

М. Е. Макарова

## ПОИСК АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ МЕТОДА ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЕЙ

*Произведено сравнение результатов расчета, полученных с помощью классического и модифицированного подхода к численному решению методом вихревых элементов, задач об обтекании профилей в случае наличия во внешнем течении изолированных особенностей поля скоростей или неравномерности расчетной схемы на профиле. Полученные результаты показывают, что модифицированный подход точнее определяет решение по сравнению с классическим.*

**E-mail:** masha-mak@mail.ru

**Ключевые слова:** профиль, изолированный точечный вихрь, обтекание, вихревой слой, метод вихревых элементов.

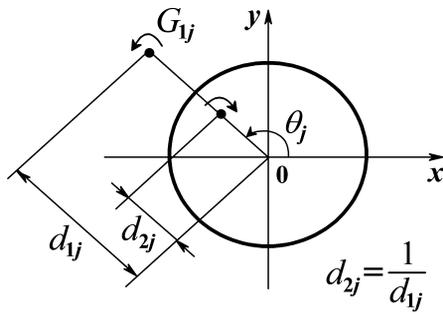
**Постановка задачи.** Рассматривается задача о моделировании плоского стационарного обтекания потоком идеальной несжимаемой среды неподвижного профиля, занимающего область  $C \subset \mathbb{R}^2$ . Отличие от постановки, рассмотренной в работе [1], состоит в том, что во внешнем течении расположены изолированные особенности поля скоростей (типа вихрей), моделирующие вихревой след за профилем. Тогда поле скоростей среды  $\vec{v}$  в области  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) = 0, \vec{r} \neq \vec{\rho}_j, j = \overline{1, m}, \\ \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}|_{\partial C} = v_n|_{\partial C} = 0, \\ \vec{v}(\vec{r}) \rightarrow \vec{v}_\infty, |\vec{r}| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{n}$  — внешняя единичная нормаль к границе профиля  $\partial C$ ,  $\vec{\rho}_j$  — положение  $j$ -й изолированной особенности поля скоростей.

Аналитическое решение системы (1) будем искать, используя методы теории функций комплексного переменного; и в дальнейшем используем его для исследования точности численных схем метода вихревых элементов [1].

**Решение задачи методом конформных отображений.** Пусть обтекаемый профиль — круг  $C'$  единичного радиуса с центром в начале координат,  $\xi$  — точка комплексной плоскости,  $W_\infty$  — комплексная скорость невозмущенного потока. Тогда существует комплексный потенциал течения равный сумме комплексного потенциала, соответствующего безвихревому обтеканию кругового профиля потоком идеальной



**Рис. 1.** Положение вихря при обтекании кругового профиля

несжимаемой среды, и комплексных потенциалов изолированных особенностей (точечных вихрей):

$$F(\xi) = \tilde{F}(\xi) + \sum_{j=1}^m (F_j(\xi - d_{1j} \cdot e^{i\theta_j}) - F_j(\xi - d_{2j} \cdot e^{i\theta_j})).$$

Здесь  $\tilde{F}(\xi) = W_\infty^* \xi + \frac{W_\infty}{\xi} + \frac{G}{2\pi i} \text{Ln}(\xi)$ , звездочка означает комплексное сопряжение,  $G$  — циркуляция поля скоростей  $\vec{v}$  по любому замкнутому контуру, охватывающему круг  $C'$  и не охватывающему вихревые особенности поля скоростей;  $F_j(\xi) = \frac{G_j}{2\pi i} \cdot \text{Ln}(\xi)$ , где  $G_j$  — интенсивность (циркуляция)  $j$ -го вихря,  $\theta_j$  — угол между прямой, соединяющей начало координат с положением  $j$ -го вихря, и положительным направлением оси абсцисс;  $d_{1j}$  — расстояние от начала координат до изолированной особенности (рис.1).

Для случая произвольного профиля  $C$  задача расчета обтекания будет решена, если известно конформное отображение  $\xi = \hat{\zeta}(z)$ , переводящее внешность профиля  $C$  на внешность единичного круга, а также обратное отображение  $z = \zeta(\xi)$  [2, 3]. Используя данные функции, можно найти выражение для комплексного потенциала течения  $f(z)$  в области  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ :

$$F(\xi) = F(\hat{\zeta}(z)) = \tilde{F}(\hat{\zeta}(z)) + \sum_{j=1}^m \left[ F_j(\hat{\zeta}(z) - d_{1j} \cdot e^{i\theta_j}) - F_j(\hat{\zeta}(z) - d_{2j} \cdot e^{i\theta_j}) \right] = f(z).$$

Тогда вектор скорости потока в любой точке течения  $\vec{v} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\}$ , где  $\Phi(x, y) = \text{Re}(f(x + i \cdot y)) = \text{Re}(f(z))$ .

Рассмотрим профили простейших форм — эллипсы и профили Жуковского, для которых достаточно легко построить аналитические решения задачи.

Чтобы определить скорость на профиле, введем параметризацию его границы и будем считать, что  $z = z(p) = \zeta(e^{i \cdot (p-\varphi)})$ ,  $p \in [0, 2\pi)$ ,  $z \in \partial C$ . В случае профиля Жуковского  $\varphi$  вычисляется исходя из геометрических характеристик таким образом, чтобы острая кромка соответствовала значению параметра  $p = 0$ . Для эллипса целесообразно положить  $\varphi = 0$ .

Тогда комплексный потенциал на границе профиля:

$$f(z(p)) = \tilde{F}(\hat{\zeta}[\zeta(e^{i \cdot (p-\varphi)})]) + \sum_{j=1}^m \left[ F_j \left( \hat{\zeta} [\zeta(e^{i \cdot (p-\varphi)})] - d_{1j} \cdot e^{i \cdot \theta_j} \right) - F_j \left( \hat{\zeta} [\zeta(e^{i \cdot (p-\varphi)})] - d_{2j} \cdot e^{i \cdot \theta_j} \right) \right] = W_{\infty}^* e^{i \cdot (p-\varphi)} + \frac{W_{\infty}}{e^{i \cdot (p-\varphi)}} + \frac{G}{2\pi i} \text{Ln}(e^{i \cdot (p-\varphi)}) + \sum_{j=1}^m \frac{G_j}{2\pi i} \left( \text{Ln}(e^{i \cdot (p-\varphi)} - d_{1j} \cdot e^{i \cdot \theta_j}) - \text{Ln}(e^{i \cdot (p-\varphi)} - d_{2j} \cdot e^{i \cdot \theta_j}) \right).$$

Положим  $W_{\infty} = |W_{\infty}| \cdot e^{i\beta}$ , следовательно

$$f'(p) = f'(z)|_{\partial C} \cdot z'(p) = R|\vec{v}_{\infty}| \sin(\beta - (p - \varphi)) + \frac{G}{2\pi} + \sum_{j=1}^m \frac{G_j}{2\pi} \frac{(d_{1j} - d_{2j})}{2 \cos(\theta_j - (p - \varphi)) - (d_{1j} + d_{2j})},$$

где  $R = 2 \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{d\zeta}{d\xi}$ .

Чтобы определить величину скорости потока на границе профиля, полученное выражение необходимо разделить на производную  $\frac{dz}{dp}$ ,  $z \in \partial C$ . Можно убедиться, что при моделировании обтекания эллипса  $\frac{dz}{dp} \neq 0$  при  $z \in \partial C$ . В случае профиля Жуковского на острой кромке производная обращается в ноль. С помощью постулата Чаплыгина – Жуковского – Кутты удастся найти значение циркуляции, которое обеспечит ограниченность скорости на острой кромке:

$$G = -2\pi|\vec{v}_{\infty}| \sin(\beta + \varphi)(\sqrt{h^2 + a^2} + d) - \sum_{j=1}^m \frac{G_j(d_{1j} - d_{2j})}{2 \cos(\theta_j + \varphi) - (d_{1j} + d_{2j})}, \quad (2)$$

где  $a, h, d$  – константы, определяющие геометрическую форму профиля.

**Численное решение задачи.** При численном решении задачи используется метод вихревых элементов (МВЭ) [4, 5]. Скорость в точке  $(x; y)$  области течения определяется по интенсивности вихревого слоя

$\gamma(p_0) = \gamma(x_0, y_0)$ , моделирующего профиль, и интенсивности изолированных точечных вихрей  $\vec{G}_j = (0, 0, G_j)^T$ .

Пусть поле скоростей  $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)^T$ ,  $\vec{v}_\infty = (\cos \beta, \sin \beta, 0)^T$  — скорость невозмущенного потока, точка вычисления скорости задается радиус-вектором  $\vec{r} = (x, y, 0)^T$ , а точка на границе профиля, по которой ведется интегрирование — радиус-вектором  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)^T$ , тогда  $\vec{\gamma}(\vec{r}_0) = (0, 0, \gamma(\vec{r}_0))^T$  и

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_\infty + \sum_{j=1}^m \vec{W}(\vec{r}, \vec{\rho}_j, \vec{G}_j) + \oint_{\partial C} \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0}, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus C,$$

где  $\vec{W}(\vec{r}, \vec{\rho}_j, \vec{G}_j)$  — скорость, индуцируемая в точке  $\vec{r}$   $j$ -й особенностью поля скоростей.

Предельное значение скорости потока  $\vec{v}_-(\vec{r})$  на границе  $\partial C$  со стороны профиля [5] находится по формуле

$$\vec{v}_-(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) - \left( \frac{\vec{\gamma}(\vec{r})}{2} \times \vec{n}(\vec{r}) \right), \quad r \in \partial C, \quad (3)$$

где  $\vec{n}(\vec{r})$  — единичная внешняя нормаль к профилю.

Для нахождения неизвестной интенсивности вихревого слоя  $\gamma(\vec{r})$  используется условие равенства нулю скорости  $\vec{v}_-(\vec{r})$  на  $\partial C$ , которое обеспечивается обнулением либо нормальной, либо касательной компоненты  $\vec{v}_-(\vec{r})$  [5, 6].

**Классический подход** (НМВЭ — метод вихревых элементов с нормальными компонентами скоростей) к решению уравнения (3) предполагает его скалярное умножение на орт нормали к профилю и приводит к сингулярному интегральному уравнению [4, 5]

$$\oint_{\partial C} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0} = -\vec{n}(\vec{r}) \cdot \left( \vec{v}_\infty + \sum_{j=1}^m \vec{W}(\vec{r}, \vec{\rho}_j, \vec{G}_j) \right), \quad r \in \partial C. \quad (4)$$

**Модифицированный подход** (КМВЭ — метод вихревых элементов с касательными компонентами скоростей) состоит в обеспечении равенства нулю касательной компоненты  $\vec{v}_-(\vec{r})$  на профиле [5, 6]. Направление касательной к профилю  $\vec{\tau}(\vec{r})$  выберем так, чтобы  $\vec{n}(\vec{r}) \times \vec{\tau}(\vec{r}) = \vec{k}$  и  $|\vec{\tau}(\vec{r})| = 1$ , где  $\vec{k}$  — орт оси  $Oz$ . После скалярного умножения интегрального уравнения (4) на  $\vec{\tau}(\vec{r})$  получим:

$$\oint_{\partial C} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}(\vec{r})}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \cdot \gamma(\vec{r}_0) dl_{r_0} - \frac{\gamma(\vec{r})}{2} = -\vec{\tau}(\vec{r}) \cdot \left( \vec{v}_\infty + \sum_{j=1}^m \vec{W}(\vec{r}, \vec{\rho}_j, \vec{G}_j) \right), \quad r \in \partial C. \quad (5)$$

Численное решение уравнений (4), (5) осуществляется так же, как и в случае безвихревого внешнего обтекания профилей [1]. Свойства соответствующих уравнений в случае безвихревого внешнего течения и в рассматриваемом случае тоже совпадают, поскольку наличие изолированных особенностей поля скоростей влияет лишь на правую часть интегральных уравнений, а ядра остаются такими же.

Единственное решение выделяется заданием значения интеграла  $\oint_{\partial C} \gamma(\vec{r}) dl_r = \text{const}$ , определяющего циркуляцию поля скоростей вдоль

любого контура, охватывающего обтекаемый профиль [4]. Если граница профиля  $\partial C$  — гладкая кривая (в частности, эллипс), то единственное решение можно выделить равенством  $\oint_{\partial C} \gamma(\vec{r}) dl_r = - \sum_{j=1}^m G_j$ .

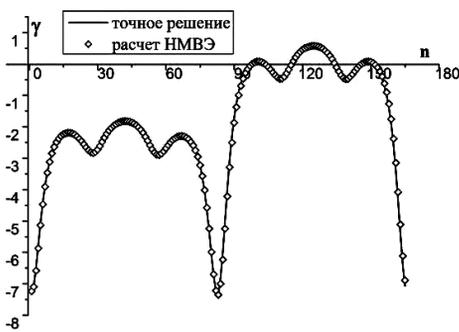
Данное условие с физической точки зрения соответствует отсутствию циркуляции вдоль кривой, охватывающей все изолированные особенности поля скоростей и профиль. Если профиль имеет одну острую кромку (профиль Жуковского), то  $\oint_{\partial C} \gamma(\vec{r}) dl_r = G - \sum_{j=1}^m G_j$ , где  $G$  определяется по формуле (2).

**Результаты расчетов.** Ниже на графиках приведены вычисленные методами НМВЭ и КМВЭ величины интенсивностей вихревых слоев на профиле; в таблицах — погрешности численных решений

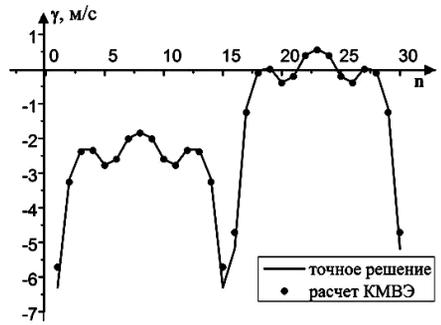
$\|\Delta\|_{l_1} = \sum_{i=1}^N |\gamma_i - \gamma_i^0| l_i$ , где  $N$  — число элементов расчетной схемы (панелей на контуре профиля),  $\gamma_i$  — найденное в расчетах среднее значение интенсивности вихревого слоя на  $i$ -й панели,  $\gamma_i^0$  — среднее значение точной величины интенсивности на рассматриваемом элементе,  $l_i$  — длина панели,  $\text{Cond}A$  — число обусловленности соответствующей матрицы.

На рис. 2 показано решение, найденное при моделировании обтекания эллиптического профиля с полуосями  $a_1 = 1,0$ ,  $b_1 = 0,2$  под углом атаки  $\beta = 0$  при наличии во внешнем течении 6 особенностей поля скоростей единичной интенсивности, расположенных равномерно вдоль профиля на расстоянии  $d_3 = 0,3$  от его границы. Число элементов расчетной схемы увеличивалось до тех пор, пока найденное численное решение не удовлетворило неравенству  $\|\Delta\|_{l_1} < 0,2$ . В методе НМВЭ условие выполнилось при числе панелей, равном 165, а в КМВЭ — при  $N = 30$ .

На рис. 3 показаны результаты расчета обтекания кругового профиля единичного радиуса под углом атаки  $\beta = 0$  в случае, когда изоли-

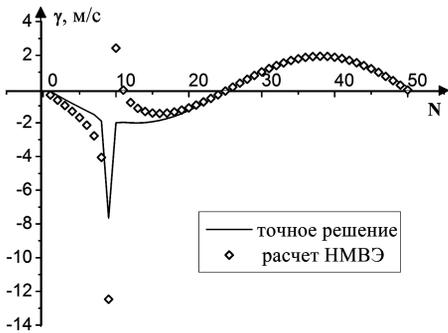


а

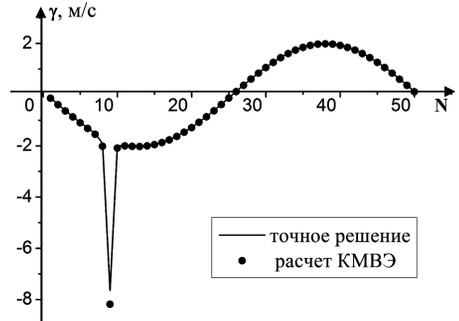


б

Рис. 2. Интенсивность вихревого слоя при обтекании эллиптического ( $a_1/b_1 = 5$ ) профиля, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б) в сравнении с точным решением



а



б

Рис. 3. Интенсивность вихревого слоя при обтекании кругового профиля, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б) в сравнении с точным решением.

рованный вихрь единичной интенсивности расположен на расстоянии  $d_3 = 0,01$  от границы профиля,  $\theta_1 = \pi/3$  и  $N = 50$ .

В таблице для этого же случая приведены значения числа обусловленности матриц и погрешности численных решений при различной дискретизации профиля. Значения  $\text{Cond } A$  в рассматриваемых методах совпадают; норма погрешности  $\|\Delta\|_{l_1}$  в обоих случаях уменьшается, но в КМВЭ она существенно меньше, чем в НМВЭ.

Таблица

Расчет обтекания кругового профиля при наличии во внешнем течении изолированного точечного вихря

N	50		200		500	
	НМВЭ	КМВЭ	НМВЭ	КМВЭ	НМВЭ	КМВЭ
CondA	14,1	14,1	31,8	31,8	79,6	79,6
$\ \Delta\ _{l_1}$	2,98	0,17	0,67	0,12	0,34	0,01

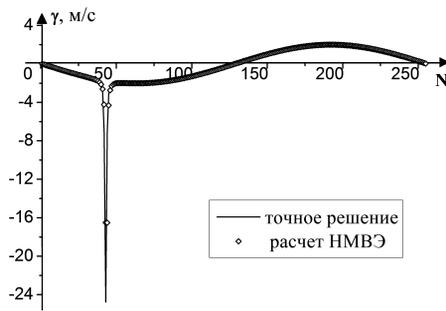


Рис. 4. Расчет обтекания кругового профиля при наличии во внешнем течении изолированного точечного вихря ( $N = 255$ )

При малых значениях  $N$  погрешность численного решения, полученная методом НМВЭ велика, однако, при увеличении числа панелей начиная с некоторого  $N$ , НМВЭ качественно верно описывает решение на границе профиля, находящейся около изолированного точечного вихря (рис. 4).

Ниже представлены результаты моделирования обтекания несимметричного крылового профиля относительной толщины 10 % с хордой  $l = 7$ , установленного под углом атаки  $\beta = \pi/18$ , при расположении особенности единичной интенсивности во внешнем течении на расстоянии  $d_3 = 0,05$  от границы  $\partial C$ ,  $\theta_1 = 2\pi/3$ . При использовании метода НМВЭ ошибка численного решения при приближении к острой кромке растет катастрофически (рис. 5), также наблюдается расхождение с точным решением вблизи изолированной вихревой особенности. КМВЭ позволяет получить существенно более точное решение как вблизи острой кромки, так и в окрестности вихревой особенности.

Рассмотрим обтекание профиля с тремя угловыми точками под углом атаки  $\beta = 0$  (рис. 6),  $\alpha = \pi/6$ ,  $\psi = 3\pi/4$ . Элементы расчетной

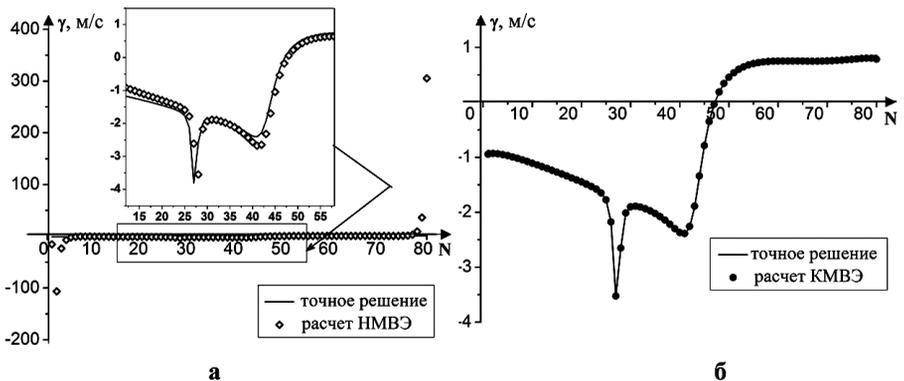
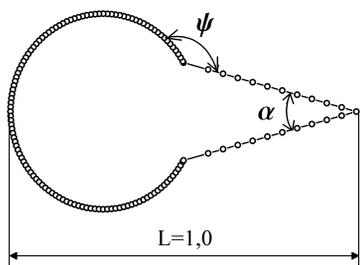


Рис. 5. Интенсивность вихревого слоя при обтекании несимметричного профиля Жуковского, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б) в сравнении с точным решением



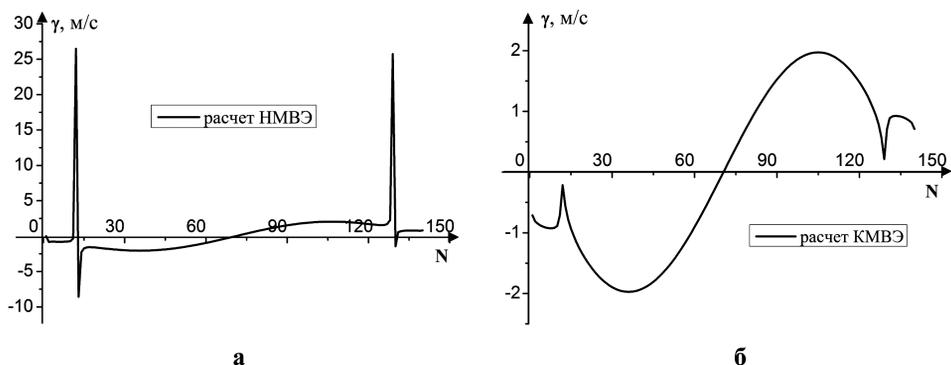
**Рис. 6. Профиль с “внутренними” угловыми точками**

схемы ( $N = 140$ ) разместим на границе профиля неравномерно как показано на рис. 6.

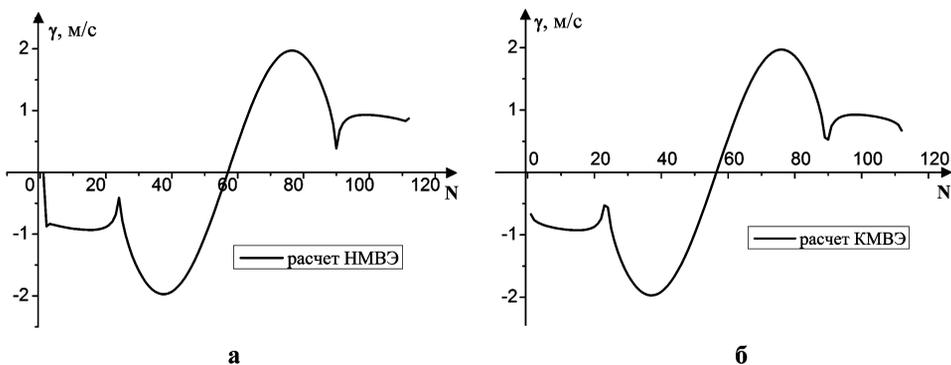
В угловых точках, где расчетная схема в большей степени неравномерна, решение, полученное методом КМВЭ, качественно лучше решения полученного НМВЭ, поскольку известно [5], что в этих точках решение должно стремиться к нулю.

Выполним тот же самый расчет на равномерной схеме. При равномерном разбиении обтекаемого профиля результаты, полученные обоими методами, практически совпадают (рис. 8).

Таким образом, метод НМВЭ позволяет найти искомое решение лишь на равномерных схемах, а КМВЭ приводит к качественно правильному решению как на равномерных, так и на неравномерных схемах.



**Рис. 7. Интенсивность вихревого слоя при обтекании профиля с угловыми точками, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б) на неравномерной схеме**



**Рис. 8. Интенсивность вихревого слоя при обтекании профиля с угловыми точками, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б) на равномерной схеме**

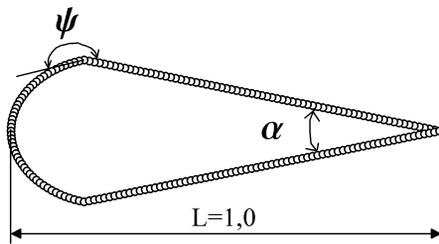


Рис. 9. Профиль с “внешними” угловыми точками

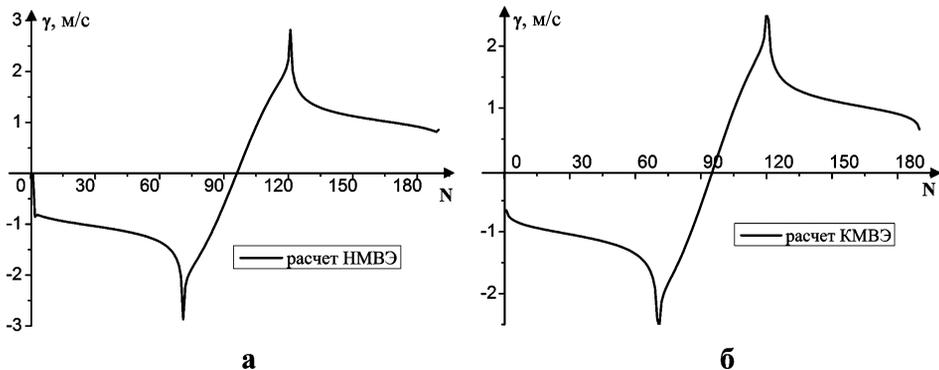


Рис. 10. Интенсивность вихревого слоя при обтекании профиля с угловыми точками, рассчитанная НМВЭ (а) и КМВЭ (б)

Рассмотрим обтекание профиля с тремя угловыми точками при  $\psi = 7\pi/6$ ,  $\alpha = \pi/6$  на равномерной схеме (рис. 9).

Результаты расчетов, полученные обоими методами вихревых элементов показаны на рис. 10.

Согласно [5] в угловых точках с внешним углом  $\psi > \pi$  решение имеет особенность вида  $\frac{1}{\hat{\rho}^{1-\pi/\psi}}$ , где  $\hat{\rho}$  — расстояние вдоль контура до угловой точки. Анализ найденных численных решений показывает, что результаты расчетов методами НМВЭ и КМВЭ с высокой точностью удовлетворяют указанной асимптотике. Таким образом КМВЭ позволяет получать качественно верное решение и при расчете обтекания профилей с внешними угловыми точками, когда точное решение задачи имеет особенность.

**Заключение.** Результаты тестовых расчетов показывают, что в случае, когда изолированные особенности поля скоростей (типа вихря) расположены вблизи обтекаемого профиля, метод КМВЭ позволяет достигать большей точности по сравнению с НМВЭ. При этом метод КМВЭ позволяет получать качественно правильное решение даже при сравнительно грубой и существенно неравномерной дискретизации профиля.

Отмеченные преимущества расчетной схемы метода вихревых элементов с касательными компонентами скорости на профиле позволяют модифицировать существующие численные алгоритмы решения задач по расчету нестационарного обтекания профилей методом вихревых элементов с целью повышения их точности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макарова М. Е. Расчет стационарного безотрывного обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. Спец. выпуск “Прикладная математика”, 2011. – С. 124–133.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
3. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2004. – 336 с.
4. Андронов П. Р., Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. – М.: Изд-во МГУ, 2006. – 184 с.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: Янус, 1995. – 520 с.
6. Kempka S. N., Glass M. W., Peery J. S., Strickland J. H. Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations // SANDIA REPORT SAND96-0583 UC-700. March. 1996.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012