УДК 532.546:517.958 DOI 10.18698/2308-6033-2017-6-1624

Фильтрация жидкости в неоднородном слое с коэффициентом фильтрации, изменяющимся по квадратичному закону

© О.Д. Алгазин, А.В. Копаев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена модельная задача фильтрации жидкости в неоднородном слое, коэффициент фильтрации которого убывает с глубиной как квадрат расстояния до дна слоя. Представлены полученные точные решения соответствующих краевых задач для двумерного и трехмерного случаев. Приведены примеры решения задач фильтрации под точечной плотиной и каскадом из двух точечных плотин в неоднородном слое с водоупором, выраженные в элементарных функциях. Описаны источник и вертикальная скважина в трехмерном неоднородном слое. Потенциал скорости в этих случаях записывается в виде интегралов от элементарных функций. Решения данных краевых задач можно применить и при рассмотрении стационарных электрических и тепловых полей в неоднородных средах, в которых диэлектрическая проницаемость и коэффициент теплопроводности изменяются по квадратичному закону.

Ключевые слова: *установившаяся фильтрация жидкости, неоднородный слой, коэффициент установившейся фильтрации, уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, задача Дирихле*

Введение. Скорость установившегося течения фильтрующейся жидкости в неоднородной пористой среде, согласно закону Дарси, имеет вид [1, 2]

$$\boldsymbol{V}(x, y) = K(x, y)\operatorname{grad} u(x, y),$$

где $x \in \mathbb{R}$ в случае плоской задачи или $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ в случае пространственной задачи; y — вертикальная координата; $K(x, y)$ — коэффициент фильтрации; функция $u(x, y)$ называется потенциалом (обобщенным) и связана с давлением жидкости $P(x, y)$ формулой

$$u(x, y) = -\big(P(x, y)/\rho g + y\big),$$

где ρ — плотность фильтрующейся жидкости; g — ускорение свободного падения.

Если в области течения жидкости расположены источники (стоки) с плотностью $f(x, y)$, то

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V}(x, y) = f(x, y)$$

и для потенциала получается уравнение

$$\operatorname{div}\big(K(x,y)\operatorname{grad}u(x,y)\big)=f(x,y). \tag{1}$$

В слоистых средах коэффициент фильтрации является кусочно-постоянной функцией. В неоднородных средах коэффициент фильтрации является функцией координат. Фильтрации в неоднородных пористых средах посвящено большое количество работ [1]. При этом каждый закон изменения коэффициента фильтрации требует своих методов решения краевых задач. Если $K=y^2$, то фильтрация в полуплоскости $y<-1$ [2]. Но и при выбранном законе изменения коэффициента фильтрации каждая область также требует своих методов решения.

В настоящей статье рассмотрим фильтрацию жидкости в бесконечном слое $0<y<a$ в случае, когда коэффициент непрерывно убывает с глубиной по квадратичному закону.

Постановка краевой задачи. Предположим, что коэффициент фильтрации зависит только от вертикальной координаты y по квадратичному закону $K(x,y)=y^2$. Уравнение (1) можно записать в виде

$$\operatorname{div}(y^2\operatorname{grad}u(x,y))=f(x,y),\ 0<y<a. \tag{2}$$

В случае отсутствия источников (стоков) получаем однородное уравнение

$$\operatorname{div}(y^2\operatorname{grad}u(x,y))=0,\ 0<y<a. \tag{3}$$

На нижней границе $y=0$ коэффициент фильтрации обращается в нуль, и поэтому будем считать, что жидкость через нижнюю границу не течет и, следовательно, нормальная составляющая скорости течения жидкости равна нулю:

$$\lim_{y\to+0} y^2u_y(x,y)=0. \tag{4}$$

Поставим также более общее граничное условие

$$\lim_{y\to+0} y^2u_y(x,y)=\varphi(x). \tag{5}$$

На верхней границе $y=a$ будем считать известным значение потенциала

$$u(x,a)=\psi(x). \tag{6}$$

Решение краевой задачи. Решим краевую задачу (2), (5), (6). Уравнение (2) запишем в виде

$$\operatorname{div}(y^2\operatorname{grad}u)=y^2\Delta u+2yu_y=y\Delta(yu)=f(x,y),\ 0<y<a,$$

где Δ — оператор Лапласа. Вводя новую неизвестную функцию $v(x,y) = yu(x,y)$, получим для нее уравнение Пуассона

$$\Delta v(x,y) = \tilde{f}(x,y), \quad 0 < y < a, \tag{7}$$

где $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)/y$.

В случае отсутствия источников (стоков) $\tilde{f}(x,y) \equiv 0$ получаем однородное уравнение (Лапласа)

$$\Delta v(x,y) = 0, \quad 0 < y < a. \tag{8}$$

Для уравнения Пуассона (7) рассмотрим задачу Дирихле

$$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \tag{9}$$

$$v(x,a) = \tilde{\psi}(x). \tag{10}$$

Ее решение для $x \in \mathbb{R}^n$ дано в работе [3]. Приведем это решение для случая однородного уравнения (8). Если $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ — ограниченные функции, то

$$v(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(t) K_n(x-t,y)\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\psi}(t) L_n(x-t,y)\,dt,$$

где

$$K_n(x,y) = F_t^{-1}\left[k_n\right](x,y)\,,\; k_n\left(|t|,y\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(|t|(a-y)\right)}{\operatorname{sh}\left(a|t|\right)}\,,\; t \in \mathbb{R}^n,$$

$$L_n(x,y) = F_t^{-1}\left[l_n\right](x,y),\; l_n\left(|t|,y\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(|t|\,y\right)}{\operatorname{sh}\left(a|t|\right)}\,,\; t \in \mathbb{R}^n,$$

F_t^{-1} — обратное преобразование Фурье по переменным t.

Можно показать, что $v(x,y)$ и $v_y(x,y)$ ограничены в слое $0 < y < a$.

Если $x \in \mathbb{R}$, то

$$v(x,y) = \frac{1}{2a}\sin(\pi y/a)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}(t)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right) - \cos(\pi y/a)}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2a}\sin(\pi y/a)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}(t)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right) + \cos(\pi y/a)}\,dt.$$

Если $x \in \mathbb{R}^2$, то

$$v(x,y)=\frac{\sin(\pi y/a)}{2a^2}\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{\varphi}(t)dt\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)d\xi}{\left(\operatorname{ch}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)-\cos(\pi y/a)\right)^2}+$$

$$+\frac{\sin(\pi y/a)}{2a^2}\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{\psi}(t)dt\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)d\xi}{\left(\operatorname{ch}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)+\cos(\pi y/a)\right)^2}.$$

Функция $u(x,y)=v(x,y)/y$ является решением уравнения (3). Поскольку в силу ограниченности $v_y(x,y)$

$$\varphi(x)=\lim_{y\to+0}y^2u_y(x,y)=\lim_{y\to+0}yv_y(x,y)-v(x,y)=-v(x,0)=-\tilde{\varphi}(x),$$

и

$$v(x,a)=a\psi(x)=\tilde{\psi}(x),$$

то решением краевой задачи (3), (4), (6) будет функция $u(x,y)=$ $=v(x,y)/y$, где $v(x,y)$ — решение задачи Дирихле (8), (9), (10) с $\tilde{\varphi}(x)=-\varphi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)=a\psi(x)$.

Если $x\in\mathbb{R}$, то

$$u(x,y)=-\frac{1}{2ay}\sin(\pi y/a)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)-\cos(\pi y/a)}dt+$$

$$+\frac{1}{2y}\sin(\pi y/a)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(t)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)+\cos(\pi y/a)}dt.$$

Если $x\in\mathbb{R}^2$, то

$$u(x,y)=-\frac{\sin(\pi y/a)}{2a^2y}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)dt\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)d\xi}{(\operatorname{ch}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)-\cos(\pi y/a))^2}+$$

$$+\frac{\sin(\pi y/a)}{2ay}\int_{\mathbb{R}^2}\psi(t)dt\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)d\xi}{(\operatorname{ch}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)+\cos(\pi y/a))^2},$$

где $t=(t_1,t_2),\ dt=dt_1dt_2,\ |x-t|=\sqrt{(x_1-t_1)^2+(x_2-t_2)^2}$.

Решения неоднородного уравнения рассмотрим далее.

Фильтрация под точечной плотиной в неоднородном слое с водоупором. Предположим, что точечная плотина и границы верхнего и нижнего бьефов расположены на прямой $y=a>0$. Фильтрация жидкости (воды) вызывается разностью давлений P_1 и P_2 и, соответственно, потенциалов ψ_1 и ψ_2 на верхнем и нижнем бьефах. Коэффициент фильтрации $K(x,y)=y^2$ обращается в нуль на прямой $y = 0$, которая является водоупором. Получаем краевую задачу для потенциала $u(x, y)$ фильтрационного течения под плотиной:

$$\operatorname{div}(y^2 \operatorname{grad} u(x,y)) = 0, \ -\infty < x < \infty, \ \ 0 < y < a, \tag{11}$$

$$\lim_{y \to +0} y^2 u_y(x,y) = 0, \ \ -\infty < x < \infty, \tag{12}$$

$$u(x,a) = \psi_1, \ x < 0, \ \ u(x,a) = \psi_2, \ \ x > 0. \tag{13}$$

Переходя к функции $v(x,y) = y\,u(x,y)$, получаем для нее задачу Дирихле:

$$\Delta\, v(x,y) = 0, \ -\infty < x < \infty, \ 0 < y < a,$$

$$v(x,0) = 0, \ \ -\infty < x < \infty,$$

$$v(x,a) = a\,\psi_1, \ \ x < 0, \ \ v(x,a) = a\,\psi_2(x), \ x > 0.$$

Решением задачи (11)–(13) будет функция

$$u(x,y) = \frac{v(x,y)}{y} = \frac{\psi_1}{2y}\sin(\pi y/a)\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dt}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)+\cos(\pi y/a)} +$$

$$+\frac{\psi_2}{2y}\sin(\pi y/a)\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dt}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)+\cos(\pi y/a)} =$$

$$= \frac{a(\psi_2-\psi_1)}{\pi y}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\pi y/2a)\operatorname{th}(\pi x/2a)\right) + \frac{\psi_1+\psi_2}{2}\,.$$

Ее график и линии равного потенциала для $a = \pi$, $\psi_1 = -2$, $\psi_2 = -1$ представлены на рис. 1, линии тока — на рис. 2.

В случае однородного грунта ($K = 1$) потенциал фильтрационного течения жидкости под точечной плотиной с водоупором является решением смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta\tilde{u}(x,y) = 0, \ -\infty < x < \infty, \ 0 < y < a,$$

$$\tilde{u}(x,a) = \psi_1(x), \ x < 0, \ \tilde{u}(x,a) = \psi_2(x), \ x > 0,$$

$$\tilde{u}_y(x,0) = 0, \ -\infty < x < \infty.$$

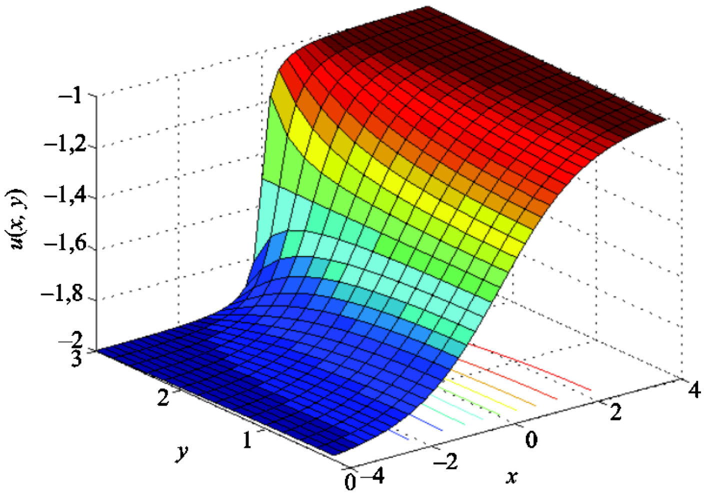

Рис. 1. Потенциал и линии равного потенциала фильтрационного течения под точечной плотиной в неоднородном слое $0 < y < \pi$, $\psi_1 = -2$, $\psi_2 = -1$ с коэффициентом фильтрации $K = y^2$

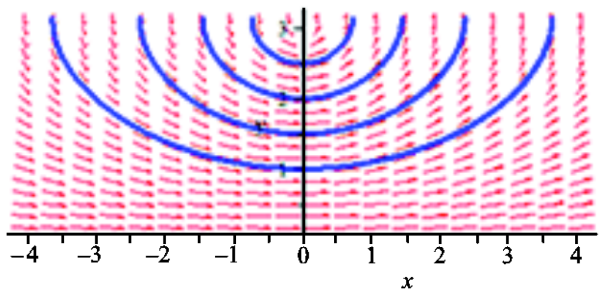

Рис. 2. Линии тока фильтрационного течения под точечной плотиной в неоднородном слое $0 < y < \pi$, $\psi_1 = -2$, $\psi_2 = -1$ с коэффициентом фильтрации $K = y^2$

Ее решение [4]:

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}(\pi x / 2a)}{\cos(\pi y / 2a)}\right) + \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}.$$

Приведем для сравнения (рис. 3) линии тока фильтрационных течений под точечной плотиной в однородном ($K = 1$) и неоднородном ($K = y^2$) слоях.

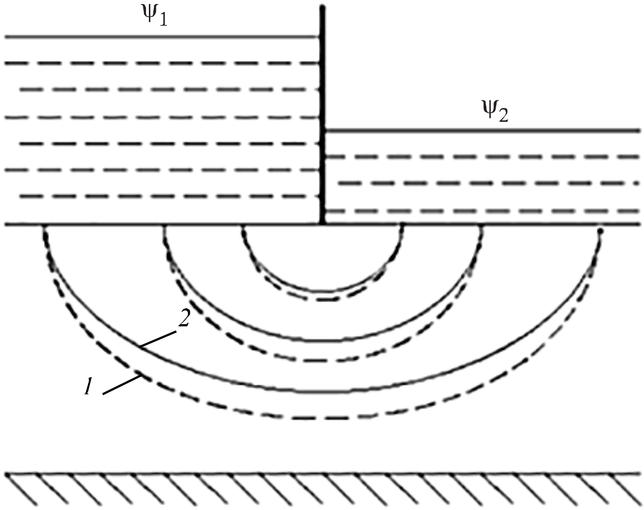

Рис. 3. Линии тока фильтрационного течения под точечной плотиной в слое $0 < y < \pi$, $\psi_1 = -2$, $\psi_2 = -1$ с коэффициентом фильтрации $K = 1$ (*1*) и $K = y^2$ (*2*)

Фильтрация под каскадом из двух точечных плотин. В этом случае имеем следующую краевую задачу:

$$\operatorname{div}(y^2 \operatorname{grad} u(x, y)) = 0,\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < a, \tag{14}$$

$$\lim_{y \to +0} y^2 u_y(x, y) = 0,\ -\infty < x < \infty, \tag{15}$$

$$u(x, a) = \psi_1,\ x < -b;\ u(x, a) = \psi_2,\ -b < x < b;\ u(x, a) = \psi_3,\ x > b. \tag{16}$$

Переходя к функции $v(x, y) = y u(x, y)$, получаем для нее задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta\, v(x, y) = 0,\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < a,$$

$$v(x, 0) = 0,\ -\infty < x < \infty,$$

$$v(x, a) = a\psi_1,\ x < -b;\quad v(x, a) = a\psi_2(x),\ -b < x < b;$$

$$v(x, a) = a\psi_3(x),\ x > b.$$

Решением задачи (14)–(16) будет функция

$$u(x, y) = \frac{v(x, y)}{y} = \frac{\psi_1}{2y} \sin(\pi y / a) \int_{-\infty}^{-b} \frac{dt}{\operatorname{ch}\left(\pi(x - t)/a\right) + \cos\left(\pi y / a\right)} +$$

$$+\frac{\psi_2}{2y}\sin(\pi y/a)\int_{-b}^{b}\frac{dt}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)+\cos(\pi y/a)}+$$

$$+\frac{\psi_3}{2y}\sin(\pi y/a)\int_{b}^{\infty}\frac{dt}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)+\cos(\pi y/a)}=$$

$$=\frac{a(\psi_2-\psi_1)}{\pi y}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\pi y/2a)\operatorname{th}(\pi(x+b)/2a)\right)+$$

$$+\frac{a(\psi_3-\psi_2)}{\pi y}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\pi y/2a)\operatorname{th}(\pi(x-b)/2a)\right)+\frac{\psi_1+\psi_3}{2}.$$

График этой функции и линии равного потенциала для $a=\pi$, $\psi_1=-2$, $\psi_2=-1$ представлены на рис. 4, линии тока — на рис. 5.

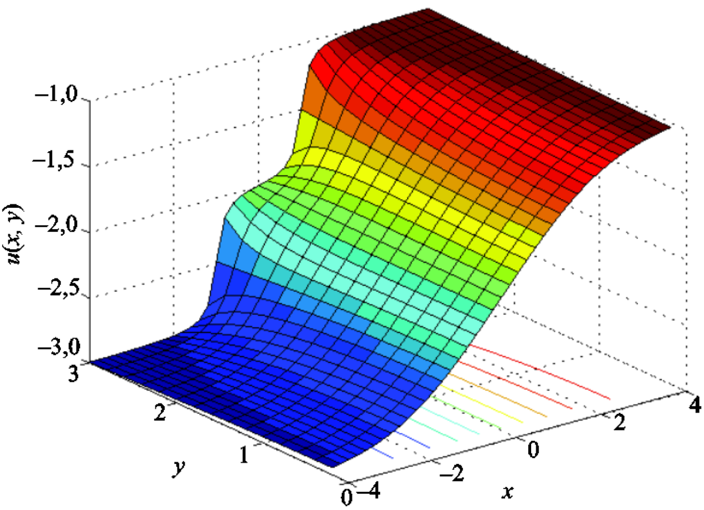

Рис. 4. Потенциал и линии равного потенциала фильтрационного течения под каскадом из двух точечных плотин в неоднородном слое $0<y<\pi$, $b=1$, $\psi_1=-3$, $\psi_2=-2$, $\psi_3=-1$ с коэффициентом фильтрации $K=y^2$

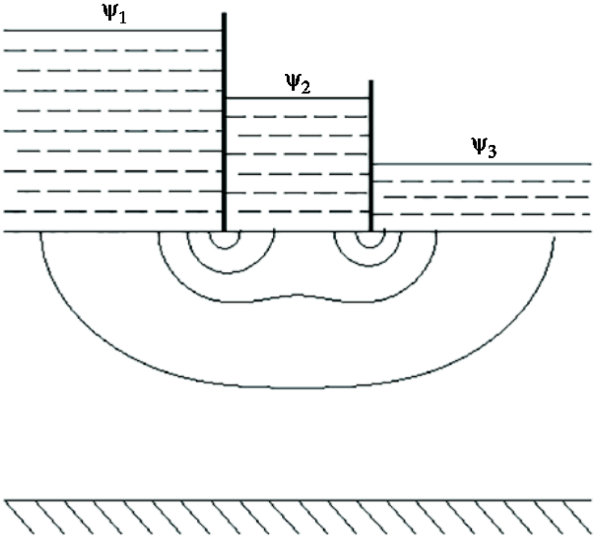

Рис. 5. Линии тока фильтрационного течения под каскадом из двух точечных плотин в неоднородном слое $0 < y < \pi$, $b = 1$, $\psi_1 = -3$, $\psi_2 = -2$, $\psi_3 = -1$ с коэффициентом фильтрации $K = y^2$

Источник (сток) в трехмерном неоднородном слое. Рассмотрим задачу, в которой между двумя плоскостями находится источник (сток) интенсивности Q. Нижняя плоскость изолирована, а верхняя есть плоскость равного потенциала [1, 5]. В нашем неоднородном случае имеем задачу

$$\operatorname{div}(y^2 \operatorname{grad} u(x, y)) = Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \tag{17}$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < a,\ 0 < y_0 < a,$$

$$\lim_{y \to +0} y^2 u_y(x, y) = 0, \quad u(x, a) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{18}$$

Переходя к функции $v(x, y) = y u(x, y)$, получаем для нее задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta v(x, y) = \frac{Q}{y_0}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

$$x \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < a,\ 0 < y_0 < a,$$

$$v(x, 0) = 0,\ v(x, a) = 0,\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Решением этой задачи является функция Грина [3]:

$$v(x,y)=\frac{Q}{4\pi a y_0}\int_0^{\infty}\left\{\frac{\exp(-\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos\left(\pi(y-y_0)/a\right)}{\operatorname{ch}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos\left(\pi(y-y_0)/a\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\exp(-\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos\left(\pi(y+y_0)/a\right)}{\operatorname{ch}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos\left(\pi(y+y_0)/a\right)}\right\}d\xi.$$

Решением задачи (17)–(18) будет функция

$$u(x,y)=\frac{v(x,y)}{y}.$$

Эта функция зависит только от $r=|x-x_0|$ и y, т. е. поверхности равного потенциала обладают осевой симметрией. Сечения поверхностей равного потенциала плоскостью, проходящей через ось y, для значений параметров $Q=1,\ a=\pi,\ x_0=0,\ y_0=\pi/2$ представлены на рис. 6. Сами поверхности можно получить вращением этих кривых вокруг оси y.

Для сравнения приведем решение этой задачи для однородного слоя (K = 1), рассмотренное в работе [6]:

$$\Delta v(x,y)=Q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0),$$

$$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ \ 0<y<a,\ \ 0<y_0<a,$$

$$v_y(x,0)=0,\ \ v(x,a)=0,\ x\in\mathbb{R}^2.$$

$$v(x,y)=-\frac{Q}{2\pi a}\int_0^{\infty}\left\{\frac{\operatorname{sh}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos\left(\pi(y+y_0)/2a\right)}{\operatorname{ch}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos\left(\pi(y+y_0)/a\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sh}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos\left(\pi(y-y_0)/2a\right)}{\operatorname{ch}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos\left(\pi(y-y_0)/a\right)}\right\}d\xi.$$

Сечения поверхностей равного потенциала плоскостью, проходящей через ось y, для тех же значений параметров представлены на рис. 7. Сами поверхности равного потенциала получаются вращением этих линий вокруг оси y.

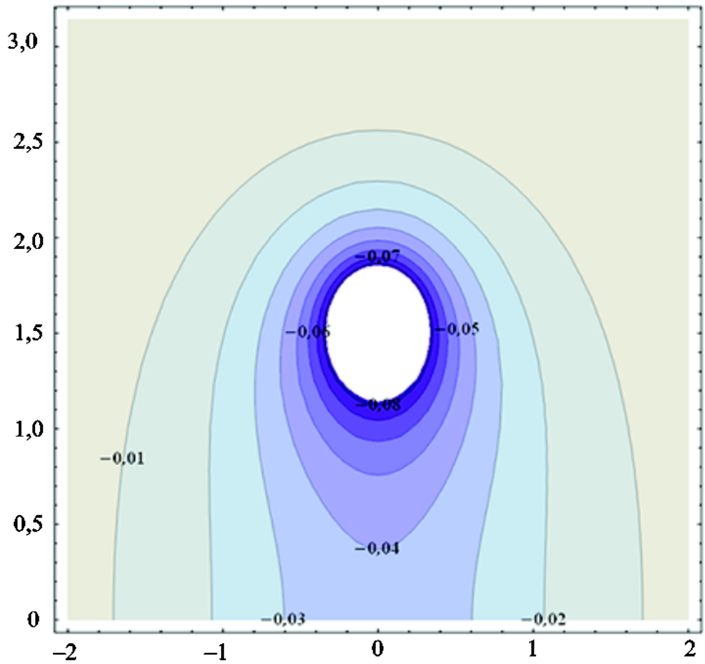

Рис. 6. Сечения поверхностей равного потенциала источника в неоднородном слое с коэффициентом фильтрации $K = y^2$ плоскостями, проходящими через ось y

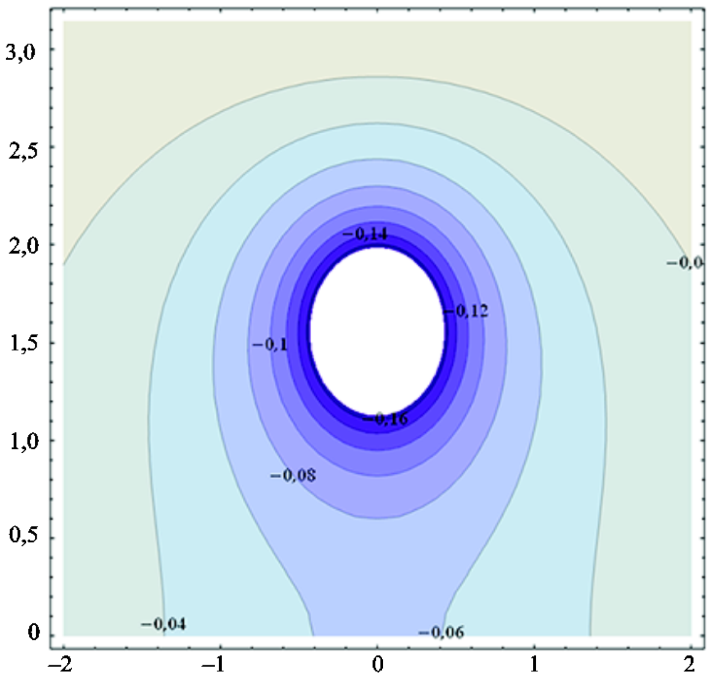

Рис. 7. Сечения поверхностей равного потенциала источника в однородном слое с коэффициентом фильтрации K = 1 плоскостями, проходящими через ось y

Вертикальная скважина в неоднородном слое. В неоднородном слое, нижняя плоскость которого изолирована, а верхняя есть плоскость равного потенциала, расположена вертикальная скважина длины l. Будем моделировать ее отрезком оси y длины l, каждая точка которого является стоком, так что сток всего отрезка равен $Q = ql$. Обозначая через $H(y)$ единичную функцию Хевисайда, запишем соответствующую краевую задачу:

$$\operatorname{div}(y^2 \operatorname{grad} u(x,y)) = -q\big(H(y-a+l) - H(y-a)\big)\delta(x), \tag{19}$$

$$x \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < a,\ 0 < l < a,$$

$$\lim_{y\to+0} y^2 u_y(x,y) = 0, \quad u(x,a) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{20}$$

Переходя к функции $v(x,y) = yu(x,y)$, получаем задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta v(x,y) = -\frac{q}{y}\big(H(y-a+l) - H(y-a)\big)\delta(x),$$

$$x \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < a,\ 0 < l < a,$$

$$v(x,0) = 0,\ v(x,a) = 0,\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Ее решение (см. [3]):

$$v(x,y) = -\frac{q}{4\pi a}\int_{a-l}^{a}\frac{dt}{t}\int_0^\infty\left\{\frac{\exp(-\pi|x|\operatorname{ch}(\xi)/a) - \cos\big(\pi(y-t)/a\big)}{\operatorname{ch}(\pi|x|\operatorname{ch}(\xi)/a) - \cos\big(\pi(y-t)/a\big)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\exp(-\pi|x|\operatorname{ch}(\xi)/a) - \cos\big(\pi(y+t)/a\big)}{\operatorname{ch}(\pi|x|\operatorname{ch}(\xi)/a) - \cos\big(\pi(y+t)/a\big)}\right\}d\xi.$$

Решением задачи (19)–(20) будет функция

$$u(x,y) = \frac{v(x,y)}{y}.$$

На рис. 8 приведены сечения поверхностей равного потенциала плоскостью, проходящей через ось y, для значений параметров $q = 1$, $a = \pi$, $l = \pi/2$. Сами поверхности получаются вращением этих кривых вокруг оси y.

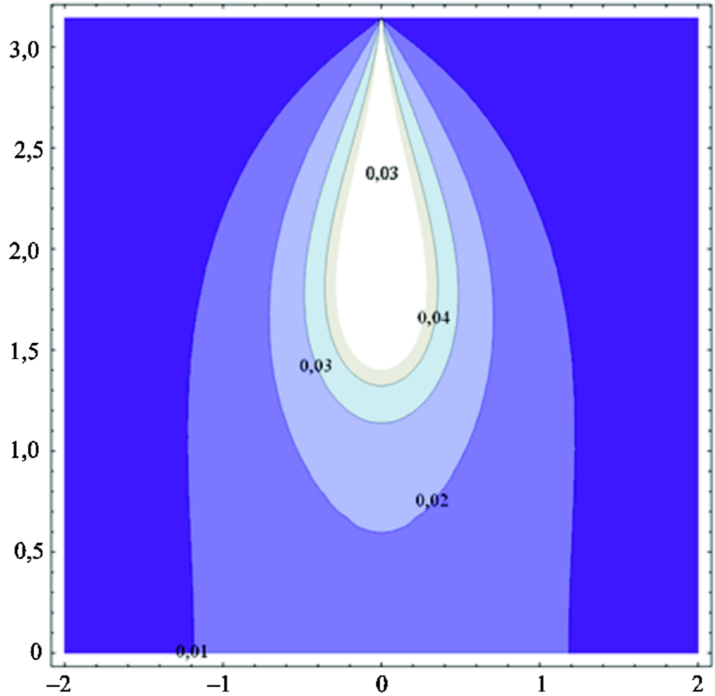

Рис. 8. Сечения поверхностей равного потенциала вертикальной скважины в неоднородном слое с коэффициентом фильтрации $K = y^2$ плоскостями, проходящими через ось y

Заключение. Рассмотрена модельная задача фильтрации в неоднородном слое (в плоскопараллельном и пространственном случаях) с коэффициентом фильтрации $K(x, y) = y^2$, где y — вертикальная координата. Задача решена аналитически. Это позволило смоделировать стационарные процессы фильтрации жидкости под точечной плотиной и каскадом из двух плотин в полосе с водоупором, а в пространственном случае — фильтрацию жидкости к вертикальной скважине. Потенциал скорости при этом записывается в виде интеграла от элементарных функций, а в рассмотренных примерах плоских задач эти интегралы вычисляются в элементарных функциях. Предложенный метод позволил найти аналитическое решение рассматриваемой задачи, а в некоторых примерах эти решения содержат только элементарные функции.

Предложенный метод решения краевых задач можно применить и при рассмотрении стационарных электрических и тепловых полей в неоднородных средах, в которых, соответственно, диэлектрическая проницаемость и коэффициент теплопроводности изменяются по квадратичному закону.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Полубаринова-Кочина П.Я. *Теория движения грунтовых вод*. Москва, Наука, 1977, 664 с.
[2] Радыгин В.М., Голубева О.В. *Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники*. Москва, Высшая школа, 1983, 160 с.
[3] Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое. *Математика и математическое моделирование*, 2015, № 4, с. 41–53. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943
[4] Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 1, с. 3–13.
DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13
[5] Bateman H. *Partial differential equations of mathematical physics*. New York, Dover Publ., 1944, 522 p.
[6] Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи Дирихле — Неймана для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2016, № 3, с. 42–56. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-42-56

Статья поступила в редакцию 01.03.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Алгазин О.Д., Копаев А.В. Фильтрация жидкости в неоднородном слое с коэффициентом фильтрации, изменяющимся по квадратичному закону. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 6.
http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-6-1624

Алгазин Олег Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: краевые задачи для аналитических функций и дифференцированных уравнений. Автором опубликовано более 20 научных трудов. e-mail: mopi66@yandex.ru

Копаев Анатолий Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: краевые задачи для аналитических функций и дифференцированных уравнений.
e-mail: 5736234@mail.ru

Fluid filtration in an inhomogeneous porous layer with permeability coefficient that varies according to a quadratic law

© O.D. Algazin, A.V. Kopaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper considers a model problem of fluid filtration in an inhomogeneous porous layer with the permeability coefficient which decreases with depth as the square of the distance to the bottom. We obtained exact solutions of the corresponding boundary value problems for two-dimensional and three-dimensional cases. As an example of applying the obtained formulas we give the solutions of filtering problems under the spot dam and a cascade of two spot dams in an inhomogeneous layer with aquiclude, the solutions being expressed in elementary functions. Moreover, we examined the source and the vertical well in the three-dimensional inhomogeneous layer. The velocity potential in these cases is recorded in the form of integrals of elementary functions. The solutions of the boundary value problems discussed in this article can be applied when considering the steady electrical and thermal fields in inhomogeneous media, in which, respectively, the dielectric constant and coefficient of thermal conductivity change according to a quadratic law.

Keywords: *fluid filtration, inhomogeneous porous layer, permeability coefficient, Laplace equation, Poisson equation, Dirichlet problem*

REFERENCES

[1] Polubarinova-Kochina P.Ya. *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* [Theory of ground water movement]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 664 p.

[2] Radygin V.M., Golubeva O.V. *Primenenie funktsiy kompleksnogo peremennogo v zadachakh fiziki i techniki* [Application of functions of complex variable in physics and engineering problems]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1983, 160 p.

[3] Algazin O.D., Kopaev A.V. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie — Mathematics and Mathematical Modelling*, 2015, no. 4, pp. 41–53. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943

[4] Algazin O.D., Kopaev A.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Series Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2015, no. 1, pp. 3–13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13

[5] Bateman H. *Partial differential equations of mathematical physics*. New York, Dover Publ., 1944, p. 522.

[6] Algazin O.D., Kopaev A.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Series Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2016, no. 3, pp. 42–56. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-42-56

Algazin O.D., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: mopi66@yandex.ru

Kopaev A.V., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of the Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: 5736234@mail.ru