УДК 531.383 DOI 10.18698/2308-6033-2017-7-1637

Стабилизация ориентации спутника с помощью двух спарок гиродинов

© А.В. Гладун

Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Ульяновск, 432071, Россия

Исследована задача стабилизации ориентации спутника, несущего две спарки гиродинов. Предложен алгоритм построения управлений, осуществляющих стабилизацию ориентации спутника в два этапа. На первом этапе строится функция Ляпунова, на втором – задача рассматривается по линейному приближению. Стабилизация достигается путем выбора собственных чисел, соответствующих матрице преобразованной системы, от которых как от переменных зависит управление. Как мнимые, так и действительные части собственных чисел этой матрицы подбираются таким образом, чтобы минимизировать норму управления. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: *спутник, спарка гиродинов, стабилизация по части переменных, функция Ляпунова, линейное приближение*

Введение. Стремительное развитие гироскопических систем и их широкое применение, благодаря множеству ценных свойств, наблюдается во многих областях, в том числе при создании современных спутников. Роторы и гиродины применяют для решения задач управления и стабилизации космических аппаратов. Однако уравнения, описывающие гироскопические системы, нелинейные, что вызывает серьезные трудности при построении управляющих воздействий. Гиродины должны иметь значительные габариты и массу, чтобы оказывать нужное влияние на управляемый объект. Настоящая работа посвящена одному из перспективных направлений упрощения уравнений систем, уменьшения массы гиродинов и повышения эффективности их использования — объединению гиродинов в спарку.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу активной стабилизации ориентации спутника с помощью спарок гиродинов. Гиродин — это двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирокамеры. Ротор, закрепленный внутри гирокамеры, вращается с постоянной угловой скоростью. Объединенные в спарку гиродины идентичны, оси вращения гирокамер параллельны. Роторы спарки вращаются с постоянными скоростями, одинаковыми по значению, но противоположными по направлению (в начальный момент времени).

Используем уравнения движения твердого тела с s спарками гиродинов, полученные в работе [1]. Запишем их в предположении, что у каждого гиродина ротор является шаровым, а гирокамера динамически симметрична относительно своей оси вращения:

$$\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} + 2\left(\mathbf{K}_0\, \mathbf{H}\, \mathbf{cosq}\, \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0 \mathbf{sinq}\ \mathbf{h}\right) = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

$$2\,\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} - 2\left(\mathbf{K}_0\,\mathbf{Hcosq}\right)^* \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_j^{C_j} + \mathbf{M}_{S+j}^{C_{S+j}}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — матрица тензора инерции системы носитель–спарки гиродинов; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ — вектор угловой скорости носителя (спутника); $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_s)^*$ — вектор углов поворота гирокамер спарок относительно носителя; $\mathbf{sinq} = \mathrm{diag}(\sin q_1, \ldots, \sin q_s)$; $\mathbf{cosq} = \mathrm{diag}(\cos q_1, \ldots, \cos q_s)$; $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_s)^*$; $\mathbf{H} = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_s)$; $\mathbf{K}_0 = (\mathbf{k}_{01}, \ldots, \mathbf{k}_{0s})$; $\mathbf{k}_{0i}$, $\mathbf{l}_{0i}$, $\mathbf{n}_{0i}$ — орты, задающие положение i-й спарки гиродинов в теле носителе; $\mathbf{M}_j^{C_j}$, $\mathbf{M}_{S+j}^{C_{S+j}}$ — главные моменты управляющих сил относительно центра инерции j-го и $s+j$-го гиродинов, входящих в j-ю спарку, соответственно; $*$ — символ транспонирования.

В качестве управляющего выберем вектор угловых скоростей поворота гирокамер относительно носителя

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}. \qquad (3)$$

Тогда главный момент управляющих сил из уравнения (2) определяется равенством

$$\mathbf{M}_j^{C_j} + \mathbf{M}_{s+j}^{C_{S+j}} = 2\,\mathbf{J}\,\dot{\mathbf{u}} - 2(\mathbf{K}_0\ \mathbf{H}\,\mathbf{cosq})^* \boldsymbol{\omega}$$

и можно ограничиться в данном случае только уравнением (1), описывающим движение носителя, для которого с учетом равенства (3) получаем

$$\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{K}_0 \sin \mathbf{q}\,\mathbf{h}\right) + 2\mathbf{K}_0\, \mathbf{H} \cos \mathbf{q}\, \mathbf{u} = 0. \qquad (4)$$

Запишем уравнение (4) в системе координат $OXYZ$, жестко связанной с носителем, выбрав ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} = (A_1\omega_1,\ A_2\omega_2,\ A_3\omega_3)^*,$$

где A_1, A_2, A_3 — обобщенные моменты инерции.

Система уравнений (3–4), описывающая движение спутника, несущего s спарок гиродинов, принимает вид

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 +$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{s}\left[h_j \sin q_j \left(\omega_3 k_{0j}^2 - \omega_2 k_{0j}^3\right) - h_j u_j \cos q_j\ k_{0j}^1 \right],$$

$$\dot{q}_j = u_j, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Пусть на спутнике установлены две спарки гиродинов и оси вращения гирокамер одной из них не совпадают ни с одной из координатных осей. В качестве ортов примем следующие:

$$\mathbf{k}_{01}=\left(\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{6}{7}\right)^*,\ \mathbf{l}_{01}=\left(\frac{33}{35},-\frac{2}{7},-\frac{6}{35}\right)^*,\ \mathbf{n}_{01}=\left(\frac{6}{35},\ \frac{6}{7},-\frac{17}{35}\right)^*,$$

$$\mathbf{k}_{02}=(0,\ 1,\ 0)^*,\ \mathbf{l}_{02}=(0,\ 0,\ 1)^*,\ \mathbf{n}_{02}=(1,\ 0,\ 0)^*.$$

Тогда получим уравнения движения в форме

$$\dot\omega_1=\left[(A_2-A_3)\omega_2\omega_3+\frac{6}{7}h_1\omega_3\sin q_1-\frac{12}{7}h_1\omega_2\sin q_1+2h_2\omega_3\sin q_2-\frac{4}{7}h_1 u\cos q_1\right]\Big/A_1;$$
$$\dot\omega_2=\left[(A_3-A_1)\omega_1\omega_3+\frac{12}{7}h_1\omega_1\sin q_1-\frac{4}{7}h_1\omega_3\sin q_1-\frac{6}{7}h_1 u_1\cos q_1-2h_2u_2\cos q_2\right]\Big/A_2;\quad (5)$$
$$\dot\omega_3=\left[(A_1-A_2)\omega_1\omega_2+\frac{4}{7}h_1\omega_2\sin q_1-\frac{6}{7}h_1\omega_1\sin q_1-2h_2\omega_1\sin q_2-\frac{12}{7}h_1 u_1\cos q_1\right]\Big/A_3;$$
$$\dot q_1=u_1,\quad \dot q_2=u_2.$$

У полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) есть интеграл, поэтому она не управляема и, следовательно, не стабилизируема по всем переменным. Рассмотрим задачу стабилизации по части переменных, описывающих угловую скорость спутника (носителя) и ориентацию носителя в пространстве [2].

Обозначим через $O\xi\eta\zeta$ абсолютную систему координат, которую будем считать, как и систему $OXYZ$, правой декартовой. Пусть орт $\mathbf{s}_0$, неизменный в абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$, задает направление, в котором должен быть направлен спутник. Направление спутника определяется ортом $\mathbf{r}_0$, занимающим неизменное положение в системе координат $OXYZ$ и жестко связанным со спутником [2]. Рассмотрим задачу ориентации спутника (носителя) в направлении заданного орта.

Задача. Найти такую вектор-функцию управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$, под действием которой положение равновесия спутника

$$\boldsymbol{\xi}=\left(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ q_1,\ q_2\right)=\left(0,\ 0,\ 0,\ q_1^{(0)},\ q_2^{(0)}\right),\ q_1^{(0)},\ q_2^{(0)}\equiv\text{const}\quad(6)$$

приобретает асимптотическую устойчивость по переменным $\omega_1,\ \omega_2$, ω_3, а орт $\mathbf{r}_0$ стабилизируется в направлении $\mathbf{s}_0$.

Обозначим через s_i, r_i (i = 1, 2, 3) проекции векторов $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{r}_0$ на оси системы $OXYZ$. Тогда для решения поставленной задачи необходимо добавить к уравнениям (5), описывающим движение спутника с двумя спарками гиродинов, выражение [2]

$$\dot{s}_1 = s_2 \omega_3 - s_3 \omega_2 . \tag{7}$$

Решать задачу будем в два этапа. Вначале обеспечим стабилизацию нулевой угловой скорости вращения спутника, а затем его стабилизацию в направлении заданного орта.

Стабилизация нулевой угловой скорости. Составим уравнения возмущенного движения системы (5), перейдя к новым переменным

$$x_1 = \omega_1,\ \ x_2 = \omega_2,\ \ x_3 = \omega_3,\ \ x_4 = q_1 - q_1^{(0)},\ \ x_5 = q_2 - q_2^{(0)}.$$

Найдем такие управляющие воздействия $u_1(\mathbf{x})$, $u_2(\mathbf{x})$, которые обеспечивают асимптотическую y-устойчивость возмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ в силу уравнений (5). Поскольку исследуемая система с управлениями $u_1(\mathbf{x})$, $u_2(\mathbf{x})$ автономная, будем решать поставленную задачу путем построения функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы Озиранера [3] об асимптотической y-устойчивости.

Рассмотрим положительно определенную функцию $V(\mathbf{x}) \ge a(\|\mathbf{y}\|)$, где $\mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3)$, по интересующим переменным x_1, x_2, x_3:

$$V(\mathbf{x}) = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + \frac{2}{7} h_1 \sin^2 x_4 .$$

Производная от функции $V(\mathbf{x})$ в силу системы (5) имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left(-\frac{4}{7}\right) h_1 \left(2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - \sin x_4\right) u_1(\mathbf{x}) \cos x_4 - 4 h_2 x_2 u_2(\mathbf{x}) \cos x_5 .$$

Для того чтобы производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ была определенно отрицательной, зададим следующие управляющие функции:

$$u_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - \sin x_4, & \text{если } \cos x_4 \ge 0, \\ (-1)(2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - \sin x_4), & \text{если } \cos x_4 < 0, \end{cases}$$
$$u_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_2, & \text{если } \cos x_5 \ge 0, \\ -x_2, & \text{если } \cos x_5 < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left(-\frac{4}{7}\right) h_1 (2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - \sin x_4)^2 \left|\cos x_4\right| - 4 h_2 x_2^2 \left|\cos(x_5)\right| \le 0 ,$$

причем $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ при $x \in M_1$ и $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ для $x \in M$. Поскольку множество $M_0 = M \cap M_1$ не содержит целых полутраекторий при $t \in [0, +\infty)$, движение $\mathbf{x} = 0$ равномерно асимптотически y-устойчиво по теореме Озиранера.

Поведение системы уравнений (5) под действием построенных управлений (8) при начальных условиях $\omega_1(0) = 2{,}3$, $\omega_2(0) = -2{,}4$, $\omega_3(0) = -3$, $q_1(0) = \pi/6$, $q_2(0) = \pi/3$ показано на рис. 1 и 2.

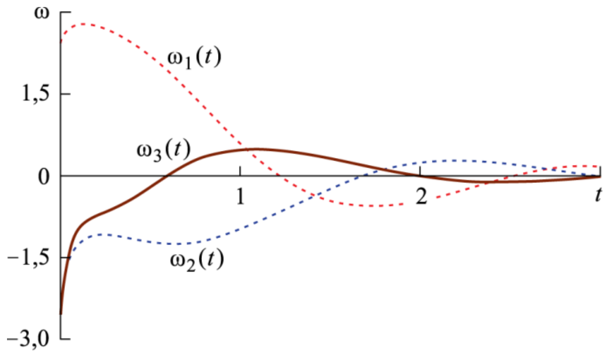

Рис. 1. Проекции угловой скорости:
$\omega_1(3) = 0{,}16$, $\omega_2(3) = -0{,}02$, $\omega_3(3) = -0{,}04$

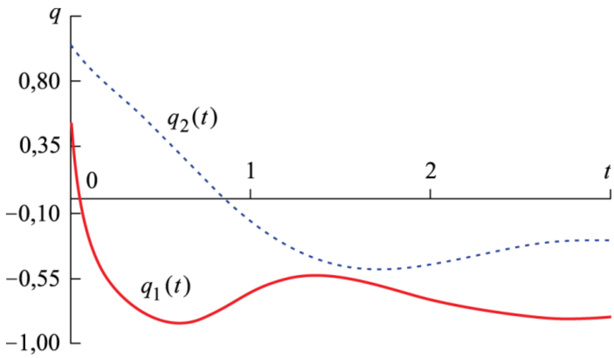

Рис. 2. Углы поворота спарок:
$q_1(3) = -0{,}7768$, $q_2(3) = -0{,}339$

Стабилизация спутника в направлении заданного орта. Переходя ко второму этапу стабилизации ориентации спутника, следует отметить, что на первом этапе решения задачи угловая скорость вращения спутника была уменьшена до небольшого значения и дальнейшая его ориентация в направлении заданного орта может быть выполнена по линейному приближению [4, 5]. Итак, имеются система уравнений (5–7) и невозмущенное движение системы

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0,\ q_1 = q_1^0,\ q_2 = q_2^0,\ s_1 = r_1^{(0)}, s_2 = r_2^{(0)}, s_3 = r_3^{(0)},$$

где $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{r}_0 = \left(r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, r_3^{(0)}\right)$ — постоянный вектор.

Составим уравнения возмущенного движения системы (5), (7), перейдя к новым переменным:

$$x_1 = \omega_1; \quad x_2 = \omega_2; \quad x_3 = \omega_3; \quad x_4 = s_1 - r_1^{(0)}; \quad x_5 = s_2 - r_2^{(0)};$$

$$x_6 = s_3 - r_3^{(0)}; \quad x_7 = q_1 - q_1^{(0)}; \quad x_8 = q_2 - q_2^{(0)},$$

и линеаризуем полученную систему в положении равновесия $\mathbf{x} = (0,0,0,0,0,0,0,0)$. Первые пять уравнений системы линейного приближения не зависят от оставшихся трех переменных x_6, x_7, x_8:

$$A_1 \dot{x}_1 = -\frac{12}{7} h_1 x_2 \sin q_1^0 + \left(\frac{6}{7} h_1 \sin q_1^0 + 2h_2 \sin q_2^0\right) x_3 - \frac{4}{7} h_1 u_1 \cos q_1^0;$$

$$A_2 \dot{x}_2 = \frac{12}{7} h_1 x_1 \sin q_1^0 - \frac{4}{7} h_1 x_3 \sin q_1^0 - \frac{6}{7} h_1 u_1 \cos q_1^0 - 2h_2 u_2 \cos q_2^0;$$

$$A_3 \dot{x}_3 = -\left(\frac{6}{7} h_1 \sin q_1^0 + 2h_2 \sin q_2^0\right) x_1 + \frac{4}{7} h_1 x_2 \sin q_1^0 - \frac{12}{7} h_1 u_1 \cos q_1^0; \quad (9)$$

$$\dot{x}_4 = r_2^{(0)} x_3 - r_3^{(0)} x_2; \qquad \dot{x}_5 = r_3^{(0)} x_1 - r_1^{(0)} x_3.$$

Переменная x_6 связана с x_4, x_5 интегралом, так как $\sum_{i=1}^{3} s_i^2 = 1$, поэтому стабилизация возмущенного движения системы (9) влечет за собой стабилизацию ориентации носителя в заданном направлении. Переменные x_7, x_8 определяют не интересующие в данном случае углы поворота гирокамер первой и второй спарки гиродинов соответственно, а значит могут быть отброшены. Исследуем систему (9) на управляемость по всем переменным. Пусть выполнены равенства

$$A_1 = 230,\ A_2 = 310,\ A_3 = 210,\ J_1 = 4,\ J_2 = 4,\ w = 100,$$

$$h_1 = J_1 w,\ h_2 = J_2 w,\ \ q_1^0 = -0{,}7768,\ \ q_2^0 = -0{,}339.$$

Пусть $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$ есть система (9), записанная в матричном виде. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{T} = \left\{\mathbf{b}^{\langle 2\rangle},\ \mathbf{A}\mathbf{b}^{\langle 2\rangle},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b}^{\langle 2\rangle},\ \mathbf{A}^3\mathbf{b}^{\langle 2\rangle},\ \mathbf{b}^{\langle 1\rangle}\right\},$$

где

$$\mathbf{B} = \left\{\ \mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle}\right\},$$

$$\mathbf{b}^{\langle 1\rangle} = \left(-\frac{4}{7A_1} h_1 \cos q_1^0, -\frac{6}{7A_2} h_1 \cos q_1^0, -\frac{12}{7A_3} h_1 \cos q_1^0, 0, 0 \right)^*,$$

$$\mathbf{b}^{\langle 2\rangle} = \left(0, -\frac{2h_2}{A_2} \cos q_2^0, 0, 0, 0 \right)^*.$$

Поскольку определитель матрицы $\mathbf{T}$ не равен нулю, $\det(\mathbf{T}) = 105,716 \neq 0$, система (9) управляема по всем переменным с помощью управлений u_1 и u_2. Из свойства управляемости для линейной системы (9) следует возможность ее стабилизации, что влечет стабилизацию исходной системы (5), (7) по части переменных по линейному приближению.

Построим управления u_1, u_2, решающие задачу стабилизации для системы (9). Сделаем замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{y}$. Поскольку матрица $\mathbf{T}$ не вырожденная, система (9) примет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{P}\,\mathbf{y} + \mathbf{q}_1 u_1 + \mathbf{q}_2 u_2, \tag{10}$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{T}$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}^{\langle 2\rangle}$, $\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle} \right\}$.

Путем выбора в качестве матрицы $\mathbf{T}$ линейно независимого блока матрицы управляемости системы получаем матрицу $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1,0077 \\ 0 & 1 & 0 & -8,9439 & -0,0118 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,1881 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и векторы $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$: $\mathbf{q}_1^* = (0,0,0,0,1)$, $\mathbf{q}_2^* = (1,0,0,0,0)$.

Уравнение (10) содержит только управление u_1, выбирая которое соответствующим образом, можно обеспечить стабилизацию переменной y_5 фазового вектора системы (10). Для остальных уравнений это означает, что в каждом из них переменная y_5 монотонно убывает, следовательно, для стабилизации оставшихся переменных фазового вектора достаточно решить задачу стабилизации системы

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8,9439 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_2.. \qquad (11)$$

В итоге исходная система (9) после замены переменных распадается на две, причем в первой системе содержится управление u_2, а во второй — u_1.

Возьмем в качестве первого управления $u_1 = -y_5$, тогда $y_5 = y_5^{(0)} \mathrm{e}^{-t}$, где $y_5^{(0)} = y_5(t_0)$ и характеристическое значение $\lambda_5 = -1$. Так как $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, то, вычисляя из обратной замены переменную y_5, получаем

$$u_1 = 0,77139\omega_1 + 0,19446\omega_3 + 2,19545\left(s_1 - r_1^{(0)}\right) - 0,70407\left(s_2 - r_2^{(0)}\right).$$

Стабилизирующее управление u_2 для системы (11) построим по формуле $u_2 = \mathbf{c}^* \mathbf{y}$ [6]:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{T}^{-1})^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{v}), \qquad (12)$$

где вектор $\mathbf{p}$ состоит из элементов последнего столбца матрицы в системе (11), записанных в порядке снизу вверх с обратным знаком, а $\mathbf{v}$ — вектор коэффициентов соответствующего системе характеристического уравнения

$$\lambda^4 + v_1\lambda^3 + v_2\lambda^2 + v_3\lambda + v_4 = 0.$$

Обозначим корни характеристического уравнения через

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \mathrm{i}\beta_1, \;\; \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \mathrm{i}\beta_2.$$

Находим компоненты вектора $\mathbf{c}$ коэффициентов управления $u_2 = \mathbf{c}^* \mathbf{y}$, вычисляя их явно с помощью математического пакета для ЭВМ по формуле (12).

Получив явный вид вектора $\mathbf{c}$ коэффициентов управления как функции переменных α_i, β_i, рассмотрим задачу о минимизации нормы стабилизирующего управления с обратной связью, где

$$\| u \| = \sup_{\mathbf{y}} \frac{|u(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{y}\|} = \| \mathbf{c} \| = \sqrt{c_1^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \ldots + c_m^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}.$$

Будем искать

$$\min_{\alpha_i \le -1} \| u_2 \| = \min_{\alpha_i \le -1} \left(c_1^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \ldots + c_4^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \right)^{1/2}$$

не только по мнимым β_1, β_2, но и по действительным α_1, α_2 частям корней характеристического уравнения системы. Минимум $\| u_2 \|$ ищем в замкнутой области D: $\alpha_1 \le -1$, $\alpha_2 \le -1$, $-500 \le \beta_1 \le 500$, $-500 \le \beta_2 \le 500$, методом сопряженных градиентов, начиная спуск с точки $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = -10$.

Получаем $\min\limits_{D} \| u_2 \| = \sqrt{6{,}18459}$ при $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = -1{,}205$, $\beta_2 = 0{,}00012$.

Подставляем найденные $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ в формулу управления:

$$u_2 = -0{,}4316\omega_1 + 1{,}64354\,\omega_2 - 0{,}425326\omega_3 +$$

$$+ 0{,}5309\left(s_1 - r_1^{(0)}\right) - 1{,}81649\left(s_2 - r_2^{(0)}\right).$$

Поведение системы (5), (7) под действием построенных управлений при начальных условиях $\omega_1(0) = 0{,}16$, $\omega_2(0) = -0{,}02$, $\omega_3(0) = -0{,}04$, $q_1(0) = -0{,}7768$, $q_2(0) = -0{,}339$, совпадающих с конечными значениями переменных, полученными в предыдущем разделе, показано на рис. 3 и 4. При этом решается задача ориентации спутника в направлении орта $\mathbf{r}_0 = \left(0.(3),\ 0.(6),\ 0.(6)\right)$.

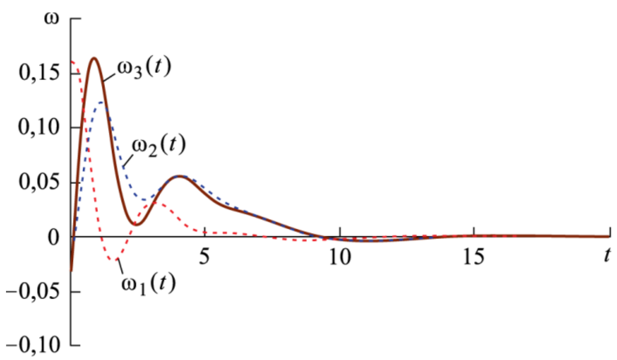

Рис. 3. Проекции угловой скорости:

$\omega_1(20) = (-5)\cdot 10^{-5}$; $\omega_2(20) = (-9)\cdot 10^{-5}$; $\omega_3(20) = (-9)\cdot 10^{-5}$

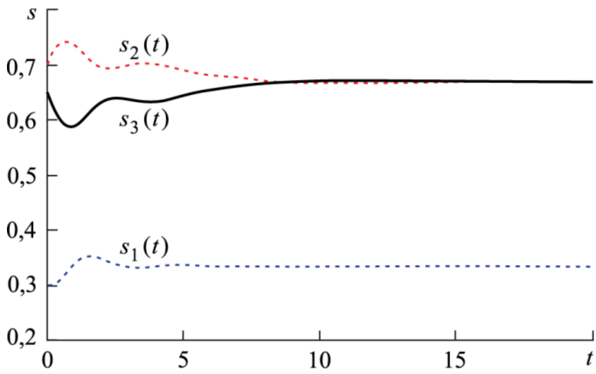

Рис. 4. Проекции орта $\mathbf{s}_0$:

$s_1(20) = 0,3333365$; $s_2(20) = 0,666597$; $s_3(20) = 0,666735$

Как следует из данных на рис. 3 и 4, а также конечных значений угловой скорости спутника и орта $\mathbf{s}_0$, под действием построенных стабилизирующих управлений u_1, u_2 за $t = 20$ с угловое вращение спутника останавливается с точностью до 10^{-5}, и он ориентируется в направлении заданного орта $\mathbf{r}_0$ с точностью до 10^{-3}.

Заключение. Таким образом, показана возможность решения задачи ориентации спутника в направлении заданного орта с помощью двух спарок гиродинов. Объединение гиродинов в спарку позволяет получать более простые уравнения гироскопической системы, удобные для исследования и применения различных методов построения управляющих воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. *Управление движением механических систем.* Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1985.
[2] Зубов В.И. *Лекции по теории управления*. Москва, Наука, 1975.
[3] Румянцев В.В., Озиранер А.С. *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных.* Москва, Наука, 1987.
[4] Гладун А.В. Стабилизация ориентации твердого тела с помощью гиродинов. *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины*, 2005, № 10, с. 32–38.
[5] Гладун А.В. Управление и стабилизация вращательного движения спутника с помощью двух гиродинов. *Механика твердого тела*, 2013, вып. 43, с. 151–162.
[6] Красовский Н.Н. *Теория управления движением*. Москва, Наука, 1968.

Статья поступила в редакцию 20.02.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Гладун А.В. Стабилизация ориентации спутника с помощью двух спарок гиродинов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 7.
http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-7-1637

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XLI Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства.
Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 января 2017 г.*

Гладун Алексей Владимирович — доцент кафедры естественнонаучных дисциплин, Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, г. Ульяновск. Область научных интересов: теоретическая механика, динамические системы, управление и стабилизация по части переменных.
e-mail: aleksygladun@gmail.com

Stabilizing the satellite orientation by means of two doubled gyrodynes

© A.V. Gladun

Ulyanovsk Institute of Civil Aviation, Ulyanovsk, 432071, Russia

The article examines the problem of stabilizing the orientation of the satellite carrying two doubled gyrodynes. We suggest a control setting algorithm for stabilizing the satellite orientation in two stages. At the first stage we construct a Lyapunov function, at the second stage the task is considered according to the linear approximation. The stabilization is achieved by selecting the eigenvalues which correspond to the matrix of the transformed system. The control depends on these eigenvalues like on the variables. Both imaginary and real parts of this matrix eigenvalues are adjusted so that the span of control should be minimized. The article demonstrates the results of the numerical simulation.

Keywords: *satellite, doubled gyrodynes, stabilization with respect to a part of variables, Lyapunov function, linear approximation*

REFERENCES

[1] Smirnov E.Ya., Pavlinov V.Yu., Scherbakov P.P., Yurkov A.V. *Upravlenie dvizheniem mekhanicheskikh system* [Controlling the motion of mechanical systems]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1985.

[2] Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on optimal control]. Moscow, Nauka Publ., 1975.

[3] Rumyantsev V.V., Oziraner A.S. *Ustoychivost i stabilizatsiya dvizheniya po otnosheniyu k chasti peremennykh* [Stability and stabilization of motion with respect to part of the variables]. Moscow, Nauka Publ., 1987.

[4] Gladun A.V. *Trudy Instituta prikladnoy matematiki i mehaniki NAN Ukrainy — Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine*, 2005, no. 10, pp. 32–38.

[5] Gladun A.V. *Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids,* 2013, vol. 43, pp. 151–162.

[6] Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow, Nauka Publ., 1968.

Gladun A.V., Assoc. Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences, Ulyanovsk Institute of Civil Aviation. Research interests include: theoretical mechanics, dynamical systems, control and stabilization with respect to a part of variables. e-mail: aleksygladun@gmail.com