

Механика горных лыж: резаный поворот без ангуляции

© С.Д. Леготин¹, А.А. Ривлин², В.И. Данилин²

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

² Учебный центр Федерации горнолыжного спорта и сноуборда России,
Москва, 115230, Россия

Рассмотрена задача создания модели движения системы лыжник — лыжи в процессе выполнения резаного, без бокового проскальзывания, горнолыжного поворота и естественной закантовки лыж в отсутствие ангуляции. Найдены условия для выполнения резаного поворота без ангуляции, накладывающие ограничения на крутизну склона, скорость и направление движения лыжника. Сформулирована основная задача динамики в виде системы дифференциальных уравнений, пошаговое интегрирование которой дает решение, позволяющее оценить траекторию, скорость и положение центра масс рассматриваемой системы, угол наклона лыжника и время движения по траектории. Созданная модель проиллюстрирована решениями задачи для двух частных случаев движения. Полученные результаты могут быть полезны тренерам и преподавателям, специализирующимся в горнолыжном туризме и спорте, а также разработчикам горнолыжного инвентаря.

Ключевые слова: биомеханика спорта, слаломная траектория, ангуляция, наклон лыжника, резаный поворот

Введение. Ранее, в работах [1–4], при рассмотрении математической модели прохождения горнолыжником спортивных трасс линию движения центра масс системы лыжник — лыжи вниз по склону принимали в виде простых математических функций — либо гармонической, либо в виде полинома n -й степени, что являлось математическим приближением реальной траектории движения центра масс. При этом, ограничившись лишь постулируемыми функциями, истинная траектория движения, учитывающая характер взаимодействия лыж со склоном, их закантовку, наклон лыжника и фазу поворота, в рассматриваемых работах не оценивалась. Очевидно, что задача нахождения траектории движения центра масс системы лыжник — лыжи при выполнении горнолыжного поворота является важной как с позиции правильного моделирования прохождения разнообразных спортивных трасс, так и с точки зрения корректного описания биомеханики самого горнолыжного поворота. Эта актуальная задача связана с созданием численной виртуальной модели процесса движения на горных лыжах.

В данной статье выполняется численная оценка движения системы лыжник — лыжи при выполнении резаного, без бокового проскальзывания, поворота. В качестве модели системы взято тело с

центром масс в точке C (рис. 1), части которого в неинерциальной системе отсчета, связанной с движущимся центром масс, перемещаются так медленно, что силами инерции этих элементов можно пренебречь. Сам поворот выполняется за счет естественной закатовки лыж, при которой отсутствует дополнительный угол закатовки за счет ангуляции.

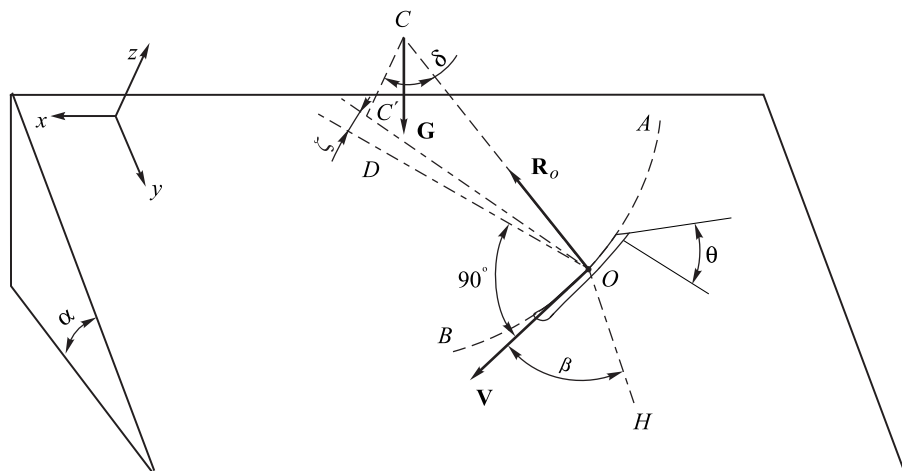


Рис. 1. Дуга AB резаного поворота на плоском склоне крутизной α :

\mathbf{G} — сила тяжести системы лыжник — лыжи, приложенный к центру масс C ; O — точка пересечения со склоном линии действия равнодействующей опорных реакций \mathbf{R}_o , в которой также располагается середина условной лыжи; OC — опорная линия; C' — нормальная проекция центра масс системы на склон; CC' и ось z — нормали к склону; \mathbf{V} — вектор скорости, вдоль которого направлена первая из тройки естественных осей — касательная ось τ ; OC' — проекция опорной линии на склон; OD — направление нормальной оси n , принадлежащей плоскости склона; ζ — угол осадки, обусловленный наличием силы трения скольжения как компонента опорной реакции [3]; OH и ось y — направления линий склона; α — угол склона, или угол наклона линии склона; δ — угол между опорной линией и нормалью к склону; θ — угол закатовки, или угол между плоскостью склона и скользящей поверхностью лыжи; β — угол движения, или угол между вектором скорости и линией ската

Модель системы лыжник — лыжи. Рассмотрим систему лыжник — лыжи с центром масс в точке C . Перейдя в неинерциальную систему отсчета, движущуюся вместе с центром масс, в соответствии с принципом Даламбера для уравнивания совокупности действующих в системе сил необходимо добавить силу инерции $\Phi = -m\mathbf{a}_C$, где \mathbf{a}_C — вектор ускорения центра масс. Характерные величины ускорений $a_C = |\mathbf{a}_C|$ в горнолыжном повороте имеют порядок величины ускорения свободного падения g . Вместе с тем в процессе ведения поворота лыжник относительно своего центра масс изменяет положения отдельных частей своего тела весьма плавно, медленно, стараясь не «сорвать» поворот дополнительными инерци-

онными нагрузками. Это означает, что в фазе ведения поворота относительные ускорения отдельных частей системы в выбранной неинерциальной системе существенно ниже величины a_C .

Будем считать, пренебрегая этими относительными инерционными составляющими системы сил, что в каждый момент времени механическая система представляет собой твердое тело, движение которого можно описать соответствующими уравнениями. Как следует из такого подхода, части указанной системы могут перемещаться относительно ее центра масс, но только со сравнительно небольшими относительными ускорениями, не внося свои относительные инерционные составляющие в расстановку сил в системе.

Рассмотрим силы, действующие на систему лыжник — лыжи (см. рис. 1). К ним относятся: сила тяжести $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, где масса системы включает массу лыжника и массу его снаряжения $m = m_{\text{лыжник}} + m_{\text{лыжи}}$; реакция опоры \mathbf{R}_O , включающая составляющую, нормальную к оси лыжи, и силу трения скольжения $\mathbf{F}_{\text{ск}}$, направленную против вектора скорости \mathbf{V} ; сила аэродинамического сопротивления $\mathbf{F}_{\text{сопр}}$, приложенная к центру аэродинамического давления (на рис. 1 не показаны). Составим уравнения движения системы (твердого тела), представляющие собой уравнение движения центра масс системы и уравнение вращательного движения вокруг центральной оси z_C :

$$m\mathbf{a}_C = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_O + \mathbf{F}_{\text{сопр}}, \quad (1)$$

$$J_{z_C}\varepsilon_{z_C} = M_{z_C}(\mathbf{R}_O) + M_{z_C}(\mathbf{F}_{\text{сопр}}), \quad (2)$$

где $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = d\omega_z/dt$ — угловое ускорение лыжника в фазе поворота.

Анализ задачи о движении твердого тела при его опоре на лед острым коньком [5], а также практика движений спортсменов показывают, что при повороте угловая скорость вращения горнолыжника вокруг нормальной к склону оси практически не меняется, сохраняясь вплоть до момента разгрузки при переходе в следующий поворот. С другой стороны, положение тела лыжника в повороте таково, что проекции центра аэродинамического давления и центра масс C на склон практически совпадают. Таким образом, в уравнении (2) можно положить второе слагаемое и левую часть равными нулю. Это означает, что момент равнодействующей силы реакции также равен нулю, т. е. сила \mathbf{R}_O лежит в нормальной к склону плоскости, содержащей точку C . Аналогично, отсутствие ускоренного вращения тела вокруг центральной касательной оси τ_C означает, что в рассматриваемых условиях линия действия опорной реакции \mathbf{R}_O проходит через центр масс C системы (см. рис. 1).

Учитывая, что направления CC' и оси z совпадают (см. рис. 1), проекции уравнения (1) на ортогональные оси (τ, n, z) запишем так:

$$m a_{C\tau} = m g \sin \alpha \cos \beta - R_O \sin \delta \sin \zeta - F_{\text{сопр}}, \quad (3)$$

$$m a_{Cn} = -m g \sin \alpha \sin \beta + R_O \sin \delta \cos \zeta, \quad (4)$$

$$m a_{Cz} = -m g \cos \alpha + R_O \cos \delta. \quad (5)$$

Считая перемещения и ускорения центра масс в нормальном к склону направлении CC' пренебрежимо малыми, $a_{Cz} \approx 0$, из (5) получаем $R_O = m g \cos \alpha / \cos \delta$. После подстановки этого выражения в уравнения (3) и (4) они примут вид

$$a_{C\tau} = g(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \sin \zeta) - \frac{F_{\text{сопр}}}{m}, \quad (6)$$

$$a_{Cn} = g(\operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cos \zeta - \sin \alpha \sin \beta). \quad (7)$$

Пусть радиус бокового выреза лыжи равен R . Закантованная лыжа для вступления в контакт со склоном по всей своей рабочей длине должна быть прогнута в середине весовой нагрузкой, действующей со стороны лыжника через его ботинки. Считаем, что жесткость лыжи на кручение достаточна, чтобы изгиб лыжи оставался плоским, при этом она контактирует со склоном своим внутренним к повороту кантом. При таком прогибе точки внутреннего канта перемещаются вдоль образующей цилиндрической поверхности радиуса R . Плоскость, касательная в точке O (см. рис. 1) к скользящей поверхности лыжи, образует нормальное сечение этой цилиндрической поверхности. Склон, в плоскости которого находится внутренний кант прогнутой лыжи, наклонен к нормальному сечению под углом θ закантовки лыжи. В соответствии с теоремой Менье [6] кривизна k_θ кривой, лежащей в косом сечении цилиндрической поверхности, определяется кривизной нормального сечения k и углом между плоскостями косого и нормального сечений этой цилиндрической поверхности, $k = k_\theta \cos \theta$. Поскольку радиус кривизны обратно пропорционален самой кривизне, линия контакта внутреннего канта лыжи имеет радиус кривизны ρ , определяемый известным выражением

$$\rho = R \cos \theta. \quad (8)$$

При выполнении современного резаного поворота на лыжах с боковым вырезом радиусом 13 м (слалом) либо 35 м (слалом-гигант) центр масс системы и поставленные на канты лыжи двигаются по траекториям с радиусами кривизны, различающимися на доли метра.

Поэтому для простоты будем считать, что центр масс системы лыжник — лыжи перемещается по линии с радиусом кривизны, определяемым по формуле (8), а поставленные под одними и теми же углами закантовки θ лыжи движутся без бокового проскальзывания. Это позволяет, не меняя рассмотренные выше силы, в схеме задачи вместо двух лыж ограничиться одной условной с тем же углом закантовки θ , поместив ее у опорной точки O (см. рис. 1). Учитывая, что нормальное ускорение определяется скоростью и радиусом кривизны траектории $a_{Cn} = V^2/\rho$, после подстановки (8) в уравнение (7) получаем

$$\frac{V^2}{Rg} = \cos \theta (\operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cos \zeta - \sin \alpha \sin \beta). \quad (9)$$

В горнолыжной терминологии под ангуляцией подразумевают увеличение угла закантовки лыж за счет характерного поперечного прогиба лыжником своего тела к центру поворота [7].

Рассмотрим частный случай, когда ангуляция отсутствует, и, следовательно, поворот осуществляется путем создания естественного угла закантовки лыж, соответствующего углу наклона опорной линии, или $\theta = \delta$. Такое равенство является условием отсутствия ангуляции. В этом случае, обозначив левую часть выражения (9) как

$$A = \frac{V^2}{Rg}, \quad (10)$$

из уравнения (9) находим

$$A = \sin \delta \cos \alpha \cos \zeta - \cos \delta \sin \alpha \sin \beta. \quad (11)$$

Примем последнее из допущений, считая, что трение скольжения незначительно и не вызывает существенного отклонения опорной линии от перпендикулярной к лыжам плоскости DOz (см. рис. 1). Здесь Oz — нормаль к склону, восстановленная из точки O . Тогда $\cos \zeta \approx 1$. Учтем также, что второе слагаемое в правой части выражения (3) есть не что иное, как величина силы трения скольжения $F_{\text{ск}}$. Тогда выражения (6), (11) примут вид

$$a_{C\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g \sin \alpha \cos \beta - \frac{F_{\text{сопр}} + F_{\text{ск}}}{m}, \quad (12)$$

$$A = \sin \delta \cos \alpha - \cos \delta \sin \alpha \sin \beta, \quad (13)$$

что позволяет, решив последнее тригонометрическое выражение, определить значение для функции $\delta(\alpha, \beta, A)$:

$$\cos \delta = \frac{\cos \alpha \sqrt{1 - A^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} - A \sin \alpha \sin \beta}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}. \quad (14)$$

Задача о нахождении скорости движения V и криволинейной координаты s центра масс как функций от времени t путем численного интегрирования дифференциального уравнения движения (12) решалась в работах [1–4, 8]. В них начальные условия и сила аэродинамического сопротивления $F_{\text{сопр}}$ выражаются как

$$t_0 = 0; \quad s(t_0) = s_0; \quad V(t_0) = V_0, \quad (15)$$

$$F_{\text{сопр}} = 0,5 \rho_v \mu V^2, \quad (16)$$

где ρ_v , μ — плотность воздуха и аэродинамический коэффициент соответственно.

Определим траекторию движения центра масс C .

Расчет движения центра масс системы лыжник — лыжи. При перемещении точки вдоль криволинейной координаты s с текущей кривизной ρ на величину ds как радиус кривизны, так и перпендикулярный к нему вектор скорости поворачиваются на угол $d\beta = ds/\rho$. Учитывая (8), а также условие отсутствия ангуляции, запишем изменение угла движения:

$$d\beta = \frac{ds}{R \cos \delta} = \frac{V dt}{R \cos \delta}. \quad (17)$$

Установим связь между временем t и углом движения β . Из выражения (17) с учетом (14) следует

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{R \cos \alpha \sqrt{1 - A^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} - A \sin \alpha \sin \beta}{V(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta)}. \quad (18)$$

Воспользовавшись (17), выразим элементарные перемещения точки по естественной оси и декартовым координатам склона через изменение угла движения:

$$\begin{aligned} ds &= R \cos \delta d\beta, \\ dx &= ds \sin \beta = R \cos \delta \sin \beta d\beta, \\ dy &= ds \cos \beta = R \cos \delta \cos \beta d\beta. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом выражения (14) из (19) получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\beta} &= R \frac{\cos \alpha \sqrt{1 - A^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} - A \sin \alpha \sin \beta}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}, \\ \frac{dx}{d\beta} &= R \frac{\cos \alpha \sqrt{1 - A^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} - A \sin \alpha \sin \beta}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} \sin \beta, \\ \frac{dy}{d\beta} &= R \frac{\cos \alpha \sqrt{1 - A^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} - A \sin \alpha \sin \beta}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} \cos \beta. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (10) следует, что величина A зависит от радиуса бокового выреза лыжи и скорости движения. Как уже было отмечено, определение скорости движения связано с решением дифференциального уравнения (12), которое приведем к такому виду, когда, как и в (20), переменной величиной является угол движения β :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = g \sin \alpha \cos \beta - \frac{F_{\text{сопр}} + F_{\text{ск}}}{m}. \quad (21)$$

Используя (18), из (21) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\beta} &= \frac{R \cos \alpha \sqrt{1 - A^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} - A \sin \alpha \sin \beta}{V(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta)} \times \\ &\times \left(g \sin \alpha \cos \beta - \frac{F_{\text{сопр}} + F_{\text{ск}}}{m} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Время движения t , скорость V , криволинейная координата s и координаты точек траектории движения x , y как функции от значения угла движения β могут быть найдены с учетом выражения (10) путем численного интегрирования уравнений (18), (20), (22) при условии, что искомые функции удовлетворяют начальным условиям, соответствующим началу отсчета движения лыжника в дуге поворота:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0; \quad t(\beta_0) = t_0 = 0; \quad s(\beta_0) = s_0 = 0; \\ x(\beta_0) &= x_0 = 0; \quad y(\beta_0) = y_0 = 0; \quad V(\beta_0) = V_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Задача Коши (18), (20), (22), (23) решается численно путем пошагового интегрирования, определяя на каждом шаге значения A , t , V , s , x и y .

Критические скорости движения. Следует отметить, что решение задачи о нахождении законов движения в условиях резаного поворота возможно не для всех значений начальных условий (23).

Из анализа движения лыжника в повороте при отсутствии ангуляции можно выделить два критических угла наклона опорной линии:

– угол θ закантовки лыж, а также угол δ наклона опорной линии принимают свои минимальные, близкие к нулю значения

$$\theta_{\min} = \delta_{\min} \approx 0; \quad (24)$$

– углы θ и δ достигают своих предельных значений, обусловленных геометрическими ограничениями, связанными с необходимостью отсутствия бокового касания склона при наклоне лыжника в повороте вплоть до достижения значений $\theta_{\text{пред}} = \delta_{\text{пред}}$.

Из выражения (13) с учетом (10) при условии (24) находим оценку минимальной скорости V_{\min} , обеспечивающую движение в соответствии с принятой моделью:

$$V_{\min} = \sqrt{Rg \sin \alpha (-\sin \beta)}. \quad (25)$$

Примем, что все возможные направления движения описываются диапазоном углов $-90^\circ \leq \beta < 270^\circ$. Тогда знак «минус» под радикалом в уравнении (25) означает, что ограничения на минимальную скорость будут иметь место только в верхней части циркуляционной дуги поворота, где синус β отрицателен: $-90^\circ \leq \beta < 0$; $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Также это означает, что угол β накладывает ограничение на возможные скорости выполнения резаного поворота в соответствии с (24), т. е. $V \geq V_{\min}$. В диапазоне движения под углами $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ (нижняя часть циркуляционной дуги) ограничений на минимальную скорость нет. Например, на склоне крутизной $\alpha = 10^\circ$ при движении на слаломных лыжах с боковым вырезом радиуса $R = 13$ м резаное выполнение «циркуляции» (поворота на целый оборот) возможно, если в верхней точке траектории ($\beta = -90^\circ$, или $\beta = 270^\circ$) скорость будет не ниже 8,4 м/с или 30,4 км/ч, а при использовании лыж для гигантского слалома с боковым вырезом радиусом $R = 35$ м — 13,9 м/с или 50 км/ч соответственно.

Условие на ограничение предельного угла $\theta_{\text{пред}} = \delta_{\text{пред}}$ приводит к оценке предельной скорости выполнения поворота $V_{\text{пред}}$. Так, из (13) с учетом (10) определяем

$$\begin{aligned} V_{\text{пред}} &= \sqrt{Rg(\sin \delta_{\text{пред}} \cos \alpha - \cos \delta_{\text{пред}} \sin \alpha \sin \beta)} = \\ &= \sqrt{Rg \sin \delta_{\text{пред}} \cos \alpha \left(1 - \frac{\text{tg} \alpha}{\text{tg} \delta_{\text{пред}}} \sin \beta\right)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Если принять значения предельных углов равными $\theta_{\text{пред}} = \delta_{\text{пред}} = 60^\circ$, то на рассмотренном склоне значения предельной скорости в зависимости от угла движения β будут меняться в пределах 9,9...10,9 м/с или 35,6...39,4 км/ч для слаломных и 16,2...17,9 м/с или 58...64,4 км/ч для лыж слалома-гиганта.

Таким образом, формулируем выявленные ограничения на скорость движения: $V_{\text{min}} \leq V \leq V_{\text{пред}}$.

Примеры решения задачи о движении без ангуляции при резаном повороте. Для численного решения полной системы уравнений (18), (20), (22), (23) необходимо в (22) описывать силы сопротивления движению, корректное определение которых является самостоятельной исследовательской задачей [4, 8, 9]. Для иллюстрации выбранного в настоящей статье подхода численной оценки резаного поворота в условиях отсутствия ангуляции рассмотрим два простейших случая, не требующие корректного описания значений сил $F_{\text{сопр}}$ и $F_{\text{ск}}$. Первый из них — движение с постоянной скоростью, второй — отсутствие сопротивления движению.

При движении с постоянной скоростью задача сводится к интегрированию уравнений (18), (20) с учетом скорости $V(\beta) = V_0$ в (23). Результаты расчета показаны на рис. 2–4. При этом были заданы следующие значения исходных данных: радиус бокового выреза $R = 12$ м, угол склона $\alpha = 10^\circ$, скорость $V(\beta) = V_0 = \text{const} = 8$ м/с = 28,8 км/ч,

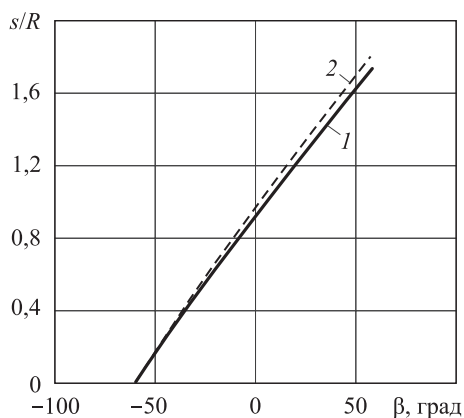


Рис. 2. Зависимость длины дуги поворота s , в долях R , от угла движения β при $V = \text{const}$:

1 — центр масс; 2 — опорная точка

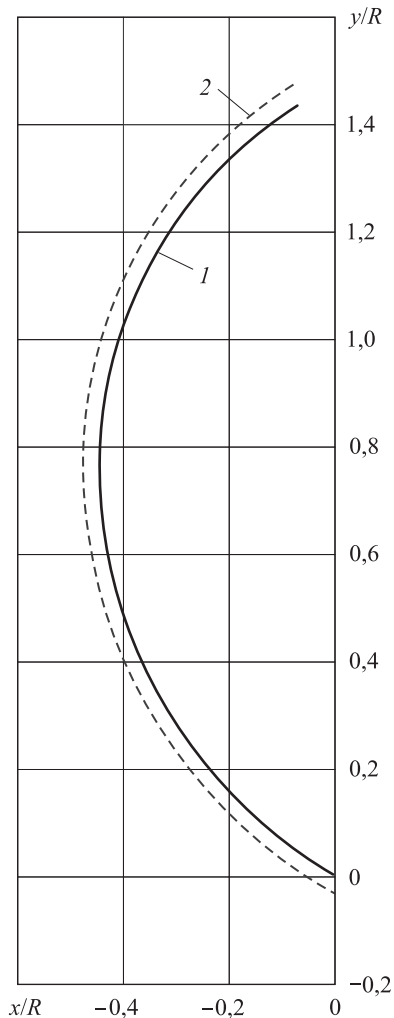


Рис. 3. Траектория движения при $V = \text{const}$ центра масс 1 и опорной точки 2

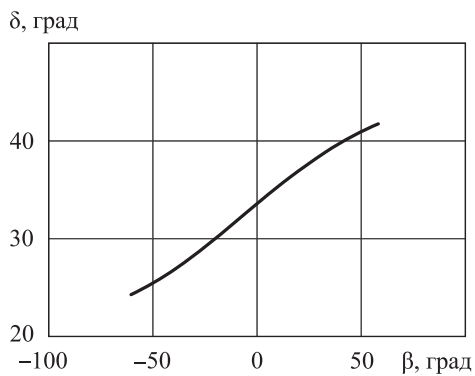


Рис. 4. Зависимость угла наклона δ опорной линии от угла движения β при $V = \text{const}$

начальный $\beta_0 = -60^\circ$ и конечный $\beta_k = 60^\circ$ углы движения. Сплошные линии на рис. 2 и 3 соответствуют движению центра масс (точки C), пунктирные — движению опорной точки (точки O), положение которой определяют по траектории точки C , длине опорной линии, принятой здесь равной 0,8 м, и рассчитанному углу наклона опорной линии $\delta(\beta)$. Положительное направление оси x на рис. 4 — направо по горизонтали, оси y — по вертикали вверх.

В отсутствие сил сопротивления $F_{\text{сопр}}$ и $F_{\text{ск}}$ система уравнений имеет полный вид (18), (20), (22), (23). На рис. 5–9 показаны результаты численного решения задачи для таких же исходных данных, как в уже рассмотренном примере. Различия сводятся к заданию только начальной скорости движения по траектории $V(\beta_0) = V_0 = 8 \text{ м/с} = 28,8 \text{ км/ч}$, которая затем меняется в соответствии с (22).

Сравнивая рис. 5–7 и рис. 2–4, следует отметить, что в отсутствие диссипативных сил поворот выполняется по траектории с большей кривизной, длина дуги снижена, при этом увеличен угол наклона опорной линии, траектория опорной точки сильнее смещена от траектории центра масс, что связано с возрастанием скорости движения в повороте (см. рис. 8).

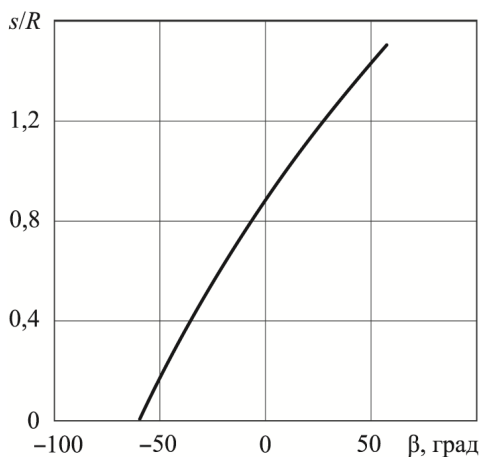


Рис. 5. Зависимость длины дуги поворота s центра масс, в долях R , от угла движения β , в отсутствие сопротивления движению

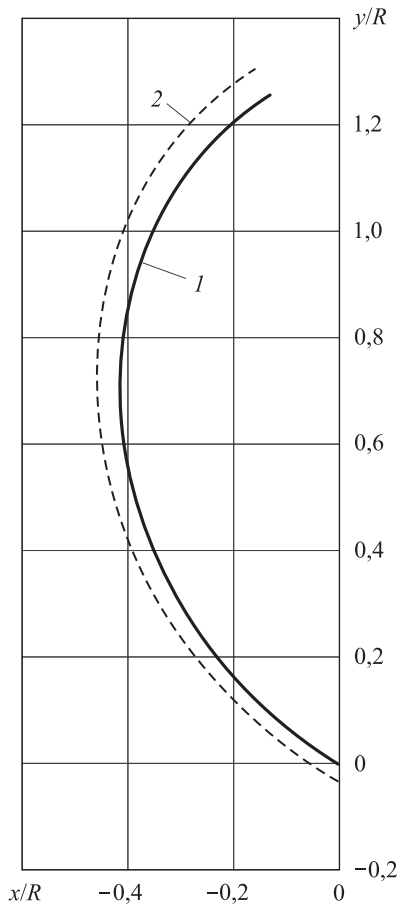


Рис. 6. Траектория движения центра масс 1 и опорной точки 2 в отсутствие сопротивления

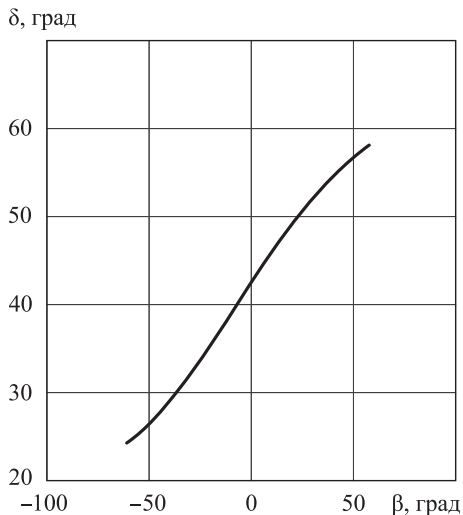


Рис. 7. Угол наклона δ опорной линии в отсутствие сопротивления движению

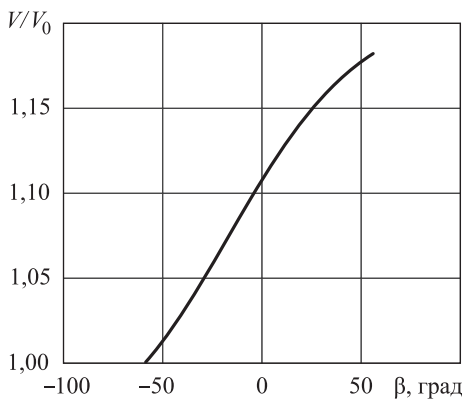


Рис. 8. Относительная скорость центра масс $V(\beta)/V_0$ в отсутствие сопротивления движению

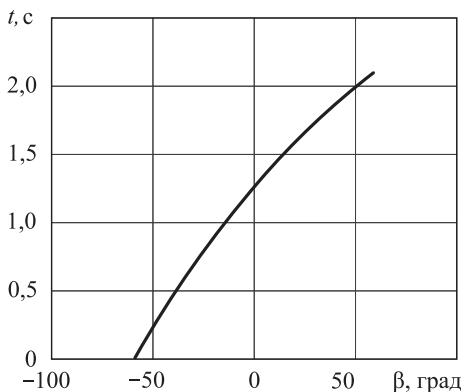


Рис. 9. Время движения t по траектории в отсутствие сопротивления

Заключение. Рассмотрено движение горнолыжника в резаном повороте на горнолыжном склоне без ангуляции — способа увеличения угла закантовки лыж. Обоснована модель системы лыжник — лыжи в фазе ведения дуги поворота в виде тела, относительные инерционные силы частей которого пренебрежимо малы. Это позволяет для описания предложенной модели использовать уравнения движения твердого тела.

Анализ особенностей резаного поворота позволил определить основные параметры движения системы лыжник — лыжи и характеристики самой системы, влияющие на выполняемый поворот. Сформулирована система дифференциальных уравнений движения, учитывающая ее выявленные параметры и дающая возможность вычислять как изменения скорости движения и положения центра масс при резаном повороте, так и траекторию его движения и угол наклона лыжника в повороте. Найдены условия, при которых можно выполнять резаный поворот без ангуляции, связывающие скорость движения, угол склона и направление движения по склону. Решение задачи проиллюстрировано примерами движений с постоянной скоростью, а также в условиях пренебрежения силой трения скольжения и аэродинамическим сопротивлением.

Предложенная методика позволяет количественно оценивать резаный поворот в различных условиях движения, ее можно использовать в работе тренеров по горнолыжной подготовке, а также при разработке моделей лыж и спортивных тренажеров.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рудаков Р.Н., Лисовский А.Ф., Гайсина А.Р., Хитрюк В.В. Оптимизация слаломной траектории на криволинейном склоне. *Российский журнал биомеханики*, 2003, т. 7, № 2, с. 53–61.
- [2] Рудаков Р.Н., Гайсина А.Р., Лисовский А.Ф., Разумов А.А. Оптимизация траектории центра масс горнолыжника в специальном слаломе, слаломе-гиганте и супергиганте. *Российский журнал биомеханики*, 2004, т. 8, № 2, с. 12–18.
- [3] Рудаков Р.Н., Разумов А.А., Лисовский А.Ф., Подгаец Р.М. Оптимизация слаломной траектории с учетом наклона лыжника. *Российский журнал биомеханики*, 2007, т. 11, № 1, с. 85–90.
- [4] Рудаков Р.Н. Динамика спортивных снарядов и спортсменов в сопротивляющейся среде. *Российский журнал биомеханики*, 2007, т. 11, № 4, с. 61–83.
- [5] Бутенин Н.В. *Введение в аналитическую механику*. Москва, Наука, 1971, с. 180–184.
- [6] Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии*. Москва, Физматгиз, 1958, с. 163–165.
- [7] Данилин В.И. *Энциклопедический словарь горнолыжника и сноубордиста*. Москва, Альт-Консул, 2007.
- [8] Rudakov R.N., Nyashin Yu.I., Podgayets A.R., Lisovski A.F., Miheeva S.A. The influence of aerodynamic forces on the movement of sportsmen and sport balls. *Russian Journal of Biomechanics*, 2001, vol. 5, no. 2, pp. 83–103.

- [9] Рудаков Р.Н., Галёв П.П., Василенко С.В., Шульгин П.В. Косвенное определение аэродинамического сопротивления при скоростном спуске на лыжах. *Российский журнал биомеханики*, 2000, т. 4, № 2, с. 31–35.

Статья поступила в редакцию 29.03.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Леготин С.Д., Ривлин А.А., Данилин В.И. Механика горных лыж: резаный поворот без ангуляции. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 7. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-7-1632>



Леготин Сергей Дмитриевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: legotin.msiu@gmail.com



Ривлин Александр Александрович — преподаватель АНОДО Учебный Центр ФГССР. e-mail: alriv@inbox.ru



Данилин Виктор Иванович — директор АНОДО Учебный Центр ФГССР, Москва, Россия, инструктор ФГСС России высшей категории, председатель аттестационной комиссии Учебного центра. e-mail: ski-center@yandex.ru

Mechanics of alpine skiing: carve turn without angulation

© S.D. Legotin¹, A.A. Rivlin², V.I. Danilin²

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

²Training center of the Russian alpine ski and snowboard federation,
Moscow, 115230, Russia

The article deals with the problem of modelling the motion of the skier–skis system when the skier is making a carve turn without lateral slippage and naturally edging the skis with no angulation. We found out the conditions for making a carve turn without angulation, which impose constraints upon the steepness of the slope, the speed and movement direction of the skier. The basic dynamic problem represents the differential equation system. Step-by-step integration of this system solves the problem and allows us to measure the trajectory, speed and center-of-gravity position of the skier–skis system as well as the skier’s inclination and travel time along the trajectory. To illustrate this developed model we showed problem solving examples for two particular cases of motion. The results obtained can be of great help to trainers and teachers specializing in ski tourism and sport, as well as to the developers of ski equipment.

Keywords: *biomechanics of sport, slalom path, angulation, skier’s inclination, carve turn*

REFERENCES

- [1] Rudakov R.N., Lisovskiy A.F., Gaysina A.R., Khitryuk V.V. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki — Russian Journal of Biomechanics*, 2003, vol. 7, no. 2, pp. 53–61.
- [2] Rudakov R.N., Gaysina A.R., Lisovskiy A.F., Razumov A.A. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki — Russian Journal of Biomechanics*, 2004, vol. 8, no. 2, pp. 12–18.
- [3] Rudakov R.N., Razumov A.A., Lisovskiy A.F., Podgaets R.M. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki — Russian Journal of Biomechanics*, 2007, vol. 11, no. 1, pp. 85–90.
- [4] Rudakov R.N. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki — Russian Journal of Biomechanics*, 2007, vol. 11, no. 4, pp. 61–83.
- [5] Butenin N.V. *Vvedeniye v analiticheskuyu mekhaniku* [Introduction to analytical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1971, pp. 180–184.
- [6] Norden A.P. *Kratkiy kurs differentsialnoy geometrii* [Short course of differential geometry]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958, pp. 163–165.
- [7] Danilin V.I. *Entsiklopedicheskiy slovar gornolyzhnika i snoubordista* [Encyclopaedical dictionary of alpine skier and snowboarder]. Moscow, Alt-Consul Publ., 2007.
- [8] Rudakov R.N., Nyashin Yu.I., Podgayets A.R., Lisovskiy A.F., Miheeva S.A. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki — Russian Journal of Biomechanics*, 2001, vol. 5, no. 2, pp. 83–103.
- [9] Rudakov R.N., Galev P.P., Vasilenko S.V., Shulgin P.V. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki — Russian Journal of Biomechanics*, 2000, vol. 4, no. 2, pp. 31–35.

Legotin S.D., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of the Theoretical Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: legotin.msiu@gmail.com

Rivlin A.A., teacher of the Russian Alpine Ski and Snowboard Federation Training Center, Moscow, Russia. e-mail: alriv@inbox.ru

Danilin V.I., Head of the Training center of the Russian Alpine Ski and Snowboard Federation, Moscow, Russia. e-mail: ski-center@yandex.ru