

## Оптимальный биэллиптический переход между компланарными эллиптическими орбитами

© С.А. Заборский<sup>1</sup>, Е.В. Кирилук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ПАО «РКК «Энергия», г. Королёв, Московская обл., 141070, Россия

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105055, Россия

*Исследовано аналитическое решение задачи биэллиптического трехимпульсного перехода между круговыми орбитами и аналитическое решение для задачи биэллиптического перехода между соосными эллиптическими орбитами, представленные в ряде литературных источников. В настоящей статье предпринята попытка обобщить существующие результаты для случая перехода между двумя заданными точками, принадлежащими граничным несоосным эллиптическим орбитам, при заданных величинах радиусов апогея переходных орбит. Приведен анализ полученной зависимости для величины суммарного импульсного приращения скорости, необходимого для осуществления биэллиптического маневра. Рассмотрен предельный случай, в котором биэллиптический переход вырождается в бипараболический. Установлены зависимости параметров переходных орбит и условия, при которых трехимпульсный переход может иметь преимущества перед двухимпульсным.*

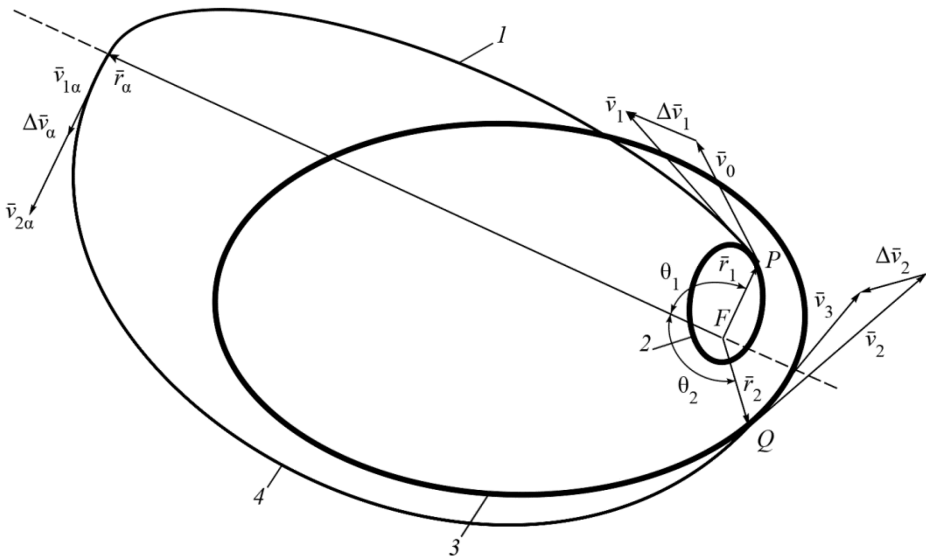
**Ключевые слова:** оптимальный маневр, компланарный переход, межорбитальный переход, бипараболический маневр, биэллиптический маневр, аналитическое решение, импульсный маневр

**Введение.** Проблеме решения задач импульсного перехода между заданными орбитами посвящено большое количество трудов, самой известной из них является работа В. Гомана [1], посвященная переходу между круговыми орбитами. Наиболее полный обзор библиографии, посвященной задачам межорбитальных переходов, приведен в статье [2]. Необходимые условия оптимальности двухимпульсных маневров приведены в монографии Р. Беттина [3]. В работе Д.Ф. Лоудена [4] проанализированы направления оптимальных импульсов при двухимпульсных маневрах. В одной из статей Дж.М. Хорнера [5] приведено оптимальное решение задачи двухимпульсного маневра для компланарных несоосных орбит при нефиксированном угле перелета. Развивая результат, представленный в работе [5], Дж.М. Хорнер показал в статье [6], что если переход осуществляется из определенной точки начальной орбиты, то апогей переходной орбиты должен касаться апогея конечной орбиты.

В работе [7] исследован компланарный биэллиптический маневр между круговыми орбитами, в работе [8] проведено сравнение двухимпульсных траекторий типа Гомана и трехимпульсных биэллиптических траекторий применительно к задаче перелета между коаксиальными орбитами с одинаково направленными осями.

В настоящей статье исследован биэллиптический переход при заданной величине апогея переходных орбит с использованием данных статьи [6], позволивших обобщить результаты, представленные в работах [7, 8], для переходов между двумя определенными точками на граничных несоосных эллиптических орбитах.

**Постановка задачи.** Заданы геометрические характеристики начальной и целевой эллиптических орбит: эксцентриситет и радиус апогея. На начальной орбите истинной аномалией  $\vartheta_0$  задана точка  $P$ , которой соответствуют радиус-вектор  $\bar{r}_1$  и вектор скорости  $\bar{v}_0$ . На целевой орбите истинной аномалией  $\vartheta_3$  задана точка  $Q$ , которой соответствуют радиус-вектор  $\bar{r}_2$  и вектор скорости  $\bar{v}_3$ . Начальная и целевая орбиты лежат в одной плоскости (т. е. векторы  $\bar{v}_0, \bar{v}_3, \bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  компланарны). Траектория перелета состоит из двух переходных орбит с совпадающими апогеями, величина радиусов  $r_\alpha$  которых задана. Приложенный в точке  $P$  импульс  $\Delta\bar{v}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_0$  формирует 1-ю переходную орбиту. В апогее 1-й переходной орбиты прикладывается такой касательный импульс  $\Delta\bar{v}_\alpha = \bar{v}_{2\alpha} - \bar{v}_{1\alpha}$ , чтобы 2-я переходная орбита проходила через точку  $Q$ . Суммарный импульс  $\|\Delta\bar{v}_1\| + \|\Delta\bar{v}_\alpha\|$  перелета на 2-ю переходную орбиту должен быть при этом оптимальным (минимальным). Импульс  $\Delta\bar{v}_2 = \bar{v}_3 - \bar{v}_2$  в точке  $Q$  2-й переходной орбиты изменяет модуль и направление вектора скорости для получения требуемого  $\bar{v}_3$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема биэллиптического перехода:

точка  $F$  — основной фокус, соответствующий положению притягивающего центра; 1 — 1-я переходная орбита; 2 — начальная орбита; 3 — целевая орбита; 4 — 2-я переходная орбита

Важно отметить, что углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  между точками приложения импульсов скорости (между векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_\alpha$ ,  $\vec{r}_\alpha$  и  $\vec{r}_2$  соответственно) не являются фиксированными, т. е. направление вектора  $\vec{r}_\alpha$  не задано, а векторы  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{v}_3$ ,  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  не являются фиксированными в инерциальном пространстве. Таким образом, оси апсид начальной и целевой эллиптических орбит, на которых расположены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, могут вращаться в инерциальном пространстве.

Задача состоит в выборе таких двух переходных орбит с фиксированным радиусом апогея  $r_\alpha$  и таких направлений приложения импульсов (направлений вектора тяги), характеризующихся углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 2), чтобы суммарное импульсное приращение скорости

$$\Delta v_{\text{III}\Sigma} = \|\Delta \vec{v}_1\| + \|\Delta \vec{v}_\alpha\| + \|\Delta \vec{v}_2\| \quad (1)$$

было минимальным.

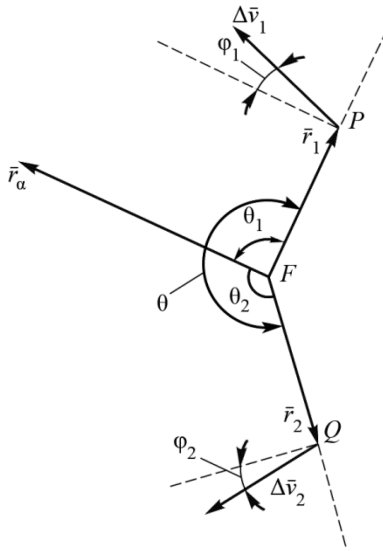


Рис. 2. Схема направлений приложения импульсов скорости

**Решение задачи биэллиптического перехода.** Импульс  $\Delta v_\alpha$  в апогее 1-й переходной орбиты должен быть касательным, чтобы сформировать апогей 2-й переходной орбиты. Его величина составит

$$\Delta v_\alpha = v_{2\alpha} - v_{1\alpha}, \quad (2)$$

где  $v_{1\alpha} = \sqrt{\mu p_1} / r_\alpha$ ,  $v_{2\alpha} = \sqrt{\mu p_2} / r_\alpha$ .

Импульс  $\Delta \bar{v}_1$  должен быть «разгонным», т. е. должно выполняться условие  $\cos \varphi_1 > 0$ . Проанализировав результаты, приведенные в работах [4] (уравнение (6.23)) и [9] (уравнения (35) и (43)), можно записать выражение для оптимальной величины импульса  $\Delta v_1$  в виде

$$\Delta v_1 = v_{1\alpha} + v_{1H} - \sqrt{v_{0r}^2 + (v_{0\theta} + v_{1H\alpha})^2}, \quad (3)$$

где нижний индекс  $H$  соответствует параметрам гомановского перехода

$$v_{1H} = \sqrt{\mu p_{1H}} / r_1, \quad v_{1H\alpha} = \sqrt{\mu p_{1H}} / r_\alpha, \quad p_{1H} = 2r_1 r_\alpha / (r_1 + r_\alpha).$$

Импульс  $\Delta \bar{v}_2$  должен быть «тормозным», т. е. должно выполняться условие  $\cos \varphi_2 < 0$ . Проанализировав результаты, приведенные в работах [4] и [9], можно записать выражение для оптимальной величины импульса  $\Delta v_2$  аналогично выражению (3) в следующем виде (где нижний индекс  $3$  соответствует параметрам в точке  $Q$ ):

$$\Delta v_2 = v_{2H} - v_{2\alpha} - \sqrt{v_{3r}^2 + (v_{3\theta} - v_{2H\alpha})^2}, \quad (4)$$

где  $v_{2H} = \sqrt{\mu p_{2H}} / r_2$ ,  $v_{2H\alpha} = \sqrt{\mu p_{2H}} / r_\alpha$ ,  $p_{2H} = 2r_2 r_\alpha / (r_2 + r_\alpha)$ .

Суммируя выражения (2)–(4), получаем величину оптимального импульсного приращения скорости при осуществлении биэллиптического перелета между несоосными эллиптическими орбитами при фиксированной величине радиусов апогея переходных орбит  $r_\alpha$ :

$$\Delta v_{\text{III}\Sigma} = v_{1H} - \sqrt{v_{0r}^2 + (v_{0\theta} + v_{1H\alpha})^2} + v_{2H} - \sqrt{v_{3r}^2 + (v_{3\theta} - v_{2H\alpha})^2}. \quad (5)$$

Отметим, что в полученное выражение (5) не входят ни величины фокальных параметров переходных орбит, ни величины угловых дальностей между приложениями импульсов, ни значения углов ориентации векторов приращения скорости. Однако соотношения для них можно получить, используя теорию базис-вектора Д.Ф. Лоудэна [4]. Указанные параметры вычисляются по представленным ниже формулам (6)–(9), вывод которых подробно описан в работе [9]:

$$p_1 = p_{1H} \left( \frac{r_\alpha \cos \varphi_1 - r_1}{r_\alpha - r_1 \cos \varphi_1} \right)^2, \quad p_2 = p_{2H} \left( \frac{r_2 - r_\alpha \cos \varphi_2}{r_\alpha - r_2 \cos \varphi_2} \right)^2; \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} = \frac{r_\alpha \cos \varphi_1 - r_1}{(r_\alpha + r_1) \sin \varphi_1}, \quad \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} = \frac{r_2 - r_\alpha \cos \varphi_2}{(r_\alpha + r_2) \sin \varphi_2}, \quad (7)$$

где

$$\sin \varphi_1 = \frac{v_{0r}}{\sqrt{v_{0r}^2 + (v_{0\theta} + v_{1H\alpha})^2}}, \quad \sin \varphi_2 = -\frac{v_{3r}}{\sqrt{v_{3r}^2 + (v_{3\theta} - v_{2H\alpha})^2}}; \quad (8)$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{v_{0\theta} + v_{1H\alpha}}{\sqrt{v_{0r}^2 + (v_{0\theta} + v_{1H\alpha})^2}}, \quad \cos \varphi_2 = -\frac{v_{3\theta} - v_{2H\alpha}}{\sqrt{v_{3r}^2 + (v_{3\theta} - v_{2H\alpha})^2}}. \quad (9)$$

**Анализ результатов.** Трехимпульсный переход между точками на эллиптических орбитах оптимален в зависимости от величины отношения  $r_{3\alpha}/r_\alpha$  (где  $r_{3\alpha}$  — радиус апогея целевой орбиты) и истинных аномалий граничных точек  $\vartheta_0, \vartheta_3$ . Проанализируем, при каких условиях трехимпульсный переход будет энергетически выгоднее двухимпульсного.

В частном случае, когда радиус апогея переходных орбит  $r_\alpha$  равен радиусу апогея целевой орбиты  $r_{3\alpha}$ , биэллиптический переход вырождается в двухимпульсный, для которого  $\Delta v_2 = 0$ , 2-я переходная орбита совпадает с конечной и суммарное импульсное приращение скорости составляет [5]

$$\Delta v_{III\Sigma} \Big|_{r_\alpha=r_{3\alpha}} = \Delta v_{II\Sigma\alpha} = v_{2\alpha} + v_{1H} - \sqrt{v_{0r}^2 + (v_{0\theta} + v_{1H\alpha})^2}. \quad (10)$$

Тогда, если выполняется условие

$$\left( r_\alpha^2 \frac{\partial \Delta v_{III\Sigma}}{\partial r_\alpha} \right) \Big|_{r_\alpha=r_{3\alpha}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \left[ \frac{\sqrt{r_1}}{(1+r_1/r_{3\alpha})^{3/2}} \left( 1 + \cos \varphi_1 \left( \frac{r_1}{r_{3\alpha}} + 2 \right) \right) + \frac{\sqrt{r_2}}{(1+r_1/r_{3\alpha})^{3/2}} \left( 1 + \cos \varphi_2 \left( \frac{r_2}{r_{3\alpha}} + 2 \right) \right) \right] < 0, \quad (11)$$

означающее, что с увеличением радиуса апогея  $r_\alpha$  (при  $\cos \varphi_2 < 0$ ) величина суммарного импульса  $\Delta v_{III\Sigma}$  должна уменьшаться, при  $r_\alpha > r_{3\alpha}$  биэллиптический перелет энергетически выгоднее двухимпульсного.

Исследование  $\min_{r_\alpha \in (r_{3\alpha}, \infty)} \Delta v_{III\Sigma}$  для произвольных граничных орбит представляет собой сложную задачу, решенную только для круговых [7] и коаксиальных [8] граничных орбит. Для круговых граничных орбит условию (11) соответствует  $r_2/r_1 > 15,58$  для соотношения их радиусов [7].

Рассмотрим еще один частный случай. При стремлении радиуса апогея переходных орбит к бесконечности ( $r_\alpha \rightarrow \infty$ ) получаем:

$$\begin{aligned} v_{1H\alpha} &= v_{2H\alpha} = 0, \\ v_{1H} &= \sqrt{2\mu/r_1}, \\ v_{2H} &= \sqrt{2\mu/r_2}, \end{aligned}$$

т. е. переходные орбиты становятся параболическими, и биэллиптический переход вырождается в бипараболический. Суммарное импульсное приращение скорости при бипараболическом переходе составит

$$\Delta v_{\infty\Sigma} = \Delta v_{\text{III}\Sigma} \Big|_{r_\alpha \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1}} - v_0 + \sqrt{\frac{2\mu}{r_2}} - v_3. \quad (12)$$

Обозначим углы наклона вектора скорости к местному горизонту в соответствующих  $i$ -х точках  $\gamma_i$ . Тогда из выражений (6)–(9) с учетом принятого обозначения, также следует, что при  $r_\alpha \rightarrow \infty$

$$p_1 \Big|_{r_\alpha \rightarrow \infty} = 2r_1 \cos^2 \gamma_0, \quad \text{tg} \frac{\theta_1}{2} \Big|_{r_\alpha \rightarrow \infty} = \text{ctg} \gamma_1 = \text{ctg} \gamma_0; \quad (13)$$

$$p_2 \Big|_{r_\alpha \rightarrow \infty} = 2r_2 \cos^2 \gamma_3, \quad \text{tg} \frac{\theta_2}{2} \Big|_{r_\alpha \rightarrow \infty} = \text{ctg} \gamma_2 = \text{ctg} \gamma_3. \quad (14)$$

Следовательно, биэллиптический переход является котангенциальным, т. е. осуществляется импульсами, направленными вдоль векторов скорости в точках их приложения, при этом угловая дальность между точками приложения импульсов не кратна  $\pi$ .

Определим условие, описывающее 2-ю границу оптимальности трехимпульсного решения задачи. Суммарное импульсное приращение скорости при двухимпульсном перелете между точками на эллиптических орбитах составляет [5]

$$\Delta v_{\text{II}\Sigma} = \Delta v_{\text{III}\Sigma} \Big|_{\Delta v_\alpha = 0} = \sqrt{v_{3r}^2 + (v_{3\theta} + v_{1H\theta})^2} - \sqrt{v_{0r}^2 + (v_{0\theta} + v_{2H\theta})^2}. \quad (15)$$

Здесь  $v_{1H\theta} = \sqrt{\mu p_H}/r_1$ ,  $v_{2H\theta} = \sqrt{\mu p_H}/r_2$ ,  $p_H = 2r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$ .

Если  $\Delta v_{\infty\Sigma} = \Delta v_{\text{II}\Sigma}$  и выполняется условие

$$\frac{\partial \Delta v_{\text{III}\Sigma}}{\partial r_\alpha} r_\alpha^2 \Big|_{r_\alpha \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \left( \sqrt{r_1} (1 + 2 \cos \theta_1) + \sqrt{r_2} (1 - 2 \cos \theta_2) \right) < 0, \quad (16)$$

где угловые дальности между точками приращения импульсов рассчитываются по формулам  $\cos \theta_0 = v_{0\theta} / \sqrt{v_{0r}^2 + v_{0\theta}^2}$ ;  $\cos \theta_3 = v_{3\theta} / \sqrt{v_{3r}^2 + v_{3\theta}^2}$ , то существуют  $r_\alpha < \infty$ , при которых биэллиптический перелет энергетически выгоднее двухимпульсного. Условию (16) для случаев круговых граничных орбит соответствует соотношение  $r_2/r_1 > 11,94$  [7].

Из приведенного анализа следует, что область оптимальности трехимпульсного решения описывают условия (11) и (16), не зависящие от величины  $r_\alpha$ . Выполнение этих условий зависит от истинных аномалий граничных точек и величины радиуса апогея целевой орбиты. Если условие (16) не выполняется, двухимпульсный переход потребует меньшего суммарного приращения скорости, чем биэллиптический переход. Если же условие (16) выполняется, однако при этом не выполняется условие (11), то преимущество одного типа перехода над другим зависит от величины  $r_\alpha$ , и всегда может быть задан такой радиус  $r_\alpha < \infty$ , при котором трехимпульсный переход будет предпочтительнее двухимпульсного. При одновременном выполнении условий (11) и (16) трехимпульсный переход будет энергетически выгоднее двухимпульсного вне зависимости от значения  $r_\alpha$  (если  $r_\alpha > r_{3\alpha}$ ).

**Численные результаты.** Для того чтобы количественно проиллюстрировать полученные аналитические результаты, рассмотрим несколько примеров расчета импульсных приращений скорости, требуемых для осуществления межорбитального перехода.

Геометрические характеристики рассматриваемой начальной орбиты и параметры, соответствующие заданной на ней точке  $Q$ , приведены в табл. 1. Геометрические характеристики трех рассматриваемых целевых орбит и параметры, соответствующие выбранным на них точкам  $P_j$  (где  $j$  — номер примера), содержит табл. 2. Для всех целевых орбит эксцентриситет принят равным  $e_j = 0,2$ ,  $\forall j = 1, 2, 3$ .

Таблица 1

Характеристики начальной орбиты

$\vartheta_0$ , град	$e_0$	$r_{0\alpha}$ , км	$v_{0r}$ , м/с	$v_{0\theta}$ , м/с	$r_1$ , км
10,00	0,20	10 320	241,31	8316,95	6897,465

Таблица 2

Характеристики целевых орбит

$j$	$\vartheta_3$ , град	$r_{3\alpha}/r_{0\alpha}$	$v_{3r}$ , м/с	$v_{3\theta}$ , м/с	$r_2$ , км
1	0	13,43	0	2275,24	92 398,400
2	50	18,98	244,35	1799,95	138 848,820
3	100	256,58	85,44	418,72	2 194 540,056

В табл. 3 представлены результаты расчетов. В каждом из примеров рассматриваются четыре типа межорбитальных переходов между несоосными эллиптическими орбитами: 1-й соответствует предельному случаю биэллиптического перехода, когда  $r_\alpha = r_{3\alpha}$  и решение содержит два импульса ( $\Delta v_2 = 0$ , 2-я переходная орбита совпадает с целевой); 2-й — соответствует общему случаю биэллиптического маневра при  $r_\alpha = 2r_{3\alpha}$ ; 3-й — бипараболическому маневру; 4-й — двухимпульсному переходу между заданными точками. Расчеты проведены по аналитическим формулам (2)–(5), (7), (10), (12) и (15).

Таблица 3

**Результаты расчетов**

$r_\alpha$ , км	$\theta$ , град	$\Delta v_1$ , м/с	$\Delta v_2$ , м/с	$\Delta v_\alpha$ , м/с	$\Delta v_\Sigma$ , м/с
$j = 1$					
$r_{3\alpha}$	356,54	2172,32	0	994,91	3176,23
$2r_{3\alpha}$	356,61	2298,97	268,59	583,83	3151,39
$\infty$	356,68	2430,31	662,16	0	3092,47
—	176,80	2050,30	1501,28	0	3551,58
$j = 2$					
$r_{3\alpha}$	306,59	2245,88	0	903,98	3149,86
$2r_{3\alpha}$	331,08	2336,90	240,18	533,38	3110,46
$\infty$	341,21	2439,31	579,66	0	3009,97
—	174,91	2175,29	1278,85	0	3454,14
$j = 3$					
$r_{3\alpha}$	256,67	2416,33	0	319,11	2735,44
$2r_{3\alpha}$	313,08	2423,31	77,90	189,42	2690,63
$\infty$	333,61	2430,31	175,39	0	2605,70
—	176,94	2414,34	384,48	0	2798,82

Угловая дальность межорбитального перехода определена по формуле

$$\theta = \theta_1 + \theta_2.$$

Результаты, полученные с использованием аналитических формул (см. табл. 3), согласуются с результатами, полученными с помощью численной оптимизации суммарного импульсного приращения скорости как функции переменных  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  с использованием программно-математического обеспечения NPSOL [10]. В качестве минимизируемого функционала при численной оптимизации использовано суммарное приращение скорости в форме



$$\Delta v_{III\Sigma} = \sqrt{(v_{1r} - v_{0r})^2 + (v_{1\theta} - v_{0\theta})^2} + \Delta v_{\alpha} + \sqrt{(v_{3r} - v_{2r})^2 + (v_{3\theta} - v_{2\theta})^2},$$

где неизвестные компоненты скоростей рассчитываются по формулам [3], [9]:

$$\begin{bmatrix} v_{1r} \\ v_{1\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\mu}}{p_{H1}} \left( e_{H1} \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \sqrt{p_1} + \left( \frac{p_{H1}}{\sqrt{p_1}} - \sqrt{p_1} \right) \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right) \\ \frac{\sqrt{\mu p_1}}{r_1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} v_{2r} \\ v_{2\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\mu}}{p_{H2}} \left( e_{H2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \sqrt{p_2} + \left( \frac{p_{H2}}{\sqrt{p_2}} - \sqrt{p_2} \right) \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} \right) \\ \frac{\sqrt{\mu p_2}}{r_2} \end{bmatrix},$$

$$p_{H1} = \frac{2r_1 r_{\alpha}}{r_1 + r_{\alpha}}, \quad e_{H1} = \frac{r_{\alpha} - r_1}{r_{\alpha} + r_1},$$

$$p_{H2} = \frac{2r_2 r_{\alpha}}{r_2 + r_{\alpha}}, \quad e_{H2} = \frac{r_{\alpha} - r_2}{r_{\alpha} + r_2}.$$

**Заключение.** В рамках работы были получены аналитические выражения для оптимальных суммарных импульсных приращений скорости, необходимых для осуществления биэллиптического и бипараболического переходов между несоосными эллиптическими орбитами при фиксированной величине радиуса апогея переходных орбит. Установлено, что суммарное импульсное приращение скорости в рассматриваемой постановке не зависит от величин фокальных параметров переходных орбит и угловых дальностей между точками приложения импульсов. Был проведен анализ полученных зависимостей и установлены условия, при которых трехимпульсный переход может иметь энергетические преимущества по сравнению с двухимпульсным. Приведенные условия отражают границы оптимальности трехимпульсного решения, однако требуется проведение дополнительного анализа для широкого спектра начальных и граничных условий в целях сравнения биэллиптического и бипараболического переходов с двухимпульсным переходом.

Рассмотрен предельный случай биэллиптического маневра — бипараболический маневр. Установлено, что оптимальный бипараболический маневр между несоосными эллиптическими орбитами должен осуществляться касательными импульсами.

Для иллюстрации количественных характеристик рассматриваемых маневров приведен ряд численных примеров. Корректность приведенных результатов расчетов была проверена путем проведения численной минимизации суммарного импульсного приращения скорости как функции нескольких переменных.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hohmann W. *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*. Oldenbourg, 1925, 88 S.
- [2] Gobetz F.W., Doll J.R. A Survey of Impulsive Trajectories. *AIAA Journal*, 1969, vol. 7, no. 5, pp. 801–834. DOI: 10.2514/3.5231
- [3] Battin R.H. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. New York, AIAA, 1999, 796 p.
- [4] Lawden D.F. *Optimal Trajectories for Space Navigation*. London, Butterworths, 1963, 126 p.
- [5] Horner J.M. Optimum Two-Impulse Transfer between Arbitrary Coplanar Terminals. *ARS Journal*, 1962, vol. 32, no. 1, pp. 95–96.
- [6] Horner J.M. Minimum Impulse Orbital Transfers. *AIAA Journal*, 1963, vol. 1, no. 7, pp. 1707–1708. DOI:10.2514/3.1906
- [7] Hoelker R.F., Silber R. The Bi-Elliptical Coplanar Circular Orbits. *Proceeding of the 4<sup>th</sup> Symposium on Ballistic Missiles and Space Technology*. New York, Pergamon, 1961, vol. III, pp. 164–175.
- [8] Marchal C. Transferts Optimaux Entre Orbites Elliptiques Coplanaires (Durée Indifférente). *Astronautica Acta*, 1965, vol. 11, no. 6, pp. 432–445.
- [9] Zaborsky S. Analytical Solution of Two-Impulse Transfer between Coplanar Elliptical Orbits. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2014, vol. 37, no. 3, pp. 996–1000. URL: <http://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/1.62072> (дата обращения 20.09.2016).
- [10] Gill P.E., Murray W.M., Saunders M.A., Wright M.H. *User's Guide for NPSOL (version 4.0). A Fortran Package for Nonlinear Programming. Technical Report SOL 86-2*. Dept. of Operations Research, Stanford Univ., 1986, 44 p.

Статья поступила в редакцию 17.02.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Заборский С.А., Кирилюк Е.В. Оптимальный биэллиптический переход между компланарными эллиптическими орбитами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 5. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-5-1619>

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XLI Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 24–27 января 2017 г.*

**Заборский Сергей Артурович** — канд. техн. наук, начальник сектора средств выведения отдела космической баллистики в ПАО «РКК «Энергия», ассистент кафедры «Аэрофизическая механика и управление движением» МФТИ. Автор четырех научных работ. e-mail: [Sergey.Zaborsky@rsce.ru](mailto:Sergey.Zaborsky@rsce.ru)

**Кирилюк Елена Владимировна** — аспирант, ассистент кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер отдела космической баллистики ПАО «РКК «Энергия». Автор восьми работ в области оптимального управления средствами выведения, динамики полета летательных аппаратов. e-mail: Elena.Kirilyuk@rsce.ru

## Optimal bielliptic transition between coplanar elliptical orbits

© S.A. Zaborskiy<sup>1</sup>, E.V. Kiriluk<sup>2</sup>

<sup>1</sup> S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia,  
Korolev town, Moscow region, 141070, Russia

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University, 105055, Russia

*An analytic solution of the problem of the bielliptic three-pulse transition between circular orbits and an analytic solution for the problem of the bielliptic transition between coaxial elliptic orbits are presented. These solutions were published in a number of sources. In this article, an attempt is made to generalize the existing results for the case of the transition between two specified points belonging to boundary disparate elliptic orbits when the radial values of the transition orbit apogee are specified. An analysis of the obtained relationship for the size of the total pulse increment of the velocity necessary for the performing the bielliptic maneuver is given. The limiting case in which the bielliptic transition degenerates into a biparabolic transition is considered. The dependences of the transition orbit parameters and the conditions under which the three-pulse transition can have advantages over the two-pulse one are established.*

**Keywords:** *optimal maneuver, coplanar transition, interorbital transition, biparabolic maneuver, bi-elliptic maneuver, analytical solution, impulse maneuver*

### REFERENCES

- [1] Hohmann W. *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*. Oldenbourg, 1925, 88 S.
- [2] Gobetz F.W., Doll J.R. *AIAA Journal*, 1969, vol. 7, no. 5, pp. 801–834. DOI: 10.2514/3.5231
- [3] Battin R.H. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. New York, AIAA, 1999, 796 p.
- [4] Lawden D.F. *Optimal Trajectories for Space Navigation*. London, Butterworths, 1963, 123 p.
- [5] Horner J.M. *ARS Journal*, 1962, vol. 32, no. 1, pp. 95–96.
- [6] Horner J.M. *AIAA Journal*, 1963, vol. 1, no. 7, pp. 1707–1708. DOI:10.2514/3.1906
- [7] Hoelker R.F., Silber R. The Bi-Elliptical Coplanar Circular Orbits. *Proceeding of the 4th Symposium on Ballistic Missiles and Space Technology*, New York, Pergamon, 1961, vol. 3, pp. 164–175.
- [8] Marchal C. *Astronautica Acta*, 1965, vol. 11, no. 6, pp. 432–445.
- [9] Zaborsky S. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, vol. 37, no. 3, pp. 996–1000. Available at: <http://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/1.62072> (accessed September 20, 2016).
- [10] Gill P.E., Murray W.M., Saunders M.A., Wright M.H. *User's Guide for NPSOL (version 4.0). A Fortran Package for Nonlinear Programming. Technical Report SOL 86-2*. Department of Operations Research, Stanford University Publ., 1986, 44 p.

**Zaborskiy S.A.**, Cand. Sc. (Eng.), Head of the Launch Vehicle Sector, Department of Space Ballistics, S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia, Assistant

Lecturer, Department of Aerophysical Mechanics and Motion Control, Moscow Institute of Physics and Technology. Author of 4 research publications.

e-mail: [Sergey.Zaborsky@rsce.ru](mailto:Sergey.Zaborsky@rsce.ru)

**Kiriluk E.V.**, Postgraduate student, Assistant Lecturer, Department of Space Flight Dynamics and Control, Bauman Moscow State Technical University, engineer, S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia. Author of 8 research publications in the field of optimal control of launch vehicles, flight dynamics of flight vehicles.

e-mail: [Elena.Kirilyuk@rsce.ru](mailto:Elena.Kirilyuk@rsce.ru)