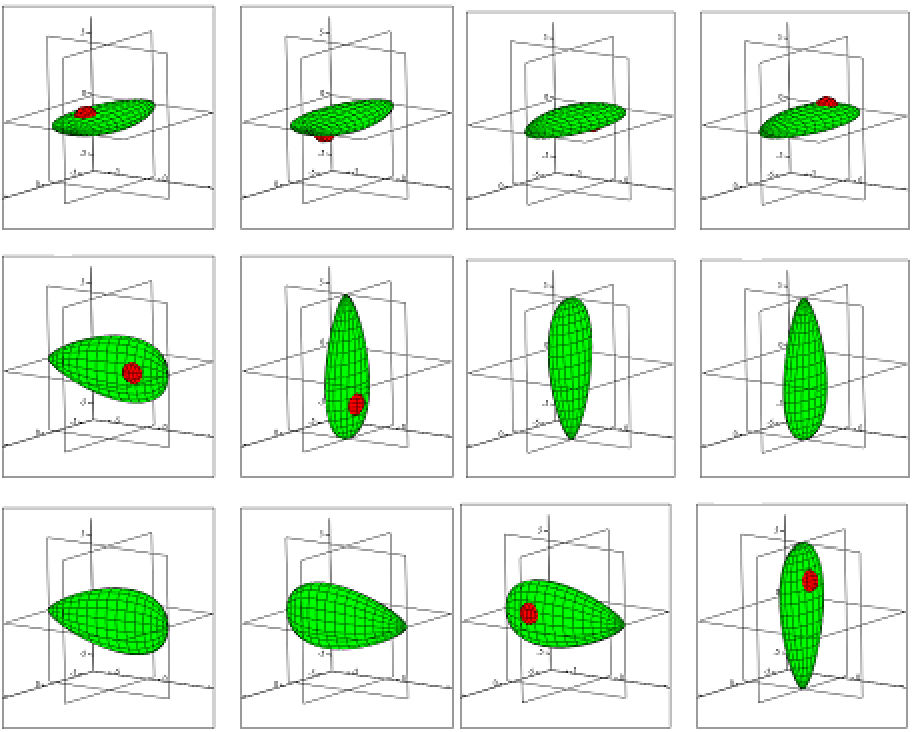
Существование пяти центросимметричных правильных четырехмерных многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу единичного радиуса, служит доказательством существования равномерного распределения конечного числа точек на трехмерной гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве. Такими многогранниками являются (в скобках указано число вершин): восьмиячейник (16), шестнадцатиячейник (8), двадцатичетырехячкйник (24), стодвадцатиячейник (600), шестисотячейник (120).

При этом необходимо принимать во внимание факт двулистного накрытия трехмерной гиперсферой группы $SO(3)$, связанный с тождественностью кватернионов $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$ [13, 14], а также свойства симметрии четырехмерных многогранников.

Таким образом, для моделирования дискретных наборов ориентаций космического аппарата, равномерно заполняющих ориентационное пространство, могут быть использованы вершины пяти правильных четырехмерных многогранников (восьмиячейника, шестнадцатиячейника, двадцатичетырехячейника, стодвадцатиячейника, шестисотячейника) в совокупности с процедурой отбрасывания половины вершин по условию тождественности кватернионов $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$.

Моделирование и визуализация вращений космического аппарата. В качестве примера дискретного заполнения ориентационного пространства выбраны ориентации, соответствующие вершинам двадцатичетырехячейника с координатами $(\pm 1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ \pm 1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ \pm 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 0,\ \pm 1)$, $(\pm 0{,}5,\ \pm 0{,}5,\ \pm 0{,}5,\ \pm 0{,}5)$. После отбрасывания зеркально симметричных вершин находятся соответствующие единичные кватернионы с координатами: 1 — $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$; 2 — $(0,\ 1,\ 0,\ 0)$; 3 — $(0,\ 0,\ 1,\ 0)$; 4 — $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$; 5 — $(0{,}5,\ 0{,}5,\ 0{,}5,\ 0{,}5)$;

6 — $(0{,}5,\ -0{,}5,\ 0{,}5,\ 0{,}5)$; 7 — $(0{,}5,\ 0{,}5,\ -0{,}5,\ 0{,}5)$; 8 — $(0{,}5,\ 0{,}5,\ 0{,}5,\ -0{,}5)$; 9 — $(0{,}5,\ -0{,}5,\ -0{,}5,\ 0{,}5)$; 10 — $(0{,}5,\ 0{,}5,\ -0{,}5,\ -0{,}5)$; 11 — $(0{,}5,\ -0{,}5,\ 0{,}5,\ -0{,}5)$; 12 — $(0{,}5,\ -0{,}5,\ -0{,}5,\ -0{,}5)$. По этим кватернионам могут быть построены 12 положений объекта, равномерно заполняющих все ориентационное пространство (рисунок).



12 ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство

Заключение. Представленные результаты являются продолжением серии исследований авторов, посвященной математическому моделированию равномерных распределений точек на поверхностях и их применению в различных исследованиях. Полученные ранее результаты по моделированию случайных распределений на гиперповерхностях и, в частности, на трехмерной гиперсфере, основанные на описании непрерывного равномерного распределения, в совокупности с использованием центросимметричных правильных пространственных многогранников позволили получить метод для равномерного дискретного заполнения ориентационного пространства.

Результаты, представленные в данной статье, могут быть полезны для ряда теоретических научных направлений, а также в практических приложениях. К примеру, моделирование случайных ориентаций с помощью случайного равномерного распределения точек на поверхности трехмерной гиперсферы может быть использовано для тестирования систем управления положением космических аппаратов. Равномерные дискретные распределения могут быть применимы в предрасчетных алгоритмах управления положением и устойчивостью космических аппаратов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Универсальный алгоритм равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях в трехмерном пространстве. *Фундаментальные исследования*, 2013, № 4, ч. 3, с. 618–622.

[2] Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Математическая модель армирования оболочек из волокнистых композиционных материалов и проблема равномерного распределения точек на поверхностях. *Вестник Пермского государственного технического университета. Механика*, 2010, № 4, с. 55–66.

[3] Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на поверхностях для создания структур композитных оболочек с трансверсально-изотропными свойствами. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4 (5), с. 2263–2264.

[4] Kopytov N.P., Mityushov E.A. Universal algorithm of uniform distribution of points on arbitrary analitic surfaces in three-dimensional space. *Intellectual Archive*, 2012. URL: http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=473 (дата обращения 12.05.2017).

[5] Kopytov N.P., Mityushov E.A. The method for uniform distribution of points on surfaces in multi-dimensional Euclidean space. *Intellectual Archive*, 2012. URL: http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=1170 (дата обращения 12.05.2017).

[6] Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на гиперповерхностях: моделирование случайных равновероятных вращений. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2015, т. 25, № 1, с. 29–35.

[7] Bauer R. Uniform Sampling of SO3. *Proceedings of NASA Space Flight Mechanics Symposium. NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, June 19–21*, *2001*, pp. 347–359.

[8] Shuster M.D. Uniform attitude probability distributions. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2003, vol. 51, no. 4, pp. 451–475.

[9] Гельфанд И.М., Шапиро З.Я. Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения. *Успехи математических наук*, 1952, т. 7, вып. 1 (47), с. 3–117.

[10] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения. В 3 т. Т. 1: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей*. Москва, УРСС, Книжный дом «Либроком», 2013, 336 с.

[11] Miles R.E. On random rotations in R^3. *Biometrika*, 1965, vol. 52 (3–4), pp. 636–639.

[12] Волков С.Д., Клинских Н.А. О распределении постоянных упругости в квазиизотропных поликристаллах. *Доклады академии наук СССР*, 1962, т. 146, № 3, с. 565–568.

[13] Борисов А.В., Мамаев И.С. *Динамика твердого тела*. Москва, Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2001, 384 с.

[14] Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2013, № 39, 23 с.

[15] Roberts P.H., Winch D.E. On random rotations. *Advances in Applied Probability*, 1984, vol. 16, pp. 638–655.

[16] Боровков М.В., Савелова Т.И. *Нормальные распределения на SO(3)*. Москва, МИФИ, 2002, 94 с.

Статья поступила в редакцию 30.03.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Берестова С.А., Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Дискретные ориентации космического аппарата. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 7.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-7-1661

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XLI Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 января 2017 г.

Берестова Светлана Александровна — д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой теоретической механики Уральского федерального университета.
e-mail: s.a.berestova@urfu.ru

Копытов Никита Павлович — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник кафедры теоретической механики Уральского федерального университета.
e-mail: nikitako@mail.ru

Митюшов Евгений Александрович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики Уральского федерального университета.
e-mail: mityushov-e@mail.ru

Spacecraft discrete orientations

© S.A. Berestova, N.P. Kopytov, E.A. Mityushov

Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russia

We consider the problem of modeling the variety of spacecraft discrete orientations which can be used in testing the systems of controlling the spacecraft positions in space. The criterion of equable filling the orientational space forms the basis of this model. We use the proprietary universal methodology for the random distribution of the points on the smooth regular surfaces in the three-dimensional Euclidean space and its generalization for the hypersurfaces defined by the parameter mode in multidimensional spaces. We have identified the function of the orientational parameters joint distribution density in the form of Euler angles with the uniform distribution of the points on the surface in the three-dimensional space. It is established that the uniformly distributed points on the surface of the three-dimensional unit hypersphere in the four-dimensional Euclidean space define the corresponding Rodriguez—Hamilton parameters set, that confirms the fact of two-sheeted covering the special orthogonal $SO(3)$ *matrixes group by the three-dimensional hypersphere. We have carried out the transition from the continuous discrete distribution to the uniform one. The article introduces an algorithm for discrete filling the orientational space based on the application of regular centrosymmetrical polyhedrons in the four-dimensional space. The vertices of these polyhedrons form the sets of needed Rodriguez-Hamilton parameters or quaternions. We provide a constructive proof of the formulated algorithm correctness and its illustrating by means of the body position visualization in the three-dimensional space exemplified by creating 12 discrete orientations uniformly filling the orientational space on the basis of the 24-cell in the four-dimensional space. It is shown that in the general case when creating a spacecraft discrete orientations system we can use the information on the vertices coordinates of five regular four-dimensional polyhedrons (hypercube, 16-cell, 24-cell, 120-cell, 600-cell). The article describes the potential area of practical applications for the results obtained.*

Keywords: *Rodriguez—Hamilton parameters, quaternions, orientational space, three-dimensional hypersphere, regular polyhedrons, equable filling*

REFERENCES

[1] Kopytov N.P., Mityushov E.A. *Fundamentalnyye issledovaniya — Fundamental research*, 2013, no. 4, part 3, pp. 618–622.

[2] Kopytov N.P., Mityushov E.A. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Mekhanika — PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no. 4, pp. 55–66.

[3] Kopytov N.P., Mityushov E.A. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo — Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4 (5), pp. 2263–2264.

[4] Kopytov N.P., Mityushov E.A. Universal algorithm of uniform distribution of points on arbitrary analytic surfaces in three-dimensional space. *Intellectual Archive*, 2012. Available at: http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=473 (accessed May 12, 2017).

[5] Kopytov N.P., Mityushov E.A. The method for uniform distribution of points on surfaces in multi-dimensional Euclidean space. *Intellectual Archive*, 2012. Available at: http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=1170 (accessed May 12, 2017).

[6] Kopytov N.P., Mityushov E.A. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternyye nauki — The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 29–35.

[7] Bauer R. Uniform Sampling of SO3. *Proceedings of NASA Space Flight Mechanics Symposium. NASA Goddard Space Flight Center*, *Greenbelt*, *Maryland*, *June 19–21*, *2001*, pp. 347–359.

[8] Shuster M.D. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2003, vol. 51, no. 4, pp. 451–475.

[9] Gelfand I.M., Shapiro Z.Ya. *Uspekhi matematicheskikh nauk — Russian Mathematical Surveys,* 1952, vol. 7, no. 1 (47), pp. 3–117.

[10] Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya. V 3 tomakh. T. 1: Geometriya poverkhnostey, grupp preobrazovaniy i poley* [Modern Geometry. Methods and Applications. In 3 vols. Vol. 1: Geometry of surfaces, transformation groups and fields]. Moscow, URSS Publ., Librokom Publ., 2013, 336 p.

[11] Miles R.E. *Biometrika*, 1965, vol. 52 (3–4), pp. 636–639.

[12] Volkov S.D., Klinskikh N.A. *Doklady akademii nauk SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1962, vol. 146, no. 3, pp. 565–568.

[13] Borisov A.V., Mamayev I.S. *Dinamika tverdogo tela* [Rigid-body dynamics]. Moscow-Izhevsk, NITs Reguliarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2001, 384 p.

[14] Golubev Yu.F. *Preprint IPM imeni M.V. Keldysha — Keldysh Institute Preprints,* 2013, no. 39, p. 23.

[15] Roberts P.H., Winch D.E. *Advances in Applied Probability*, 1984, vol. 16, pp. 638–655.

[16] Borovkov M.V., Savelova T.I. *Normalnyye raspredeleniya na SO(3)* [Normal distributions on SO(3)]. Moscow, MEPhI Publ., 2002, 94 p.

Berestova S.A., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Ural Federal University. e-mail: s.a.berestova@urfu.ru

Kopytov N.P., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Research Scientist of Theoretical Mechanics Department, Ural Federal University. e-mail: nikitako@mail.ru

Mityushov E.A., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor of Theoretical Mechanics Department, Ural Federal University. e-mail: mityushov-e@mail.ru