

## Универсальные законы управления стабилизацией продольного движения летательных аппаратов различного типа

© Н.Е. Зубов<sup>1,2</sup>, В.Н. Рябченко<sup>2</sup>, М.Н. Поклад<sup>2</sup>,  
Д.Е. Ефанов<sup>1</sup>, Е.И. Старовойтов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ПАО «РКК «Энергия», г. Королёв, Московская обл., 141070, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Аналитически синтезирован закон стабилизации бокового движения для линеаризованной модели четвертого порядка изолированного бокового движения одновинтового вертолета. Модель можно рассматривать как универсальную для бокового движения летательных аппаратов любого типа, она представляет собой МИМО-систему, содержащую два входа. В основе синтеза лежит ранее разработанный авторами декомпозиционный метод модального управления МИМО-системой. Проведено математическое моделирование бокового движения одновинтового вертолета для проверки правильности решения поставленной задачи. Представлены графики переходных процессов бокового движения вертолета и изменения компонент вектора управления в процессе реализации синтезированных законов управления.*

**Ключевые слова:** МИМО-система, декомпозиция, аналитический синтез, продольное движение летательных аппаратов, матрица регулятора

**Введение.** Анализ линеаризованных математических моделей, описывающих боковое движение таких летательных аппаратов (ЛА), как самолет и одновинтовой вертолет (ОВ), показывает, что ОВ имеет более сложную модель, однако из нее легко можно получить модель ЛА, приравняв к нулю некоторые коэффициенты линеаризации. Следовательно, если иметь аналитическое решение для законов управления боковой стабилизацией ОВ, то они могут без какой-либо модификации применяться и к управлению ЛА. Обратная процедура при этом недопустима. Поэтому полученное в работе [1] аналитическое решение для ЛА не может быть применено к ОВ. Совершенно очевидно, как показано в [2], что только наличие аналитических решений позволяет максимально близко приблизить линейную математическую модель движения к нелинейной, поскольку в этом случае линеаризация строится заново для каждого такта работы бортовой ЭВМ. Указанные обстоятельства и определяют цель данной работы, направленной на получение аналитического решения стабилизации бокового движения ОВ, которое в данном случае будет иметь универсальный вид, поскольку может быть применено к управлению ЛА.

**Математическая модель бокового движения ОВ.** Одновинтовой вертолет как объект управления, представляющий собой взаимосвязанное боковое (крен-рысканье) движение, рассмотрим в форме Коши [1, 2]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

с матрицами кусочно-постоянных коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{V_z}^{V_z} & a_{V_z}^{\omega_x} & a_{V_z}^{\omega_y} & a_{V_z}^{\gamma} \\ a_{\omega_x}^{V_z} & a_{\omega_x}^{\omega_x} & a_{\omega_x}^{\omega_y} & 0 \\ a_{\omega_y}^{V_z} & a_{\omega_y}^{\omega_x} & a_{\omega_y}^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 1 & a_{\gamma}^{\omega_y} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{V_z}^{u_z} & b_{V_z}^{u_{p.в}} \\ b_{\omega_x}^{u_z} & b_{\omega_x}^{u_{p.в}} \\ b_{\omega_y}^{u_z} & b_{\omega_y}^{u_{p.в}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и векторами состояния и управления соответственно

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta V_z \\ \Delta \omega_x \\ \Delta \omega_y \\ \Delta \gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_z \\ \Delta u_{p.в} \end{pmatrix},$$

где обозначены следующие отклонения от заданных значений:  $\Delta V$  — боковой скорости;  $\Delta \omega_x$  — угловой скорости крена;  $\Delta \omega_y$  — угловой скорости рыскания;  $\Delta \gamma$  — угла крена.

В качестве управлений используются  $\Delta u_z$  — угол отклонения конуса несущего винта в поперечном направлении и  $\Delta u_{p.в}$  — шаг рулевого винта.

Параметры модели

$$a_{V_z}^{V_z}, a_{V_z}^{\omega_x}, a_{V_z}^{\omega_y}, a_{V_z}^{\gamma}, a_{\omega_x}^{V_z}, a_{\omega_x}^{\omega_x}, a_{\omega_x}^{\omega_y}, a_{\omega_y}^{V_z}, a_{\omega_y}^{\omega_x}, a_{\omega_y}^{\omega_y}, a_{\gamma}^{\omega_y}, b_{V_z}^{u_z}, b_{V_z}^{u_{p.в}}, b_{\omega_x}^{u_z}, b_{\omega_x}^{u_{p.в}}, b_{\omega_y}^{u_z}, b_{\omega_y}^{u_{p.в}}$$

являются коэффициентами линеаризации [1–3, 4].

Для унификации записи уравнений в дальнейших исследованиях введем обозначения

$$a_{11} = a_{V_z}^{V_z}, \quad a_{12} = a_{V_z}^{\omega_x}, \quad a_{13} = a_{V_z}^{\omega_y}, \quad a_{14} = a_{V_z}^{\gamma}, \quad a_{21} = a_{\omega_x}^{V_z}, \quad a_{22} = a_{\omega_x}^{\omega_x},$$

$$a_{23} = a_{\omega_x}^{\omega_y}, \quad a_{31} = a_{\omega_y}^{V_z}, \quad a_{32} = a_{\omega_y}^{\omega_x}, \quad a_{33} = a_{\omega_y}^{\omega_y}, \quad a_{43} = a_{\gamma}^{\omega_y},$$

$$b_{11} = b_{V_z}^{u_z}, \quad b_{12} = b_{V_z}^{u_{p.B}}, \quad b_{21} = b_{\omega_x}^{u_z}, \quad b_{22} = b_{\omega_x}^{u_{p.B}}, \quad b_{31} = b_{\omega_y}^{u_z}, \quad b_{32} = b_{\omega_y}^{u_{p.B}},$$

тогда ОВ как объект управления по формуле (1) в развернутом виде можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{V}_z \\ \Delta \dot{\omega}_x \\ \Delta \dot{\omega}_y \\ \Delta \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_z \\ \Delta \omega_x \\ \Delta \omega_y \\ \Delta \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_z \\ \Delta u_{p.B} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Полагая, что все компоненты вектора состояния полностью наблюдаемые, осуществим синтез управления объектом (2) в виде закона обратной связи по переменным состояния:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (3)$$

где  $\mathbf{K}$  — искомая матрица коэффициентов (регулятор).

**Аналитический синтез законов управления одновинтовым вертолетом.** Несмотря на наличие множества методов управления линейными системами (pole placement, eigenvalue assignment, modal control) [2, 5–11], которые позволяют осуществлять эффективный синтез законов стабилизации динамических систем с многими входами и многими выходами (MIMO-систем), наиболее приемлемым для аналитического синтеза является декомпозиционный метод. Он изложен, в частности, в [2] и представляет собой эффективный метод решения задачи полного размещения полюсов MIMO-системы [2]. При использовании его не требуется решение матричного уравнения Сильвестра, а также отсутствуют ограничения по алгебраической и геометрической кратности задаваемых полюсов. Кроме того, данный метод легко реализуется в программном пакете MatLab.

В соответствии с работой [2] для рассматриваемого случая многоуровневую декомпозицию MIMO-системы (1) в общем виде можно записать как

нулевой (исходный) уровень декомпозиции

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0 \quad (4)$$

и первый уровень декомпозиции

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp+}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{B}_0^\perp$  — левый делитель нуля матрицы  $\mathbf{B}_0$ ;  $\mathbf{B}_0^{\perp+}$  — псевдообратная матрица матрицы  $\mathbf{B}_0^\perp$ .

Справедливо следующее утверждение [2]: если ММО-система (1) с парой матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  полностью управляема, то полностью управляемыми являются все пары матриц  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$  в формулах (4), (5), где  $i \in \{0, 1\}$ .

В рассматриваемом случае все матрицы  $\mathbf{B}_i$  в формулах (4), (5) являются матрицами полного ранга по столбцам. При этом оказывается также справедливым и другое утверждение [2].

Пусть ММО-система (1) полностью управляемая и матрица  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  удовлетворяет формулам

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \mathbf{B}_0^- \mathbf{A} - \Phi_0 \mathbf{B}_0^-, \quad \mathbf{B}_0^- = \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp + \mathbf{B}_0^+, \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^+ \mathbf{A}_1 - \Phi_1 \mathbf{B}_1^+, \quad (7)$$

тогда

$$\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \bigcup_{i=1}^2 \text{eig}(\Phi_{i-1}). \quad (8)$$

Отсюда следует, что закон управления (3) с матрицей  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , удовлетворяющей соотношениям (6)–(7), обеспечивает выполнение условия на собственные значения (8), т. е. условия заданного размещения полюсов.

В соответствии со сказанным выше введем в рассмотрение двух-уровневую декомпозицию. Учитывая, что в нашем случае ранг каждой из вводимых матриц  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{B}_1$  совпадает с соответствующим числом столбцов, имеем

*нулевой уровень*

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

*первый уровень*

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp+}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0. \quad (10)$$

Зададим далее матрицы  $\Phi = \Phi_0, \Phi_1$  таким образом, чтобы множество

$$\text{eig}(\Phi_0) \cup \text{eig}(\Phi_1)$$

состояло из корней характеристического полинома

$$\det(\lambda \mathbf{I}_4 - \mathbf{A} + \mathbf{BK}),$$

например, следующим образом:

$$\Phi = \Phi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & 0 \\ 0 & \varphi_{12} \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{21} & 0 \\ 0 & \varphi_{22} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Тогда требуемая матрица коэффициентов в законе управления, согласно равенствам (6), определится выражением

$$K = \Phi_0 (B_0^+ + K_1 B_0^+) - (B_0^+ + K_1 B_0^+) A_0, \quad (12)$$

где

$$K_1 = \Phi_1 B_1^+ - B_1^+ A_1, \quad (13)$$

$B_0^+$ ,  $B_1^+$  — соответствующие псевдообратные матрицы [2, 12].

Для матрицы  $B$  из равенств (6) делитель нуля  $B_0^+$  и псевдообратная матрица  $B_0^+$  определяются как

$$B_0^+ = \begin{pmatrix} \frac{b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} & -\frac{b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$B_0^+ = \begin{pmatrix} b_{11}^+ & b_{12}^+ & b_{13}^+ & 0 \\ b_{21}^+ & b_{22}^+ & b_{23}^+ & 0 \end{pmatrix},$$

а входящие в них элементы матриц как

$$b_{11}^+ = \frac{b_{11}(b_{22}^2 + b_{32}^2) - b_{12}(b_{21}b_{22} + b_{31}b_{32})}{b^+},$$

$$b_{12}^+ = \frac{b_{21}b_{12}^2 - b_{11}b_{22}b_{12} + b_{21}b_{32}^2 - b_{22}b_{31}b_{32}}{b^+},$$

$$b_{13}^+ = \frac{b_{31}b_{12}^2 - b_{11}b_{32}b_{12} + b_{31}b_{22}^2 - b_{21}b_{32}b_{22}}{b^+},$$

$$b_{21}^+ = \frac{b_{12}b_{21}^2 - b_{11}b_{22}b_{21} + b_{12}b_{31}^2 - b_{11}b_{32}b_{31}}{b^+},$$

$$b_{22}^+ = \frac{b_{22}b_{11}^2 - b_{12}b_{21}b_{11} + b_{22}b_{31}^2 - b_{21}b_{32}b_{31}}{b^+},$$

$$b_{23}^+ = \frac{b_{32}b_{11}^2 - b_{12}b_{31}b_{11} + b_{32}b_{21}^2 - b_{22}b_{31}b_{21}}{b^+},$$

$$b^+ = b_{11}^2 b_{22}^2 + b_{11}^2 b_{32}^2 - 2b_{11}b_{12}b_{21}b_{22} - 2b_{11}b_{12}b_{31}b_{32} + b_{12}^2 b_{31}^2 + b_{21}^2 b_{32}^2 - 2b_{21}b_{22}b_{31}b_{32} + b_{22}^2 b_{31}^2.$$

При этом матрица  $\mathbf{B}_0^{\perp+}$  имеет вид

$$\mathbf{B}_0^{\perp+} = \begin{pmatrix} \frac{l_{11}}{l_{11}^2 + l_{12}^2 + 1} & 0 \\ \frac{l_{12}}{l_{11}^2 + l_{12}^2 + 1} & 0 \\ \frac{1}{l_{11}^2 + l_{12}^2 + 1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  в соответствии с равенствами (5) вычисляются по выражениям

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь для компактности введены обозначения:

$$a_{11}^1 = \frac{a_{33} + a_{13}l_{11} + a_{23}l_{12} + a_{31}l_{11} + a_{32}l_{12} + a_{11}l_{11}^2 + a_{22}l_{12}^2 + a_{12}l_{11}l_{12} + a_{21}l_{11}l_{12}}{l_{11}^2 + l_{12}^2 + 1},$$

$$a_{12}^1 = a_{14}l_{11}, \quad a_{21}^1 = \frac{a_{43} + l_{12}}{l_{11}^2 + l_{12}^2 + 1},$$

$$b_{11}^1 = b_{11}(a_{31} + a_{11}l_{11} + a_{21}l_{12}) + b_{21}(a_{32} + a_{12}l_{11} + a_{22}l_{12}) + b_{31}(a_{33} + a_{13}l_{11} + a_{23}l_{12}),$$

$$b_{12}^1 = b_{12}(a_{31} + a_{11}l_{11} + a_{21}l_{12}) + b_{22}(a_{32} + a_{12}l_{11} + a_{22}l_{12}) + b_{32}(a_{33} + a_{13}l_{11} + a_{23}l_{12}),$$

$$b_{21}^1 = b_{21} + a_{43}b_{31}, \quad b_{22}^1 = b_{22} + a_{43}b_{32}.$$

Вычислив матрицу  $\mathbf{B}_1^+$  для первого уровня декомпозиции, получаем

$$\mathbf{B}_1^+ = \begin{pmatrix} b_{11}^{1+} & b_{12}^{1+} \\ b_{21}^{1+} & b_{22}^{1+} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$b_{11}^{1+} = \frac{b_{22}^1}{b^{+*}}, \quad b_{12}^{1+} = \frac{b_{12}^1}{b^{+*}}, \quad b_{21}^{1+} = \frac{-b_{21}^1}{b^{+*}}, \quad b_{22}^{1+} = \frac{b_{11}^1}{b^{+*}},$$

$$b^{+*} = b_{11}^1 b_{22}^1 - b_{12}^1 b_{21}^1.$$

Используя далее формулу (7), получаем матрицу регулятора для первого уровня декомпозиции:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^1 b_{11}^{1+} + a_{21}^1 b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+} \varphi_{21} & a_{12}^1 b_{11}^{1+} - b_{12}^{1+} \varphi_{21} \\ a_{11}^1 b_{21}^{1+} + a_{21}^1 b_{22}^{1+} - b_{21}^{1+} \varphi_{22} & a_{12}^1 b_{21}^{1+} - b_{22}^{1+} \varphi_{22} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

а затем, согласно выражениям (12)–(17), — общий вид матрицы регулятора для нулевого уровня

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Здесь для краткости записи введем обозначения:

$$k_{11} = a_{11} b_{11}^- + a_{21} b_{12}^- + a_{31} b_{13}^- - b_{11}^- \varphi_{11}, \quad (19)$$

$$k_{12} = b_{14}^- + a_{12} b_{11}^- + a_{22} b_{12}^- + a_{32} b_{13}^- - \varphi_{11} b_{12}^-, \quad (20)$$

$$k_{13} = a_{13} b_{11}^- + a_{23} b_{12}^- + a_{33} b_{13}^- + a_{43} b_{14}^- - \varphi_{11} b_{13}^-, \quad (21)$$

$$k_{14} = a_{14} b_{11}^- - \varphi_{11} b_{14}^-, \quad (22)$$

$$k_{21} = a_{11} b_{21}^- + a_{21} b_{22}^- + a_{31} b_{23}^- - b_{21}^- \varphi_{12}, \quad (23)$$

$$k_{22} = b_{24}^- + a_{12} b_{21}^- + a_{22} b_{22}^- + a_{32} b_{23}^- - \varphi_{12} b_{22}^-, \quad (24)$$

$$k_{23} = a_{13} b_{21}^- + a_{23} b_{22}^- + a_{33} b_{23}^- + a_{43} b_{24}^- - \varphi_{12} b_{23}^-, \quad (25)$$

$$k_{24} = a_{14} b_{21}^- - \varphi_{12} b_{24}^-, \quad (26)$$

$$b_{11}^- = b_{11}^+ + l_{11}(a_{11}^1 b_{11}^{1+} + a_{21}^1 b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+} g_{21}), \quad b_{12}^- = b_{12}^+ + l_{12}(a_{11}^1 b_{11}^{1+} + a_{21}^1 b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+} g_{21}),$$

$$b_{13}^- = b_{13}^+ + a_{11}^1 b_{11}^{1+} + a_{21}^1 b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+} g_{21}), \quad b_{14}^- = a_{12}^1 b_{11}^{1+} + a_{22}^1 b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+} g_{21}),$$

$$b_{21}^- = b_{21}^+ + l_{11}(a_{11}^1 b_{21}^{1+} + a_{21}^1 b_{22}^{1+} - b_{21}^{1+} g_{22}), \quad b_{12}^- = b_{22}^+ + l_{12}(a_{11}^1 b_{21}^{1+} + a_{21}^1 b_{22}^{1+} - b_{21}^{1+} g_{22}),$$

$$b_{23}^- = b_{23}^+ + a_{11}^1 b_{21}^{1+} + a_{21}^1 b_{22}^{1+} - b_{21}^{1+} g_{22}), \quad b_{14}^- = a_{12}^1 b_{21}^{1+} + a_{22}^1 b_{22}^{1+} - b_{22}^{1+} g_{22}).$$

В соответствии с формулами (2), (3) и (18) имеем аналитический вид закона управления ОВ:

$$\begin{pmatrix} \Delta u_z \\ \Delta u_{p.в} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_z \\ \Delta \omega_x \\ \Delta \omega_y \\ \Delta \gamma \end{pmatrix}, \quad (27)$$

элементы которого имеют относительно компактный вид и могут быть достаточно легко реализованы в реальном масштабе времени.

Соответственно для ЛА матрица коэффициентов обратной связи (матрица регулятора) будет иметь аналогичный вид.

**Численное моделирование.** Для моделирования бокового движения ОВ зададим числовые значения матриц коэффициентов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,1900 & -6,2000 & 68,9161 & -9,7932 \\ -0,1200 & -6,2519 & -0,1900 & 0 \\ -0,0500 & 0,1000 & -0,8720 & 0 \\ 0 & 1 & 0,1000 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -16,1744 & -6,0409 \\ -135,4887 & -2,3329 \\ 3,5087 & -13,0006 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для указанных числовых значений модели ОВ объект управления имеет множество полюсов:  $\{-6,3545, 0,0554; -0,5079 \pm 1,7969i\}$ . Как видно, в силу имеющегося положительного действительного числа рассматриваемая модель представляет собой неустойчивый процесс, хотя относительно малое значение положительного полюса с практической точки зрения свидетельствует, скорее, о нейтральности рассматриваемого взаимосвязанного бокового движения.

Предположим, что задачей синтеза является формирование алгоритмов функционирования системы управления ОВ, обеспечивающей с помощью аналитически синтезированного выше закона управления «перемещением» полюсов модели ОВ в точки множества

$$\{-1,5, -1,5, -1,5, -1,5\}. \quad (29)$$

Для желаемого множества полюсов (29) выражения матриц (11) можно записать в виде

$$\Phi = \Phi_0 = \Phi_1 = \begin{pmatrix} -1,5 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Тогда с использованием выражений (2)–(10), (18)–(26) и матриц (30) получим матрицу регулятора в законе управления (27):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0,0009 & 0,0238 & 0,0038 & -0,0170 \\ 0,0021 & 0,0089 & -0,1491 & 0,0126 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица собственной динамики в замкнутом контуре ОВ — система управления принимает вид



$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{pmatrix} -0,1634 & -5,7623 & 68,0777 & -9,9916 \\ 0,0026 & -3,0132 & -0,0177 & -2,2724 \\ -0,0260 & 0,1318 & -2,8234 & 0,2240 \\ 0 & 1 & 0,1000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для начальных значений вектора состояния ОВ в системе единиц СИ:

$$(\Delta V_z \quad \Delta \omega_x \quad \Delta \omega_y \quad \Delta \gamma)^T = (3,00 \quad 0,0200 \quad 0,0200 \quad 0,300)^T$$

на рис. 1 представлены графики переходных процессов по компонентам вектора состояния, на рис. 2 — значения управляющих воздействий. Как видим, переходные процессы являются быстрозатухающими и носят аperiodический (неколебательный) характер, что обеспечивает хорошие пилотажные характеристики ОВ.

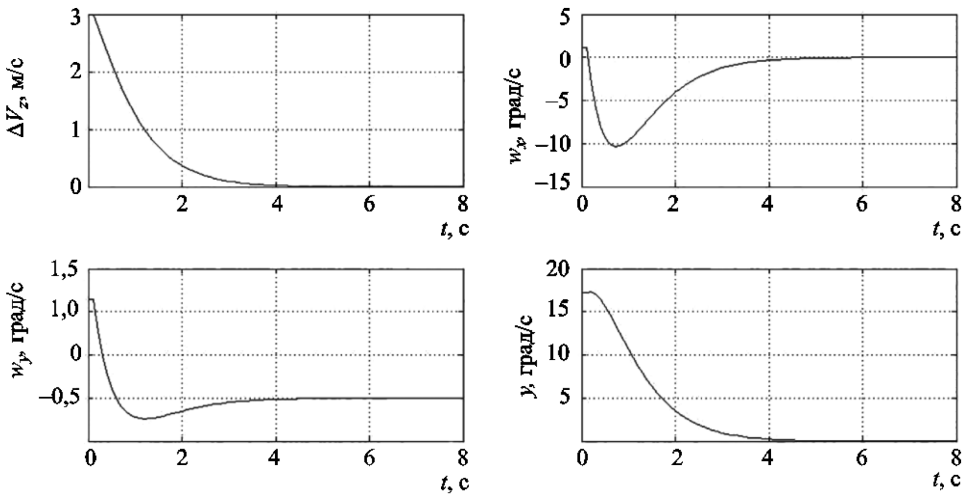


Рис. 1. Переходные процессы по компонентам вектора состояния

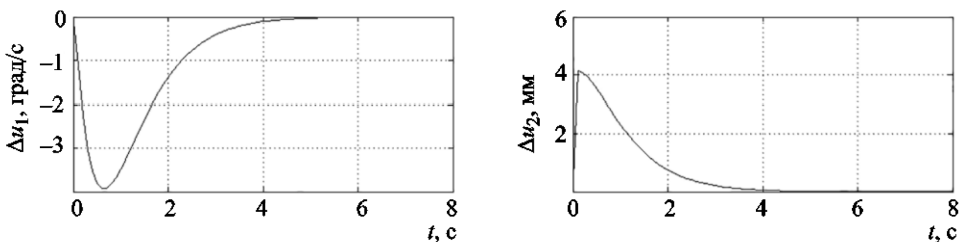


Рис. 2. Значения управляющих воздействий

**Заключение.** Для линеаризованной модели изолированного бокового движения ОВ, которую можно рассматривать как универсальную модель бокового движения любого типа ЛА, получены аналитические выражения для законов стабилизации. Их легко можно реализовать на борту в реальном масштабе времени, поскольку вычислительные затраты незначительны и представляют собой простые арифметические операции.

Представлены результаты численного моделирования управления боковым движением ОВ, полученные с использованием данных аналитических законов управления.

*Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00046).*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Пролетарский А.В. Аналитический синтез законов управления боковым движением летательного аппарата. *Авиационная техника. Известия высших учебных заведений*. 2015, № 3, с. 14–20.
- [2] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. *Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 666 с.
- [3] Красовский А.А., Вавилов Ю.А., Сучков А.И. *Системы автоматического управления летательных аппаратов*. Москва, ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1986, 480 с.
- [4] Микрин Е.А., Зубов Н.Е., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Инвариантное управление маловысотным полетом одновинтового вертолета. *Автоматизация. Современные технологии*, 2015, № 6, с. 3–8.
- [5] Li P.Y. *Advanced control systems design*. University of Minnesota, 2012, 89 p.
- [6] Yang K., Orsi R. Static Output Feedback via a Trust Region Approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2007, pp. 2146–2150.
- [7] Mori K. Parametrization of the stabilizing controllers over a commutative ring with applications to multidimensional systems. *IEEE Trans. Circ. Sys.*, 2002, vol. 49, pp. 743–750.
- [8] Bhattachrya S. Sparsity based feedback design: A new paradigm in opportunistic sensing. *Proc. American Control Conf.*, 2011, pp. 3704–3709.
- [9] Blumthaler I., Oberst U. Design, parameterization, and pole placement of stabilizing output feedback compensators via injective cogenerator quotient signal modules. *Linear Algebra Appl.*, 2012, vol. 436 (5-2), pp. 963–1000.
- [10] Bosche J., Bachelier O., Mehdi D. Robust pole placement by static output feedback. *Proc. 43rd IEEE Conf. Decision & Control*. Paradise Island, Bahamas, 2004, pp. 869–874.
- [11] Franke M. Eigenvalue assignment by static output feedback – on a new solvability condition and the computation of low gain feedback matrices. *Int. J. Contr.*, 2014, vol. 87 (1), pp. 64–75.
- [12] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Олейник А.С., Рябченко В.Н. Терминальное релейно-импульсное управление линейными стационарными динамическими системами. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2014, № 3, с. 134–149.

Статья поступила в редакцию 13.02.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зубов Н.Е., Рябченко В.Н., Поклад М.Н., Ефанов Д.Е., Старовойтов Е.И. Универсальные законы управления стабилизацией продольного движения летательных аппаратов различного типа. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 5. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-5-1617>

**Зубов Николай Евгеньевич** — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ПАО «РКК «Энергия», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 170 научных работ в области проблем управления космическими аппаратами.  
e-mail: [Nikolay.Zubov@rsce.ru](mailto:Nikolay.Zubov@rsce.ru)

**Рябченко Владимир Николаевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области проблем управления космическими аппаратами.  
e-mail: [rkt@bmstu.ru](mailto:rkt@bmstu.ru)

**Поклад Максим Николаевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области систем управления космическими аппаратами. e-mail: [rkt@bmstu.ru](mailto:rkt@bmstu.ru)

**Ефанов Дмитрий Евгеньевич** — аспирант научно-технического центра ПАО «РКК «Энергия». Автор более 10 научных работ в области проблем управления космическими аппаратами. e-mail: [post@rsce.ru](mailto:post@rsce.ru)

**Старовойтов Евгений Игоревич** — канд. техн. наук, ст. науч. сотр. ПАО «РКК «Энергия». Автор более 20 научных работ в области бортовых оптико-электронных и световых приборов космических аппаратов. e-mail: [post@rsce.ru](mailto:post@rsce.ru)

## Universal control laws of stabilizing longitudinal motion of different types of aircrafts

© N.E. Zubov<sup>1,2</sup>, V.N. Ryabchenko<sup>2</sup>, M.N. Poklad<sup>2</sup>,  
D.E. Efanov<sup>1</sup>, E.I. Starovoytov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia,  
Korolev town, Moscow region, 141070, Russia

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The paper presents the analytically synthesized law of lateral movement stabilization. It is done for the linearized model of the fourth order lateral movement of an isolated single-rotor helicopter, which can be regarded as a universal model for the aircraft lateral movement of any type and which represents the MIMO system containing two entrances. The decomposition method of MIMO system modal control, which was previously developed by the authors, is the basis of the decomposition synthesis. To check the correctness of the problem, we perform mathematical modeling of the single-rotor helicopter lateral movement using stabilization laws synthesized analytically. We present graphs of transient processes of the helicopter lateral movement as well as component changes of the vector control during the implementation process of the synthesized control laws.*

**Keywords:** MIMO-system, decomposition, analytical synthesis, longitudinal movement of aircrafts, dynamic system poles, control matrix

### REFERENCES

- [1] Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N., Proletarskii A.V. *Aviatsionnaya tekhnika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy*. — *Izv. VUZ. Aviatsionnaya Tekhnika (Russian Aeronautics)*, 2015, vol. 58, no. 3, pp. 263–270.
- [2] Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. *Matrichnye metody v teorii i praktike sistem avtomaticheskogo upravleniya letatelnykh apparatov* [Matrix methods in theory and practice of aircraft automatic control systems]. Moscow, BMSTU Publ., 2016, 666 p.
- [3] Krasovskiy A.A., Vavilov Yu.A., Suchkov A.I. *Sistemy avtomaticheskogo upravleniya letatelnykh apparatov* [The automatic control system of aircrafts]. Moscow, Zhukovsky Air Force Engineering Academy Publ., 1986, 480 p.
- [4] Mikrin E.A., Zubov N.E., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. *Avtomatizatsiya. Sovremennyye tekhnologii — Automation. Modern Technologies*, 2015. no. 6, pp. 3–8.
- [5] Li P.Y. *Advanced control systems design*. University of Minnesota, 2012, 89 p.
- [6] Yang K., Orsi R. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2007, pp. 2146–2150.
- [7] Mori K. *IEEE Trans. Circ. Sys.*, 2002, vol. 49, pp. 743–75.
- [8] Bhattacharya S. Sparsity based feedback design: A new paradigm in opportunistic sensing. *Proc. American Control Conf.*, 2011, pp. 3704–3709.
- [9] Blumthaler I., Oberst U. *Linear Algebra Appl.*, 2012, vol. 436 (5–2), pp. 963–1000.
- [10] Bosche J., Bachelier O., Mehdi D. Robust pole placement by static output feedback. *Proc. 43rd IEEE Conf. Decision & Control. Paradise Island, Bahamas*, 2004, pp. 869–874.
- [11] Franke M. *International Journal of Control*, 2014, vol. 87 (1), pp. 64–75.
- [12] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Oleynik A.S., Ryabchenko V.N. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, no. 3, pp. 134–149.

**Zubov N.E.**, Dr. Sc. (Eng.), Deputy and Scientific Director, Research and Development Centre, S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia. Professor, Department of Automatic Control System, Bauman Moscow State Technical University. Research interests include spacecraft dynamical systems control. e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

**Ryabchenko V.N.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Automatic Control System, Bauman Moscow State Technical University. Research interests include dynamical systems control. e-mail: rkt@bmstu.ru

**Poklad M.N.**, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Automatic Control System, Bauman Moscow State Technical University. Research interests include spacecraft dynamical systems control. e-mail: rkt@bmstu.ru

**Efanov D.E.**, post-graduate student, Research and Development Centre, S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia. Research interests include spacecraft dynamical systems control. e-mail: post@rsce.ru

**Starovoytov E.I.**, Cand. Sc. (Eng.), Senior Research Scientist, S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia. Research interests include onboard opto-electronics and light devices of spacecraft. e-mail: post@rsce.ru