

В. В. Лукин, К. Л. Шаповалов

**ПРИМЕНЕНИЕ RKDG МЕТОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

*Рассмотрен RKDG метод решения двумерных уравнений идеальной магнитной гидродинамики на неструктурированных сетках. Приведены алгоритмы монотонизации решения и бездивергентной реконструкции магнитного поля, позволяющие получать физически адекватные результаты расчетов с высоким порядком точности. Обсуждены результаты тестовых расчетов, подтверждающие порядок сходимости метода и иллюстрирующие качество получаемого решения.*

**E-mail: vvlukin@gmail.com shapovalovkl@yandex.ru**

**Ключевые слова:** магнитная гидродинамика, разрывный метод Галеркина, бездивергентная реконструкция, лимитер, метод второго порядка, неструктурированная сетка.

**Введение.** Уравнения идеальной магнитной гидродинамики (МГД) описывают множество явлений, представляющих как чисто научный, так и прикладной технический интерес. В частности, в рамках моделей, основанных на системе уравнений МГД, рассматриваются процессы электромагнитного ускорения вещества в различных условиях (плазменные ускорители, астрофизические джеты). Особый интерес представляет моделирование развития неустойчивости течения замагниченной плазмы в окрестности поверхности разрыва (ударной волны), для адекватного описания которого целесообразно использовать численные методы второго и более высоких порядков точности.

Одним из наиболее современных и популярных при решении задач газовой динамики и МГД является RKDG метод (Runge — Kutta Discontinuous Galerkin). Данный метод обеспечивает высокий уровень разрешения разрывов и позволяет повышать порядок точности метода без увеличения шаблона, что особенно важно при использовании неструктурированных сеток. В то же время методы высокого порядка являются немонотонными и могут приводить к накоплению численного магнитного заряда, что создает существенные сложности при моделировании замагниченных течений.

В данной работе рассмотрена модификация разрывного метода Галеркина (RKDG) второго порядка для решения системы уравнений двумерной магнитной гидродинамики на треугольных сетках. Построенный метод включает процедуры монотонизации вычисляемого решения, а также позволяет получать решение, удовлетворяющее условию бездивергентности магнитного поля. Разработана параллельная

реализация численного метода. Представлены результаты тестовых расчетов.

**Система нестационарных уравнений идеальной магнитной гидродинамики.** Система нестационарных уравнений идеальной магнитной гидродинамики в безразмерных консервативных переменных [1] включает в себя законы сохранения массы, импульса, энергии, а также уравнение Фарадея для магнитной индукции. В двумерном случае она имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x_2} = 0, \quad (1)$$

где  $(x_1, x_2)$  — пространственная точка,  $t$  — время,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, e, B_1, B_2, B_3)^T, \\ \vec{F}_1 &= \left( \rho v_1, \rho v_1^2 + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{B_1^2}{4\pi}, \rho v_1 v_2 - \frac{B_1 B_2}{4\pi}, \rho v_1 v_3 - \frac{B_1 B_3}{4\pi}, \right. \\ &\quad \left. \left( e + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) v_1 - B_1 \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{4\pi}, 0, v_1 B_2 - v_2 B_1, v_1 B_3 - v_3 B_1 \right)^T, \\ \vec{F}_2 &= \left( \rho v_2, \rho v_2 v_1 - \frac{B_2 B_1}{4\pi}, \rho v_2^2 + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{B_2^2}{4\pi}, \rho v_2 v_3 - \frac{B_2 B_3}{4\pi}, \right. \\ &\quad \left. \left( e + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) v_2 - B_2 \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{4\pi}, v_2 B_1 - v_1 B_2, 0, v_2 B_3 - v_3 B_2 \right)^T. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho$  — плотность газа,  $p$  — давление,  $e$  — полная энергия единицы объема,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$  — вектор скорости,  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^T$  — вектор магнитной индукции. Из закона Фарадея следует условие бездивергентности магнитного поля  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Будем считать, что плазма является сильно ионизированным, не поляризованным совершенным газом с уравнением состояния  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия. При этом  $e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}$ .

Система (1) с уравнением состояния газа является замкнутой. Можно показать, что эта система является гиперболической [1] и, следовательно, существует разложение

$$\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \vec{u}} = A_i = L_i \Lambda_i R_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где  $L_i$  и  $R_i$  — ортогональные матрицы, составленные из левых и правых собственных векторов, а  $\Lambda_i$  — действительная диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы  $A_i$ .

**Численный метод.** Для решения системы (1), или в индексной форме записи (здесь и далее принято правило суммирования по по-

вторяющимся индексам)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial F_{j,i}}{\partial x_j} = 0, \quad (3)$$

на треугольной сетке используем разрывный метод Галеркина [2]. Применим стандартную схему методов галеркинских типа — умножим правую и левую части (1) на произвольную скалярную функцию  $\omega(\mathbf{x})$ , проинтегрируем по объему  $V_\Delta$ , применим правило интегрирования по частям и получим:

$$\int_{V_\Delta} \frac{\partial u_i}{\partial t} \omega dV + \int_{S_\Delta} F_{j,i} n_j \omega dS - \int_{V_\Delta} F_{j,i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dV = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_\Delta = \partial V_\Delta$ .

Рассмотрим двумерную область  $D$  и соответствующую ей трехмерную область  $\mathcal{D} = D \times \mathbb{R}$ . Введем в области  $D$  сетку  $\Omega_h$ , состоящую из системы  $N_T$  треугольников  $\{K^i\}_{i=1}^{N_T}$ . В качестве объема  $V_\Delta$  рассмотрим единичную треугольную призму с сечением  $K^l$ . Тогда второй интеграл в (4) можно преобразовать к виду [3]

$$\begin{aligned} \int_{S_\Delta} n_j F_{j,i}(\dots, u_i, \dots) \omega dS &= \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{S_k^l} T_{k,ij}^{-1}(\mathbf{n}_k) F_j^*(\dots, T_{k,ij}(\mathbf{n}_k) u_j, \dots) \omega dS, \end{aligned}$$

где  $S_k^l$  — поверхность  $k$ -ой боковой грани призмы  $V_\Delta$ ,  $T_k$  — матрица, осуществляющая поворот векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  на угол между нормалью  $\mathbf{n}_k$  и положительным направлением оси  $x_1$ , а  $\vec{F}^*$  — вектор, описывающий поток консервативных переменных через поверхность  $S_k$ .

Будем искать решение в виде

$$\vec{u} = \sum_{\alpha=1}^{N_T} \sum_{\beta=1}^{N_b} \vec{y}^{\alpha,\beta}(t) \varphi_{\alpha,\beta}(x_1, x_2),$$

где  $N_b$  — зависящее от порядка аппроксимации число базисных функций, определенных в ячейке  $K^\alpha$ ;  $\{\varphi_{\alpha,\beta}(x_1, x_2)\}_{\beta=1}^{N_b}$  — ортонормированная система базисных функций (полиномов степени ниже  $m$ ), определенных в  $\alpha$ -й ячейке;  $\vec{y}^{\alpha,\beta}(t)$  — вектор коэффициентов при базисных функциях. В качестве пробных функций  $\omega$  выберем те же базисные функции  $\varphi_{\alpha,\beta}$ . Тогда приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений разрывного метода Галеркина порядка  $m$

$$\frac{dy_i^{\alpha,\beta}}{dt} + \sum_{\psi=1}^3 \int_{S_\psi^\alpha} F_i^*(\bar{y}^\alpha, \bar{y}^{\eta(\alpha,\psi)}) \varphi_{\alpha,\beta} dS - \int_{V^\alpha} F_{j,i} \frac{\partial \varphi_{\alpha,\beta}}{\partial x_j} dV = 0,$$

$$\alpha = \overline{1, N_T}, \quad \beta = \overline{1, N_b}, \quad i = \overline{1, 8}, \quad (5)$$

где  $\psi$  — номер ребра  $\alpha$ -й ячейки,  $\eta(\alpha, \psi)$  — номер соседней с ней ячейки,  $\vec{F}^*(\bar{y}^\alpha, \bar{y}^{\eta(\alpha,\psi)})$  — численный поток, зависящий от значений решения в ячейках, примыкающих к ребру  $\psi$ , и определяемый из решения соответствующей задачи Римана о распаде разрыва [3].

Система (5) дополняется начальным условием вида

$$\bar{y}^{\alpha,\beta}(0) = \int_{V^\alpha} \vec{u}_0 \varphi_{\alpha,\beta} dV, \quad (6)$$

где  $\vec{u}_0(x_1, x_2)$  — начальное распределение консервативных переменных.

Интегралы по поверхностям  $S_\psi^\alpha$  и по объему  $V^\alpha$  в рассматриваемом двумерном случае сводятся к интегралам по ребрам  $P_\psi^\alpha$  и треугольнику  $K^\alpha$  соответственно.

Для приближенного решения задачи Римана для системы уравнений магнитной гидродинамики используется ряд методов с выделением разрывов, такие как HLL, HLLC, HLLD [1, 4]. Метод HLLD позволяет получить наилучшее разрешение разрывов, но во многих случаях приводит к возникновению численной немонотонности в решении. В этих случаях используется более диссипативный численный поток HLL. При расчете интегралы заменяются квадратурными формулами, точность которых согласована с порядком метода  $m$ . Решение задачи Коши (5)–(6) производится численным интегрированием явным методом Рунге — Кутты, шаг по времени  $\tau$  определяется динамически на основании условия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви:  $\max_i |\lambda_i| \frac{\tau}{h_{\min}} \leq 1$ , где  $h_{\min}$  — длина наименьшего ребра ячейки в сетке,  $\lambda_i$  — собственные числа системы (1) на предыдущем шаге по времени. Разрывный метод Галеркина 1 порядка совпадает с соответствующими методами типа Годунова [1].

Для аппроксимации граничных условий используется метод фиктивной ячейки.

*Монотонизация решения.* Решение уравнений МГД разрывным методом Галеркина второго порядка точности требует использования функций-ограничителей наклона решения в ячейке — лимитеров [2, 3] — как для поддержания монотонности решения, так и для предотвращения появления на очередном временном слое отрицательных значений плотности и давления.

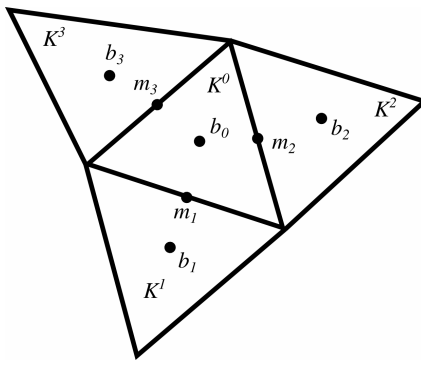


Рис. 1. Построение лимитера

В данной работе использован “TVB minmod” лимитер для кусочно-линейных функций [1, 2], значение которого зависит от исходного наклона решения в данной ячейке и от средних значений решения в соседних ячейках. Процедура лимитирования магнитного поля может привести к возникновению численного магнитного заряда и поэтому применяется только при вычислении потоков. Лимитирование проводится для локальных характеристических переменных, получаемых из консервативных умножением на матрицу  $L = R^{-1}$  левых собственных векторов, вычисляемую в каждой ячейке вместе с разложением (2).

Рассмотрим алгоритм применения лимитера к вектору консервативных переменных, заданному линейной функцией  $\vec{u}_{K^0}(x_1, x_2)$  на треугольнике  $K^0$  с соседями  $K^1, K^2, K^3$  (рис. 1).

Для каждой пары соседних треугольников  $K^i, K^j$  из системы уравнений (суммирование по  $i$  и  $j$  здесь и ниже нет)

$$\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0 = \alpha_{ij,1}(\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0) + \alpha_{ij,2}(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_0),$$

где  $\mathbf{b}_i$  — барицентр  $i$ -го треугольника,  $\mathbf{m}_i$  — центр  $i$ -го ребра, общего между  $K^0$  и  $K^i$ , определим скалярные коэффициенты  $\alpha_{ij,1}$  и  $\alpha_{ij,2}$ , характеризующие геометрические свойства данной группы треугольников  $K^0, K^i, K^j$ .

На основании полученных коэффициентов определим средние значения скачка функции  $\vec{u}_{K^0}$  в  $\mathbf{m}_i$

$$\vec{u}_{K^0}^*(\mathbf{m}_i) = \alpha_{ij,1}(\vec{u}_{K^i}(\mathbf{b}_i) - \vec{u}_{K^0}(\mathbf{b}_0)) + \alpha_{ij,2}(\vec{u}_{K^j}(\mathbf{b}_j) - \vec{u}_{K^0}(\mathbf{b}_0)).$$

Исходя из полученных значений, проведем ограничение скачков  $\vec{u}_{K^0}$  в центрах ребер:

$$\vec{\Delta}_i = R\bar{m}(L(\vec{u}_{K^0}(\mathbf{m}_i) - \vec{u}_{K^0}(\mathbf{b}_0)), \nu L\vec{u}_{K^0}^*(\mathbf{m}_i)), \quad i = \overline{1, 3},$$

где  $\nu > 1$  — константа, определяющая степень сглаживания решения,  $L$  и  $R$  — матрицы левых и правых собственных векторов из разложения (2),  $\bar{m}$  — “TVB minmod” функция, применяемая покомпонентно для каждой характеристической переменной;

$$\bar{m}_j(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} a_j, & \text{если } |a_j| \leq M_j(\Delta x)^2, \\ 0.5(\text{sign } a_j + \text{sign } b_j) \min(|a_j|, |b_j|), & \text{иначе,} \end{cases} \quad j = \overline{1, 8},$$

где  $M_j$  — константа, зависящая от задачи,  $\Delta x$  — характерный размер сетки,  $\text{sign } a$  — функция знака. После определения скачков  $\Delta_i$ , задающих новый наклон решения в  $K^0$ , их значения используем для обновления коэффициентов при базисных функциях.

*Условие отсутствия магнитного заряда.* Выполнение условия бездивергентности магнитного поля  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  является одной из основных проблем при создании численного метода решения уравнений магнитной гидродинамики. Несмотря на то, что дивергенция начального распределения магнитного поля равна нулю, при использовании консервативной формы записи системы уравнений МГД (1) в ходе расчетов может накапливаться численный магнитный заряд. Такая ситуация приводит к нефизичным результатам или даже преждевременному прерыванию расчета ввиду появления отрицательных значений плотности или давлений.

В данной работе для поддержания бездивергентности магнитного поля реализован метод, основанный на использовании  $z$ -компоненты электрического поля и  $\epsilon$  градиента в узлах сетки (рис. 2) для определения бездивергентного потока магнитного поля. Для случая первого порядка (без использования градиентов) процедура описана в [5].

После определения известными методами (HLL, HLLC, HLLD) значений численного потока  $\vec{F}^*[ij, k]$  в точках интегрирования (для метода второго порядка две точки —  $k = 1, 2$ ) на ребре, содержащем  $i$  и  $j$  узлы, в каждом из узлов сетки вычислим средние значения  $z$ -компоненты электрического поля  $E_z$  и  $\nabla E_z = \left( \frac{\partial E_z}{\partial x_1}, \frac{\partial E_z}{\partial x_2} \right)$ :

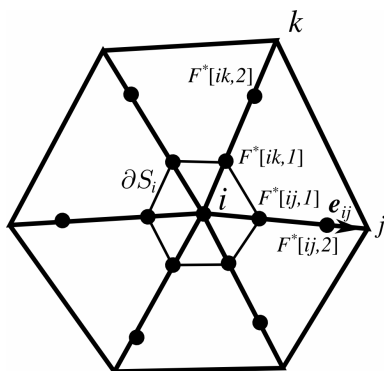


Рис. 2. Схема перераспределения магнитных потоков

$$E_{zi} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{(F_6^*[ik, 1], F_7^*[ik, 1]) \cdot \mathbf{e}_{ik}}{\sigma_i} + \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{(F_6^*[ik, 2], F_7^*[ik, 2]) \cdot \mathbf{e}_{ik}}{\sigma_i} \right).$$

Здесь и далее  $\mathbf{e}_{ik}$  — единичный вектор, касательный к ребру  $ik$  и направленный из  $i$ -й вершины в  $k$ -ю,  $h_{ik}$  — длина ребра  $ik$ ,  $\sigma_i$  — число ребер, выходящих из вершины  $i$ . Восстановление градиента  $\nabla E_{zi}$  производится по формуле  $\nabla E_z \approx \frac{1}{S} \int_S \nabla E_z dS = \frac{1}{S} \int_{\partial S} E_z \mathbf{n} dl$  (рис. 2). Этот интеграл берется численно с использованием вычисленных значений потоков  $\vec{F}^*[ij, k]$ .

Для монотонизации решения необходимо провести лимитирование градиента электрического поля аналогично процедуре, рассмотренной выше. Для этого на основании значений  $E_{zi}$  в узлах нужно рассчитать средний градиент  $\nabla E_{zi}^{Lim}$ , и результирующее значение градиента, используемое далее в расчетах, определить путем применения  $\min\text{mod}$  функции  $\nabla E_{zi} = \bar{m}(\nabla E_{zi}, \nu \nabla E_{zi}^{Lim})$ .

Используя значения электрического поля и его градиента, можем построить бездивергентные потоки  $\vec{F}^*[ij, 1]$  и  $\vec{F}^*[ij, 2]$ , отличающиеся от исходного только компонентами потока магнитного поля:

$$\vec{F}_l^*[ij, k] = \vec{F}_l^*[ij, k], \quad k = 1, 2, \quad l = \overline{1, 5, 8},$$

$$\begin{aligned} & (\vec{F}_6^*[ij, 1], \vec{F}_7^*[ij, 1])^T = \\ & = \frac{1}{6} \left( (3 + \sqrt{3}) E_{zi} + (3 - \sqrt{3}) E_{zj} + \frac{1}{2} (\nabla E_{zi} - \nabla E_{zj}) \cdot \mathbf{e}_{ij} h_{ij} \right) h_{ij} \mathbf{e}_{ij}, \\ & (\vec{F}_6^*[ij, 2], \vec{F}_7^*[ij, 2])^T = \\ & = \frac{1}{6} \left( (3 - \sqrt{3}) E_{zi} + (3 + \sqrt{3}) E_{zj} + \frac{1}{2} (\nabla E_{zi} - \nabla E_{zj}) \cdot \mathbf{e}_{ij} h_{ij} \right) h_{ij} \mathbf{e}_{ij}, \end{aligned}$$

Такое перераспределение потоков сохраняет консервативность схемы и гарантирует бездивергентность решения. Это подтверждается численными экспериментами и в случае метода первого порядка показано в [5]. При проведении численных экспериментов также выяснилось, что такой подход приводит к сглаживанию разрывов (вносит в схему численную диссипацию): на 4-5 ячеек для разрывного метода Галеркина первого порядка, и 2-3 ячейки — для второго.

**Тестовые расчеты.** Для оценки свойств построенного метода рассмотрено несколько характерных тестовых задач двумерной идеальной МГД, описанных в литературе [6, 8]. Рассмотрены тесты как с непрерывным, так и с разрывным решениями. Результаты приведены

для метода второго порядка, результаты для метода первого порядка указаны особо.

*Распространение циркулярно поляризованной альфвеновской волны.* Данная задача иллюстрирует процесс распространения альфвеновской волны [6] и имеет гладкое решение, которое при  $t = 5$  совпадает с начальным распределением. Начальные условия задачи периодические по пространству. Таким образом достаточно получить решение задачи в области, содержащей один период волны. Расчетная область представляет собой квадрат со стороной 1, на границах которого заданы периодические граничные условия. Начальные данные задачи:

$$(\rho, v_1, v_2, v_3, p, B_1, B_2, B_3) = (1, 0, 0.1 \sin 2\pi x_1, 0.1 \cos 2\pi x_1, 1, \sqrt{4\pi}, \rightarrow 0.1 \sqrt{4\pi} \sin 2\pi x_1, 0.1 \sqrt{4\pi} \cos 2\pi x_1).$$

Выбран показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ , что соответствует идеальному одноатомному газу.

Поскольку известно точное решение, определим скорость сходимости метода. Для оценки погрешности используем формулы

$$\delta_h = 0.25(\delta_h(v_2) + \delta_h(v_3) + \delta_h(B_2) + \delta_h(B_3)),$$

$$\delta_h(\psi) = \left( \sum_{K^i \in \Omega_h} |\psi^N(K^i) - \psi^E(K^i)| \right) / \left( \sum_{K^i \in \Omega_h} |\psi^E(K^i)| \right),$$

где  $\psi^N(K^i)$  — среднее значение численного решения в треугольнике  $K^i$ , а  $\psi^E(K^i)$  — среднее значение точного решения. Скорость сходимости можно оценить как  $R_h = \log_2(\delta_h/\delta_{h/2})$ .

В расчетах использовались треугольные неструктурированные сетки  $\Omega_h$ , построенные при помощи программы Gridder2D [7] с характерными размерами длины ребра ячейки  $h = 0,16; 0,08; 0,04; 0,02$ . Для динамического вычисления шага по времени  $\tau$  использовалось число Куранта  $C = 0,4$ . Численный поток рассчитывался по методу HLL.

Таблица

**Сходимость метода на гладком решении**

$h$	$\delta_h$	$R_h$	$h$	$\delta_h$	$R_h$
0.16	0.23172	-	0.04	0.00708	2.007
0.08	0.02847	3.024	0.02	0.00176	2.008

Как видно из результатов расчетов (см. таблицу), метод показывает 2-й порядок сходимости на гладком решении.

*Задача о вращении цилиндра в покоящейся среде.* Данная задача часто используется для тестирования устойчивости численных мето-



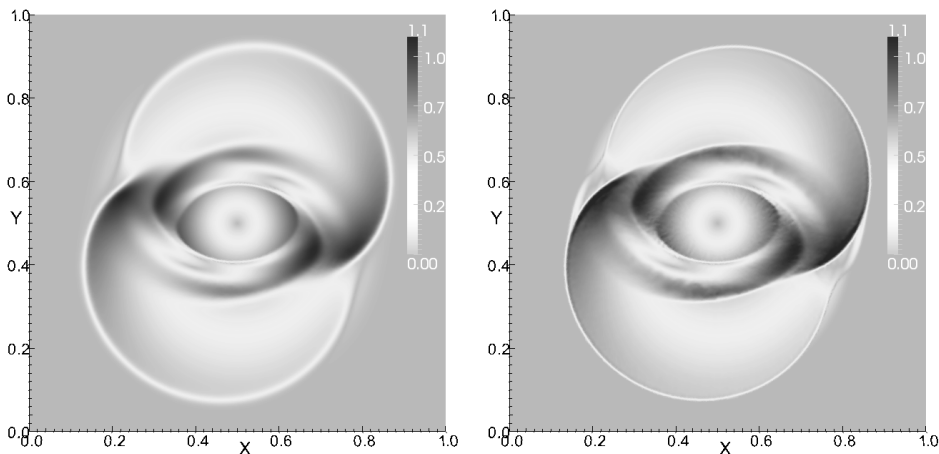
дов решения МГД-системы, поскольку в решении могут возникать нефизические отрицательные значения давления [8].

Расчетная область представляет собой единичный квадрат, заполненный замагниченной плазмой. В центре квадрата находится вращающийся плотный диск радиуса 0,1, который постепенно закручивает окружающее его вещество, что приводит к образованию разрывов в решении. Начальные данные:

$$(\rho, v_1, v_2, v_3, p, B_1, B_2, B_3) = \begin{cases} (10, -20(x_2 - 0,5), 20(x_1 - 0,5), 0, 1, 5, 0, 0), & 0 < r < 0,1, \\ (1 + 9f(r), -20f(r)(x_2 - 0,5), 20f(r)(x_1 - 0,5), 1, 5, 0, 0), & 0,1 \leq r < 0,115, \\ (1, 0, 0, 0, 1, 5, 0, 0), & r \geq 0,115, \end{cases}$$

$$f(r) = (0,115 - r)/(0,115 - 0,1), \quad r = \sqrt{(x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2}.$$

В качестве граничных условий выбрано условие свободного вытекания вещества из расчетной области. Показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ , число Куранта  $C = 0,4$ , расчеты проводились на сетке, состоящей из 150 000 элементов. На рис. 3 представлены распределения модуля вектора скорости на момент  $t = 0,15$ , полученные разрывными методами Галеркина первого и второго порядка точности по пространству и времени с потоком HLLD. Решение методом со вторым порядком точности приводит к меньшему размытию разрывов, как на внешней границе возмущенного вещества, так и в области повышенной плотности.



**Рис. 3.** Распределение модуля вектора скорости в задаче о вращении цилиндра. Слева — результаты, полученные с первым порядком точности, справа — со вторым

*Параллельные вычисления.* Нахождение решения системы (1) RKDG методом является вычислительно сложной задачей и при достаточно больших размерах сеток требует применения параллельных вычислительных технологий. Параллельный алгоритм программы реализован при помощи технологии MPI (Message Passing Interface) [9] и основан на разбиении исходной области на подобласти, решение в каждой из которых рассчитывается отдельным вычислительным модулем. В таком случае алгоритм решения состоит из параллельного нахождения решения на текущем временном слое в заданных подобластях и последующего реализованного с помощью средств MPI обмена “контактными” граничным данными между модулями, обрабатывающими соседние подобласти.

Вычисления производились на Учебно-экспериментальном вычислительном кластере кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана [10]. Доля параллельного кода в описанном алгоритме составляет 99,5 %, что согласно закону Амдала повышает скорость вычислений не более, чем в 27,9 раза на 32 ядрах. Решение задачи о вращении цилиндра на одном ядре заняло 26,2 мин, на 32 ядрах — 1,55 мин (ускорение в 16,9 раза). Различие теоретических и экспериментальных показателей объясняется спецификой структуры кластерной системы.

**Заключение.** Создан алгоритм для решения двумерных уравнений магнитной гидродинамики разрывным методом Галеркина, основывающийся на ряде приближенных решений задачи Римана о распаде разрыва (HLL, HLLC, HLLD). Рассмотрены способы монотонизации схемы. Введена процедура реконструкции магнитных потоков, позволяющая в случае методов первого и второго порядков получать бездивергентные распределения магнитного поля. Протестирован метод второго порядка точности по пространству и времени. Тесты показали высокий уровень разрешения разрывов, а также уменьшение диффузионного влияния бездивергентной реконструкции магнитного поля для метода второго порядка относительно метода первого порядка. Создана и протестирована параллельная версия программы с использованием технологии параллельных вычислений для систем с распределенной памятью MPI.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты 12-01-00109, 12-02-00687, 12-01-31193, научной школы НШ-1434.2012.2.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.

2. Г а л а н и н М. П., Г р и щ е н к о Е. В., С а в е н к о в Е. Б., Т о к а р е в а С. А. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики. Препринт. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. – 31 с.
3. T o r o E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction. Berlin: Springer, 2009. – 724 p.
4. M i g n o n e A., B o d o G. Shock-Capturing Schemes in Computational MHD. Lect. Notes Phys. – 2008. – V. 754. – P. 71–101.
5. T o r r i l h o n M. Locally Divergence-preserving Upwind Finite Volume Schemes for Magnetohydrodynamic Equations // J. Sci. Comp. – 2005. – V. 26. – P. 1166–1191.
6. Г а л а н и н М. П., Л у к и н В. В. Разностная схема для решения двумерных задач идеальной МГД на неструктурированных сетках. Препринт. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2007. – 29 с.
7. Щ е г л о в И. А. Программа для триангуляции сложных двумерных областей Gridder2D. Препринт. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 60, 2008. – 32 с.
8. T o t h G. The  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes // J. of Comp. Physics. 161, 2000. – P. 605–652.
9. М а р ч е в с к и й И. К., Т о к а р е в а С. А. Сравнение эффективности параллельных алгоритмов решения задач газовой динамики на разных вычислительных комплексах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2009. – № 1. – С. 90–97.
10. Л у к и н В. В., М а р ч е в с к и й И. К. Учебно-экспериментальный вычислительный кластер. Ч. 1. Инструментарий и возможности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2011. – № 4. – С. 28–43.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012