

С. В. К а ш т а н о в а, Н. Н. О к у л о в а

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА LS-STAG

Разработан алгоритм решения задачи теплопереноса в движущейся вязкой несжимаемой жидкости, использующий идеи метода LS-STAG. Решена модельная задача о тепломассопереносе вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне с подвижной верхней границей. Проведена серия расчетов при различных параметрах задачи.

E-mail: svetlyachok.fn@gmail.com, nokulova@gmail.com

Ключевые слова: вязкая жидкость, теплоперенос, каверна, метод LS-STAG, стабилизированный метод бисопряженных градиентов.

Постановка задачи. Рассматривается течение вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости постоянной плотности ρ в произвольной двумерной области Ω^f с границей Γ^f . В области течения Ω^f математическая модель состоит из уравнения неразрывности, уравнений Навье–Стокса и уравнения теплопроводности:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T - \frac{1}{\text{Pe}} \Delta T = 0, \quad (3)$$

а также начальных и граничных условий для скорости течения жидкости $\vec{v} = (u, v)$, давления p и температуры жидкости T .

Уравнения (1)–(3) выписаны в безразмерных переменных, базис обезразмеривания включает в себя L — характерный размер области течения, U_0 — характерную скорость течения жидкости, ν — коэффициент кинематической вязкости, T_0 — характерную температуру жидкости и a^2 — коэффициент температуропроводности жидкости. В постановке (1)–(3) число Рейнольдса $\text{Re} = U_0 L / \nu$, число Пекле $\text{Pe} = U_0 L / a^2$, величины, имеющие размерность длины, отнесены к L , скорости — к U_0 , давление — к ρU_0^2 , время — к L / U_0 , температура — к T_0 .

Метод решения гидродинамической задачи. Основная часть краевых задач гидродинамики не имеет аналитических решений, которые могли бы быть выписаны в явном виде даже в областях несложной

формы. В этой ситуации в настоящее время является актуальным решение этих задач при помощи численных методов. Наиболее известными являются методы решения в переменных “функция тока–вихрь” [1], метод характеристик [2, 3], MAC-метод [4]. В работе [5] приведены результаты решения плоской задачи о моделировании течения вязкой несжимаемой жидкости в каверне методом SIMPLE [6], а также указаны некоторые ограничения выбранного метода решения, такие как требование совпадения границы области течения с гранями контрольных объемов основной прямоугольной сетки и его фактическая применимость только к стационарным задачам.

В данной работе для решения аналогичной задачи применен метод LS-STAG [7]. Алгоритм метода LS-STAG основан на MAC-методе для разнесенных сеток (как и алгоритм SIMPLE), но расчетная сетка не связывается с границей области. Данный метод относится к классу методов погруженных границ — прямоугольные ячейки, которые пересекаются границей области течения, усекаются в соответствии с аппроксимированной кусочно-линейной функцией границей. Таким образом, область решения представляет собой совокупность прямоугольных ячеек, не имеющих пересечений с границей области течения, и усеченных ячеек.

Для обозначения находящихся в области течения граней ячейки используются обозначения сторон света: n — север, s — юг, w — запад, e — восток. Грани, принадлежащие границе области течения, обозначаются индексом ib . Например, граница $\Gamma_{i,j}$ трапециевидной усеченной ячейки $\Omega_{i,j}$ (рис. 1) $\Gamma_{i,j} = \Gamma_{i,j}^s \cup \Gamma_{i,j}^w \cup \Gamma_{i,j}^e \cup \Gamma_{i,j}^{ib}$. Граница $\Gamma_{i,j}^u$ смещенного контрольного объема $\Omega_{i,j}^u$ (рис. 2) $\Gamma_{i,j}^u = (\Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i,j}^{s,w}) \cup \Gamma_{i,j}^{u,w} \cup \Gamma_{i,j}^{u,e} \cup (\Gamma_{i,j}^{ib,e} \cup \Gamma_{i,j}^{ib,w})$.

Каждая ячейка характеризуется так называемыми коэффициентами заполнения ячейки, которые равны отношению длины грани ячейки, принадлежащей области течения, к величине пространственного шага для данной ячейки по соответствующей оси. Для граней, параллельных оси Ox , используется индекс v , для граней, параллельных оси

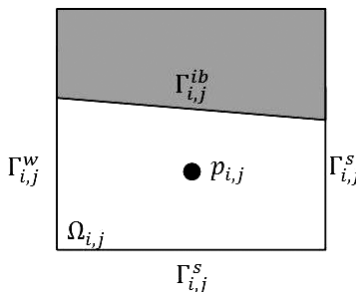


Рис. 1. Трапециевидная усеченная ячейка $\Omega_{i,j}$

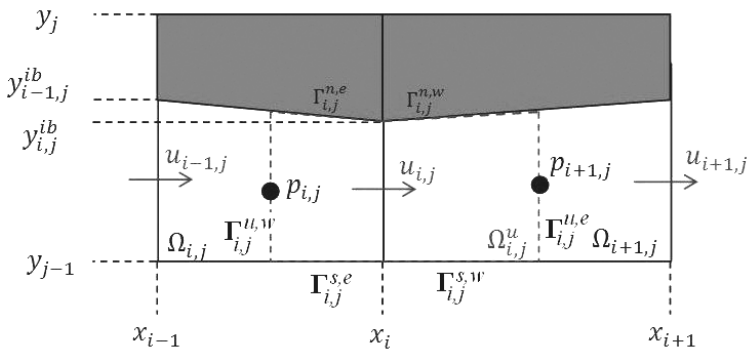


Рис. 2. Смещенная ячейка $\Omega_{i,j}^u$

O_y – индекс u . Например, для усеченной ячейки $\Omega_{i,j}^u$ (рис. 2):

$$\theta_{i,j}^u = \frac{y_{i,j}^{ib} - y_{j-1}}{\Delta y_j}, \quad \theta_{i-1,j}^u = \frac{y_{i-1,j}^{ib} - y_{j-1}}{\Delta y_j}, \quad \theta_{i,j-1}^v = 0.$$

Дискретные аналоги уравнений неразрывности (1) и Навье–Стокса (2) в интегральной формулировке

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dV + \int_{\Gamma} (\vec{v} \cdot \vec{n}) u \, dS + \int_{\Gamma} p \vec{e}_x \cdot \vec{n} \, dS - \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma} \nabla u \cdot \vec{n} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \, dV + \int_{\Gamma} (\vec{v} \cdot \vec{n}) v \, dS + \int_{\Gamma} p \vec{e}_y \cdot \vec{n} \, dS - \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma} \nabla v \cdot \vec{n} = 0 \quad (6)$$

в прямоугольных и усеченных ячейках записываются на одном и том же пятиточечном шаблоне, при этом выполняются дискретные аналоги законов сохранения массы, импульса и кинетической энергии [7].

Дискретизация уравнения переноса теплоты. Для решения задачи теплопереноса в вязкой жидкости разработан метод численного решения уравнения переноса теплоты (3), использующий некоторые идеи методики LS-STAG. Интегрированием уравнения (3) по произвольному малому объему жидкости получается его интегральный аналог в следующем виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} T \, dV + \int_{\Gamma} (\vec{v} \cdot \vec{n}) T \, dS - \frac{1}{\text{Pe}} \int_{\Gamma} \nabla T \cdot \vec{n} \, dS = 0. \quad (7)$$

Далее в качестве объема интегрирования используется контрольный объем основной (усеченной или прямоугольной) ячейки $\Omega_{i,j}$.

Принимается, что температура $T(x, y, t)$ характеризуется своим значением $T_{i,j}$ в центре масс основной ячейки, аппроксимирующим температуру всюду на $\Omega_{i,j}$.

Интеграл в первом слагаемом уравнения (7) дискретизируется по аналогии с интегралом в первом слагаемом уравнений Навье–Стокса (5) (или (6)), с тем отличием, что рассматриваются основные ячейки, а не смещенные:

$$\int_{\Omega_{i,j}} T dV \cong V_{i,j} T_{i,j}, \text{ где } V_{i,j} - \text{объем ячейки } \Omega_{i,j}.$$

Второе слагаемое уравнения (7), характеризующее изменение температуры, обусловленное переносом массы, дискретизируется аналогично $\int_{\Gamma} (\vec{v} \cdot \vec{n}) u dS$.

Конвективный тепловой поток $\int_{\Gamma_{i,j}} (\vec{v} \cdot \vec{n}) T dS$ представляется в виде суммы потоков через грани $\Omega_{i,j}$:

$$\int_{\Gamma_{i,j}} (\vec{v} \cdot \vec{n}) T dS = - \int_{\Gamma_{i,j}^w} (\vec{v} \cdot \vec{e}_x) T dS + \int_{\Gamma_{i,j}^e} (\vec{v} \cdot \vec{e}_x) T dS - \int_{\Gamma_{i,j}^s} (\vec{v} \cdot \vec{e}_y) T dS + \int_{\Gamma_{i,j}^n} (\vec{v} \cdot \vec{e}_y) T dS. \quad (8)$$

В данной работе рассматривается ситуация, когда граница области неподвижна и через нее не происходит течения среды. Тогда поток массы через твердую границу равен нулю $\bar{U}_{i,j}^{ib} = 0$ а, следовательно, конвективный поток теплоты через твердую границу равен нулю и соответствующее ему слагаемое в выражении (8) отсутствует.

Каждое из слагаемых выражения (8) дискретизируется при помощи численных потоков массы через соответствующие грани $\Omega_{i,j}$ и характерное значение температуры на этих гранях, определяемое как среднее арифметическое значений температур в двух соседних ячейках. Например, для восточной грани:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^e} (\vec{v} \cdot \vec{e}_x) T dS \cong \bar{u}_{i,j} \frac{T_{i,j} + T_{i+1,j}}{2},$$

где $\bar{u}_{i,j} \cong \theta_{i,j}^u \Delta y_j u_{i,j}$ аппроксимирует поток массы через восточную грань $\Omega_{i,j}$.

Итак, для любой основной ячейки (усеченной или прямоугольной) разностная схема для конвективного слагаемого уравнения (7) на пятиточечном шаблоне имеет вид:

$$\int_{\Gamma_{i,j}} (\vec{v} \cdot \vec{n}) T dS \cong C_T [\bar{U}]_W(i, j) T_{i-1,j} + C_T [\bar{U}]_E(i, j) T_{i+1,j} + \\ + C_T [\bar{U}]_P(i, j) T_{i,j} + C_T [\bar{U}]_S(i, j) T_{i,j-1} + C_T [\bar{U}]_N(i, j) T_{i,j+1}.$$

Описанная выше методика приводит к кососимметричной матрице $C_T[\bar{U}]$, а именно, будет выполняться:

$$C_T[\bar{U}]_P(i, j) = 0 \text{ в силу уравнения неразрывности,}$$

$$C_T[\bar{U}]_E(i, j) = -C_T[\bar{U}]_W(i + 1, j) = \frac{\bar{u}_{i,j}}{2},$$

$$C_T[\bar{U}]_N(i, j) = -C_T[\bar{U}]_S(i, j + 1) = \frac{\bar{v}_{i,j}}{2}.$$

Третье слагаемое уравнения (7), $\int_{\Gamma} \nabla T \cdot \vec{n} dS$, описывает изменение температуры, обусловленное тем, что теплота передается из более нагретых областей тела к менее нагретым. Хотя аналитически оно аналогично слагаемому $\int_{\Gamma} \nabla u \cdot \vec{n} dS$ в уравнении Навье–Стокса

(5), численно оно не может быть дискретизовано аналогичной методикой. Это связано с тем, что при дискретизации $\int_{\Gamma} \nabla u \cdot \vec{n} dS$ введено

предположение $\frac{\partial u}{\partial x} = \text{const}$ на смещенной ячейке, что не может быть использовано в связи со сделанным нами ранее предположении о постоянстве температуры на основной ячейке.

Диффузионный поток теплоты $\int_{\Gamma_{i,j}} \nabla T \cdot \vec{n} dS$ представляется в виде суммы потоков через грани $\Omega_{i,j}$:

$$\int_{\Gamma_{i,j}} \nabla T \cdot \vec{n} dS = \\ = - \int_{\Gamma_{i,j}^w} \frac{\partial T}{\partial x} dS + \int_{\Gamma_{i,j}^e} \frac{\partial T}{\partial x} dS - \int_{\Gamma_{i,j}^s} \frac{\partial T}{\partial y} dS + \int_{\Gamma_{i,j}^n} \frac{\partial T}{\partial y} dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} dS.$$

Разность температур в соседних ячейках будем определять через разность температур между центрами масс этих ячеек.

Например, дискретизация потока градиента температуры через восточную грань:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^e} \nabla T \cdot \vec{n} dS = \int_{\Gamma_{i,j}^e} \nabla T \cdot \vec{e}_x dS \approx \int_{\Gamma_{i,j}^e} \frac{\partial T}{\partial \vec{e}_s} \vec{e}_s \cdot \vec{e}_x dS \cong \\ \cong \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{|\vec{s}|} \left(-\frac{\Delta x_i^m}{|\vec{s}|} \right) \theta_{i,j}^u \Delta y_j = \frac{(T_{i,j} - T_{i+1,j}) \Delta x_i^m}{(\Delta x_i^m)^2 + (y_{i,j}^m - y_{i+1,j}^m)^2} \theta_{i,j}^u \Delta y_j,$$

где $\vec{s} = (x_{i,j}^m - x_{i+1,j}^m)\vec{e}_x + (y_{i,j}^m - y_{i+1,j}^m)\vec{e}_y$, $\vec{e}_s = \vec{s}/|\vec{s}|$, $\Delta x_i^m = |x_{i,j}^m - x_{i+1,j}^m|$ – проекция расстояния между центрами масс ячеек $\Omega_{i+1,j}$ и $\Omega_{i,j}$ на ось Ox .

Дискретизация потока градиента температуры через южную грань (через остальные грани соотношения выводятся аналогично):

$$\int_{\Gamma_{i,j}^s} \nabla T \cdot \vec{n} dS = - \int_{\Gamma_{i,j}^s} \nabla T \cdot \vec{e}_y dS \approx - \int_{\Gamma_{i,j}^s} \frac{\partial T}{\partial \vec{e}_s} \vec{e}_s \cdot \vec{e}_y dS \cong \\ \cong -\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{|\vec{s}|} \left(-\frac{\Delta y_{j-1}^m}{|\vec{s}|} \right) \theta_{i,j-1}^v \Delta x_i = \\ = \frac{(T_{i,j} - T_{i,j-1}) \Delta y_{j-1}^m}{(x_{i,j}^m - x_{i,j-1}^m)^2 + (\Delta y_{j-1}^m)^2} \theta_{i,j-1}^v \Delta x_i,$$

где $\vec{s} = (x_{i,j}^m - x_{i,j-1}^m)\vec{e}_x + (y_{i,j}^m - y_{i,j-1}^m)\vec{e}_y$, $\vec{e}_s = \vec{s}/|\vec{s}|$, $\Delta y_{j-1}^m = |y_{i,j-1}^m - y_{i,j}^m|$ – проекция расстояния между центрами масс ячеек $\Omega_{i,j-1}$ и $\Omega_{i,j}$ на ось Oy .

Поскольку градиент температуры через твердую грань предполагается известным из граничных условий, то

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \nabla T \cdot \vec{n}^{ib} dS = \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}^{ib}} dS \cong \text{Ki}(i, j) \Delta S_{i,j}^{ib},$$

где $\text{Ki}(i, j) = qL/\lambda\Delta T$ – значение теплообменного числа Кирпичева на твердой грани основной усеченной ячейки $\Omega_{i,j}$, q – тепловой поток через $\Gamma_{i,j}^{ib}$, ΔT – характерная разность температур, $\Delta S_{i,j}^{ib}$ – длина твердой грани $\Omega_{i,j}$, \vec{n}^{ib} – единичная нормаль к твердой грани ячейки.

Итак, для любой основной жидкой ячейки (усеченной или прямоугольной) разностная схема для диффузионного слагаемого на пяти-точечном шаблоне имеет вид:

$$\int_{\Gamma_{i,j}} \nabla T \cdot \vec{n} dS \cong K_{TW}(i, j)T_{i-1,j} + K_{TE}(i, j)T_{i+1,j} + K_{TP}(i, j)T_{i,j} + \\ + K_{TS}(i, j)T_{i,j-1} + K_{TN}(i, j)T_{i,j+1} + S_{T,i,j}^{ib}.$$

Описанная выше методика приводит к симметричной матрице K_T , а именно, будет выполняться:

$$K_{TP}(i, j) = \frac{\theta_{i,j}^u \Delta x_i^m \Delta y_j}{(\Delta x_i^m)^2 + (y_{i,j}^m - y_{i+1,j}^m)^2} + \frac{\theta_{i,j}^v \Delta x_i \Delta y_j^m}{(x_{i,j}^m - x_{i,j+1}^m)^2 + (\Delta y_j^m)^2} -$$

$$+ \frac{\theta_{i-1,j}^u \Delta x_{i-1}^m \Delta y_j}{(\Delta x_{i-1}^m)^2 + (y_{i-1,j}^m - y_{i,j}^m)^2} + \frac{\theta_{i,j-1}^v \Delta x_i \Delta y_{j-1}^m}{(x_{i,j}^m - x_{i,j-1}^m)^2 + (\Delta y_{j-1}^m)^2},$$

$$K_{TE}(i, j) = K_{TW}(i + 1, j) = -\frac{\theta_{i,j}^u \Delta x_i \Delta y_j}{(\Delta x_i^m)^2 + (y_{i,j}^m - y_{i+1,j}^m)^2},$$

$$K_{TN}(i, j) = K_{TS}(i, j + 1) = -\frac{\theta_{i,j}^v \Delta x_i \Delta y_j^m}{(x_{i,j}^m - x_{i,j+1}^m)^2 + (\Delta y_j^m)^2}.$$

Постановка расчетной задачи. Для тестирования изложенной выше методики поставлена и решена нестационарная задача тепломассопереноса трансформаторного масла [8] в квадратной камере при числе Рейнольдса $Re = 100$ и числе Пекле $Pe = 10000$. Это соответствует следующим параметрам задачи – характерный размер камеры $L = 0,5$ м (длина стенки камеры), характерная скорость границы $U_0 = 0,02$ м/с (скорость верхней грани камеры), число Прандтля $Pr = c\rho\nu/\lambda = 100$.

Для удобства решения задачи и обработки полученных результатов расчета обезразмеривание температуры проведено следующим образом:

$$T = \frac{\bar{T} - T_{лев}}{T_{прав} - T_{лев}},$$

где \bar{T} – температура (К), T – безразмерная температура, $T_{лев}$ и $T_{прав}$ – температура на левой и правой стенках камеры, соответственно. При этом уравнение (3) не изменится, а тепловое число Кирпичева запишется в виде $Ki = qL/\lambda(T_{прав} - T_{лев})$.

В постановку задачи входят уравнения: неразрывности (1), Навье–Стокса (2) и теплопереноса (3). Поместим начало координат в левый нижний угол области и зададим граничные условия для скорости и давления следующим образом:

$(u, v) = (1, 0)$ при $y = 1$; $(u, v) = (0, 0)$ на остальной части границы;

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ на всей границе.}$$

Будем считать, что при $t = 0$ жидкость в камере покоится, а давление во всех точках постоянное ($p = p_0$). Отметим, что в такой постановке давление в области течения определено с точностью до произвольной постоянной, поэтому будем полагать $p = 0$ в правом верхнем углу камеры.

Гидродинамическая задача, включающая в себя уравнения (1), (2) и указанные выше граничные и начальные условия имеет своим ре-

шением выход течения жидкости на стационарный режим. Задача теплопереноса решается после того, как поля скорости и давления установятся. Начальные и граничные условия для температуры:

$$\begin{aligned} T(x, y, 0) &= 0, \\ T(x, y, t)|_{x=0} &= 0, \quad T(x, y, t)|_{x=1} = 1, \\ \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=0} &= 0, \quad \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=1} = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что при заданном температурном режиме вязкость масла лежит в диапазоне $7,8 \cdot 10^{-6} \dots 10,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с, что позволяет принять ее постоянной.

Численная реализация. Для решения систем линейных алгебраических уравнений, получающихся в ходе реализации алгоритма LS-STAG и изложенной выше методики дискретизации уравнения переноса теплоты, используется стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab) с α ILU предобуславливателем [9, 10]. Это современный итерационный метод, не требующий симметричности и положительной определенности матриц, а также обладающий быстрой и гладкой сходимостью. В работе [5] приведены результаты исследования по выбору оптимального значения параметра предобуславливания α . Показано, что изменение α в диапазоне от 0,1 до 0,4 мало влияет на скорость счета. В данной работе расчеты проводились при $\alpha = 0,3$. Для ускорения счета и экономии памяти ЭВМ сборка, хранение и осуществление всех операций над матрицами проводится в сжатом формате (CSR или CSIR) [11].

Для тестирования программы, реализующей решение гидродинамической задачи была проведена серия вычислительных экспериментов при различных значениях параметров счета и задачи. Расчеты проводились на сетках до 300×300 узлов, во всех случаях наблюдалась монотонность решения. В таблице приведены результаты расчетов количества итераций метода BiCGStab+ α ILU и времени счета в зависимости от величины шага по времени Δt для чисел Рейнольдса $Re = 100, 400$ и 1000 на сетке 150×150 узлов. В качестве критерия останова итерационного процесса использовалась малость скорости изменения искомого величин на итерации (параметр останова итерационного процесса при решении СЛАУ $\delta = 10^{-9}$, параметр останова цикла по времени $\varepsilon = 10^{-3}$). Из проведенного исследования следует, что оптимальным временным шагом для $Re = 100$ и $Re = 400$ является $\Delta t = 0,01$, для $Re = 1000$ оптимальный шаг $\Delta t = 0,005$.

Для тестирования программы, реализующей теплоперенос в установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне, также была проведена серия вычислительных экспериментов. Например,

Зависимость скорости счета от шага по времени (для сетки 150×150)

Re	Δt	Количество шагов по времени	Среднее число итераций BiCGStab+ α ILU на одном шаге	Время работы алгоритма, с	Среднее время счета одного шага по времени, с
100	0,0100	911	33	130,4	0,14
100	0,0050	1563	37	246,9	0,15
100	0,0025	2607	68	684,2	0,26
400	0,0100	2183	69	591,5	0,27
400	0,0050	3817	70	1015,1	0,27
400	0,0025	6497	68	1556,6	0,24
1000	0,0100	процесс расходится			
1000	0,0050	5203	67	1213,6	0,23
1000	0,0025	9049	66	1990,8	0,22

для гидродинамической задачи с $Re = 100$ и $\Delta t = 0,01$ был проведен расчет задачи теплопереноса со следующими начальными и граничными условиями: $T(x, y, 0) = 1$, $T(x, y, t)|_{\text{лев}} = 10$, $T(x, y, t)|_{\text{прав}} = 20$, верхняя и нижняя грани каверны теплоизолированы. Вычисления проводились на сетке 150×150 с числами Пекле $Pe = 1, 100$ и 10000 . Из проведенного исследования следует, что оптимальным временным шагом для $Pe = 100$ и 10000 является $\Delta t_T = 0,01$, для $Pe = 1$ оптимальный временной шаг $\Delta t_T = 0,0025$.

Результаты расчетов. При определенных оптимальных значениях временных шагов проведен расчет поставленной выше задачи о тепло-массопереносе в трансформаторном масле. Параметры проведенного расчета следующие: размер сетки 150×150 узлов, шаги по времени в задаче гидродинамики и теплопереноса $\Delta t = \Delta t_T = 0,01$, критерий останова итерационного процесса решения СЛАУ $\delta = 10^{-9}$, параметр останова цикла по времени в задаче гидродинамики $\varepsilon = 10^{-3}$, параметр останова цикла по времени в задаче теплопереноса $\varepsilon_T = 10^{-4}$.

В работе [5] приведены диаграммы распределения направления скорости, модуля скорости и давления, полученные для числа Рейнольдса $Re = 2000$ методом SIMPLE. Расчеты полученные методом LS-STAG для $Re = 1000$, качественно не отличаются от полученных в [5]. Для количественной оценки проведено сравнение с результатами классической работы [12]. На рис. 3 приведены графики составляющих скорости $u(x, 0,5)$ и $v(0,5, y)$, дающие наглядное представление о характере установившегося течения. Видно хорошее согласование результатов, полученных для различных чисел Рейнольдса при помощи

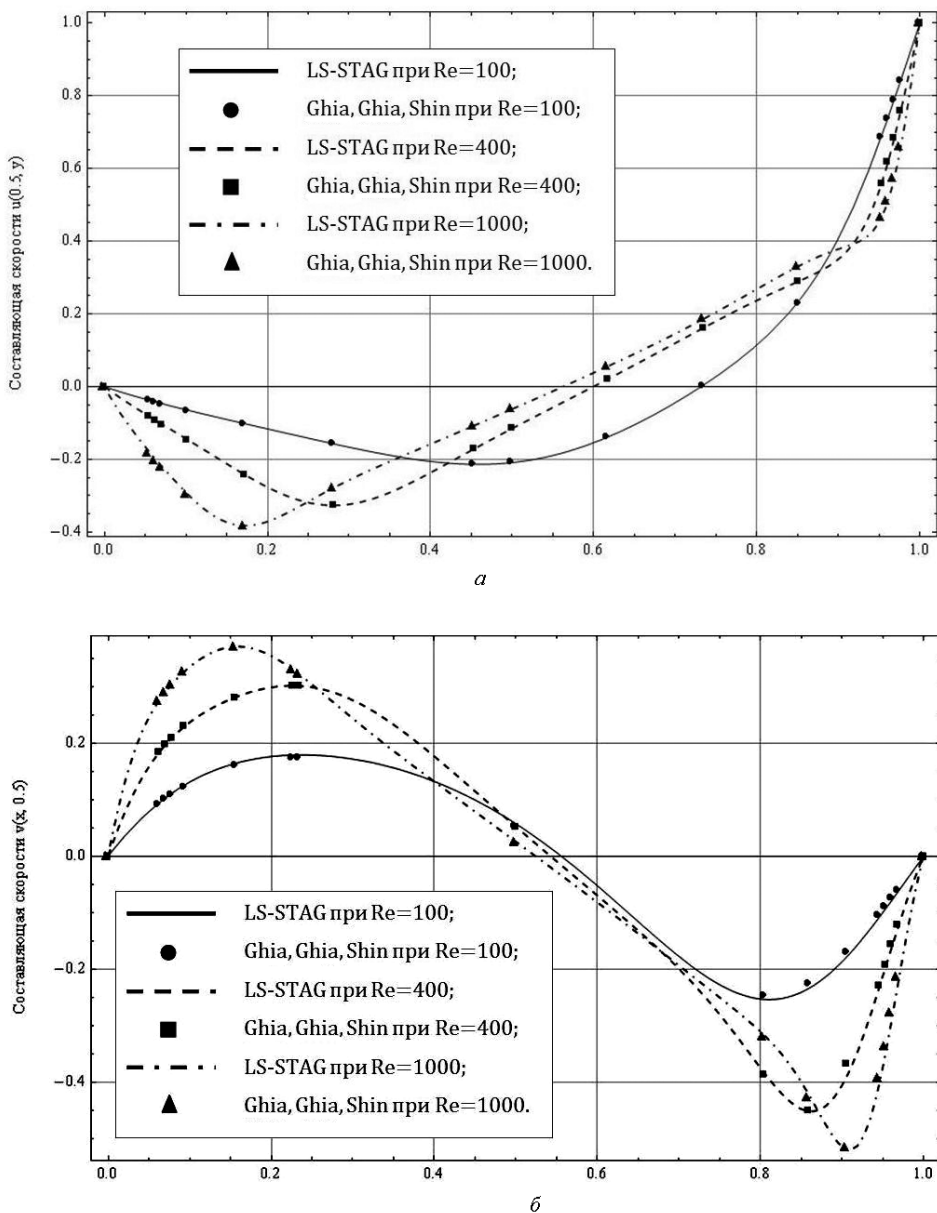
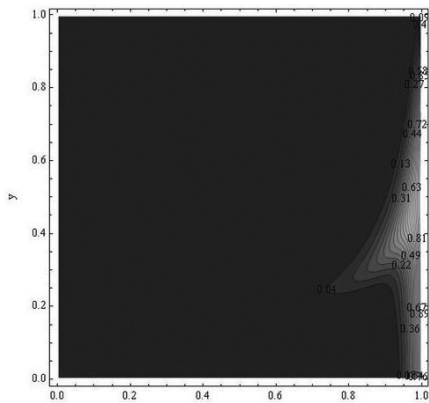


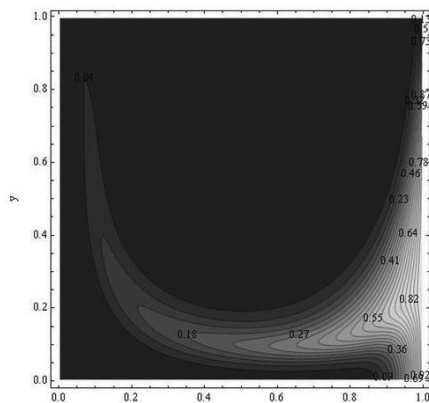
Рис. 3. График составляющих скорости $u(x, 0,5)$ (а) и $v(0,5, y)$ (б) при различных числах Рейнольдса

метода LS-STAG и приведенных в [12]. Максимальная относительная погрешность составляет 0,02 % для $u(x, 0,5)$ и 0,05 % для $v(0,5, y)$.

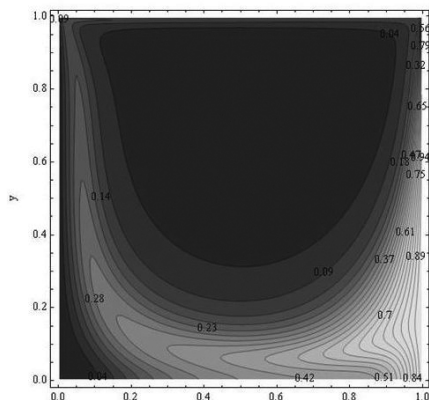
На решение задачи теплопереноса затрачивается порядка 186000 шагов по времени и 346000 итераций метода BiCGStab+ α ILU. Графики на рис. 4 наглядно иллюстрируют процесс распространения теплоты, которая от более нагретой правой стенки переносится в сторону



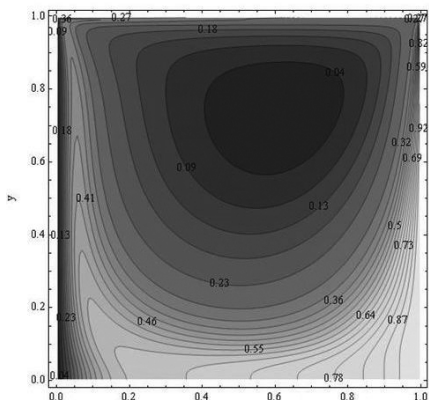
a



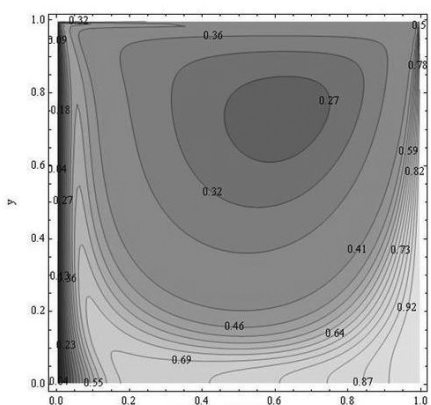
б



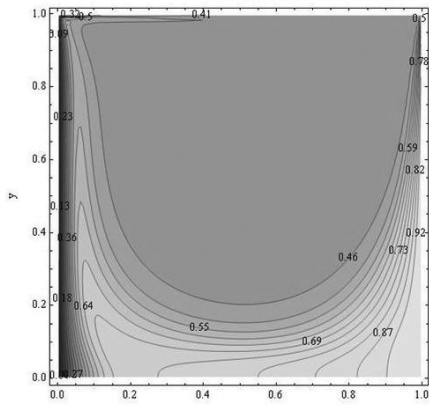
в



г



д



е

Рис. 4. Температурное поле на 500 (*a*), 2000 (*б*), 5000 (*в*), 15000 (*г*) и 50000 (*д*) шаге по времени; *е* – установившееся поле (порядка 127000 шагов)

менее нагретой левой стенки, причем перенос теплоты происходит в соответствии с линиями тока. Сначала прогревается кольцевая область

вокруг центрального вихря, внешне ограниченная стенками каверны (рис. 4, $a-z$). Это объясняется активным круговым течением жидкости в данной области, температура распространяется за счет перемещения по кругу частиц жидкости, нагреваемых правой стенкой. Прогрев области правого вихря также происходит согласовано с прогревом кольцевой области, поскольку правый вихрь прилегает к нагретой стенке. Область левого вихря прогревается позже (рис. 4, b, z), поскольку линии тока в ней являются замкнутыми и не выходят за пределы этой области, а значит, теплоперенос осуществляется за счет молекулярной теплопроводности. Выход процесса теплопереноса на стационарный режим завершается прогревом области центрального вихря (рис. 4, $z-e$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. – 726 с.
2. Lewis R. W., Nithiarasu P., Seetharamu K. N. Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow. – Chichester: John Wiley and Sons Ltd., 2004. – 335 p.
3. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. Vol. 3: Fluid dynamics. – 2000. – 347 p.
4. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: Т.2.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
5. Каштанова С. В., Окулова Н. Н. Моделирование течения вязкой жидкости в каверне методом контрольных объемов с использованием стабилизированного метода бисопряженных градиентов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – Спец. выпуск “Прикладная математика”. – 2011. – С. 159–168.
6. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкостей. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
7. Chen Y., Botella. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties // J. Comput. Phys. – 2010. – № 229. – P. 1043–1076.
8. ГОСТ 982–80. Масла трансформаторные. Технические условия. – Введен 01.01.82.
9. VanderVorst H. A. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for solution of non-symmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comp. – 1992. – No. 2. – P. 631–644.
10. Пузикова В. В. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом BiCGStab с предобуславливанием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – Спец. выпуск “Прикладная математика”. – 2011. – С. 124–133.
11. Баландин М. Ю., Шурин Э. П. Методы решения СЛАУ большой размерности. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.
12. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // J. Comput. Phys. – 1982. – V. 48. – P. 387–411.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012