

В. С. З а р у б и н, М. М. Л у к а ш и н

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ ВНУТРИ ТРУБЧАТОГО ЭЛЕМЕНТА МЕТОДОМ СКВОЗНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

*Предложен численный метод решения задачи Стефана, использующий вспомогательные функции: объемной плотности внутренней энергии и Кирхгофа. Это позволяет найти нестационарное температурное поле в области с подвижной границей раздела фаз путем сквозного счета. Метод применен для расчета затвердевания жидкометаллического теплоносителя в трубчатом элементе.*

**E-mail:** zarubin@bmstu.ru, mixail.lukashin@mail.ru

**Ключевые слова:** задача Стефана, фазовый переход, плотность внутренней энергии, функция Кирхгофа, раздел фаз

**Область решения задачи.** Внутри трубчатого элемента, радиус внутренней поверхности которой  $R$ , находится теплоноситель.

Если считать теплоноситель неподвижным, что является более жестким условием по сравнению с действительностью, и не учитывать изменение температуры вдоль оси трубки, то расчет процесса затвердевания жидкометаллического теплоносителя можно свести к решению одномерной осесимметричной задачи Стефана.

**Математическая формулировка задачи Стефана.** Нестационарное температурное поле для каждой из фаз теплоносителя удовлетворяет одномерному нелинейному уравнению теплопроводности

$$c(T) \frac{\partial T(t, r)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(T) r \frac{\partial T(t, r)}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где  $T(t, r)$  — искомая зависимость температуры от времени и радиальной координаты  $r$ , отсчитываемой от оси трубки;  $c(T)$ ,  $\lambda(T)$  — зависящие от температуры объемная теплоемкость и теплопроводность теплоносителя. Примем, что на внешней границе постоянно поддерживается температура  $T_1$ , т.е. граничные условия имеют вид

$$T(t, R) = T_1, \quad \left. \frac{\partial T(t, r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (2)$$

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  температура теплоносителя равна  $T_0$ , т.е. начальным условием является

$$T(0, r) = T_0. \quad (3)$$

На движущейся границе между твердой и жидкой фазами теплоносителя, имеющей зависящую от времени радиальную координату  $\xi(t)$ ,

имеем  $T(t, \xi(t)) = T^*$ , где  $T^*$  — температура затвердевания теплоносителя, а из условия баланса тепловой энергии получим

$$\lambda_{\text{ж}} \frac{\partial T(t, r)}{\partial r} \Big|_{r=\xi(t)} + \kappa \frac{d\xi(t)}{dt} = \lambda_{\text{т}} \frac{\partial T(t, r)}{\partial r} \Big|_{r=\xi(t)}, \quad (4)$$

где  $\lambda_{\text{ж}}$  и  $\lambda_{\text{т}}$  — значения теплопроводности теплоносителя при  $T = T^*$  в жидкой и твердой фазах соответственно, а  $\kappa$  — тепловая энергия, выделяющаяся при затвердевании единицы объема теплоносителя.

**Введение вспомогательных функций.** Основная трудность решения задачи Стефана связана с необходимостью нахождения из условия (4) скорости  $v = d\xi(t)/dt$  движения границы раздела фаз. Этого можно избежать, если ввести функцию объемной плотности внутренней энергии [1]

$$C(T) = \int_{T^*}^T (c(u) + \kappa \delta(u - T^*)) du \quad (5)$$

и Кирхгофа

$$\Lambda(T) = \int_{T^*}^T \lambda(u) du, \quad (6)$$

где  $T^*$  — нижняя грань множества ожидаемых значений температуры в рассматриваемой задаче, а  $\delta(u - T^*)$  — дельта-функция Дирака, обладающая при  $T^* \in (T_*, T)$  свойством

$$\int_{T^*}^T \delta(u - T^*) du = 1.$$

Если объемная теплоемкость теплоносителя явно не зависит от времени, а его теплопроводность явно не зависит от радиальной координаты, т.е. твердая и жидкая фазы в рассматриваемой области являются однородными, то (1) с учетом (5) и (6) примет вид [2]

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \right) \quad (7)$$

и будет содержать две неизвестные функции  $C$  и  $\Lambda$ , зависящие от  $t$  и  $r$ .

Так как  $\lambda(T) > 0$  и эта функция может иметь при  $T = T^*$  лишь конечный разрыв, то функция  $\Lambda(T)$  является непрерывной и возрастающей, а поэтому имеет также непрерывную обратную функцию  $T(\Lambda)$ . Тогда можно построить композицию функций  $C_1(\Lambda) = C(T(\Lambda))$ , что позволяет вместо (7) записать

$$C_1'(\Lambda) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \right), \quad (8)$$

где  $C_1'(\Lambda) = \partial C_1(\Lambda) / \partial \Lambda$ . Теперь граничные и начальное условия (2) и (3) изменятся и для искомой функции примут вид

$$\Lambda(t, R) = \int_{T_*}^{T_1} \lambda(u) du, \quad \left. \frac{\partial \Lambda(t, r)}{\partial t} \right|_{r=0} = 0 \quad (9)$$

и

$$\Lambda(0, r) = \int_{T_*}^{T_0} \lambda(u) du \quad (10)$$

соответственно. Можно показать [3], что решение задачи (8)–(10), представленное в виде функции  $T(r, t)$ , будет удовлетворять условию (4), если слагаемое  $\kappa \frac{d\xi(t)}{dt}$  рассматривать как скорость изменения внутренней энергии при фазовом превращении.

**Построение разностной схемы.** Введем конечно-разностную сетку с шагом  $\Delta t$  по времени и шагом  $\Delta r$  по радиальной координате. Тогда, аппроксимировав (8) в соответствии с явной конечно-разностной схемой, запишем

$$C_1'(\Lambda_i^j) \frac{\Lambda_i^{j-1} - \Lambda_i^j}{\Delta t} = \frac{r_{i+1/2}(\Lambda_{i+1}^j - \Lambda_i^j) + r_{i-1/2}(\Lambda_{i-1}^j - \Lambda_i^j)}{r_i(\Delta r)^2}, \quad (11)$$

где верхний индекс  $j$  у узлового значения  $\Lambda_i^j$  искомой функции  $\Lambda(t, r)$  указывает номер шага по времени, а нижний индекс  $i$  – номер узла конечно-разностной сетки по радиальной координате.

Эта схема имеет погрешность  $O((\Delta r)^2, \Delta t)$  [1].

Устойчивость явной конечно-разностной схемы будет обеспечена, если в (11) коэффициент при  $\Lambda_i^j$  не будет по абсолютному значению превосходить единицу, т.е.

$$\left| 1 - \frac{2\Delta t}{C_1'(\Lambda_i^j)(\Delta r)^2} \right| \leq 1.$$

Чтобы при неизменных во времени граничных условиях расчетные значения температуры не совершали физически не реализуемых колебаний, этот коэффициент не должен быть отрицательным [3]. Это накладывает ограничение на выбор шага по времени в виде неравенства

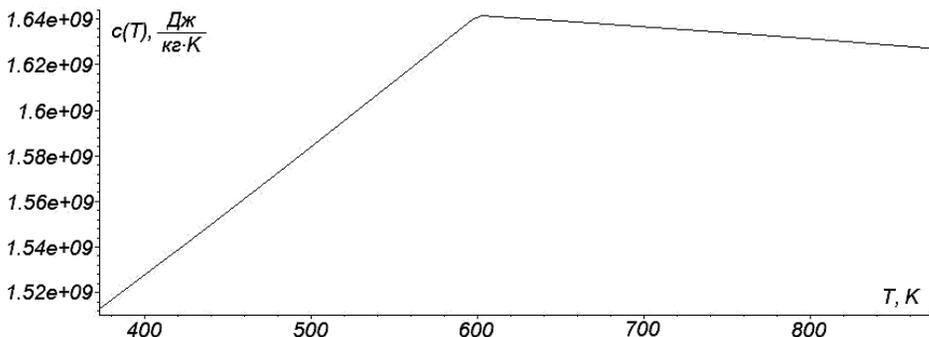
$$\Delta t \leq \frac{(\Delta r)^2}{4} \min(C_1'(\Lambda)). \quad (12)$$

**Пример расчета.** При проведении расчета по приведенной выше конечно-разностной схеме были использованы следующие исходные данные.

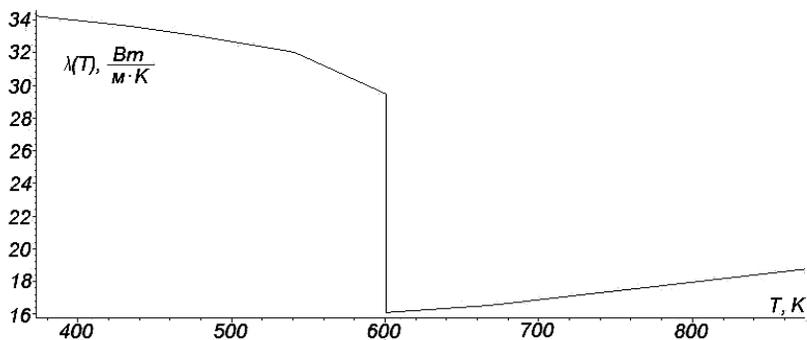
$T_1 = 100^\circ\text{C}$  — температура на внешней границе,  $T_2 = 550^\circ\text{C}$  — начальная температура,  $R = 0,012\text{ м}$  — внешний радиус,  $t = 0 \dots 4000, \text{ с}$  — временной интервал, материал — свинец (чистый).

Характеристики свинца  $c(T)$  и  $\lambda(T)$  приведены на рис. 1 и рис. 2.

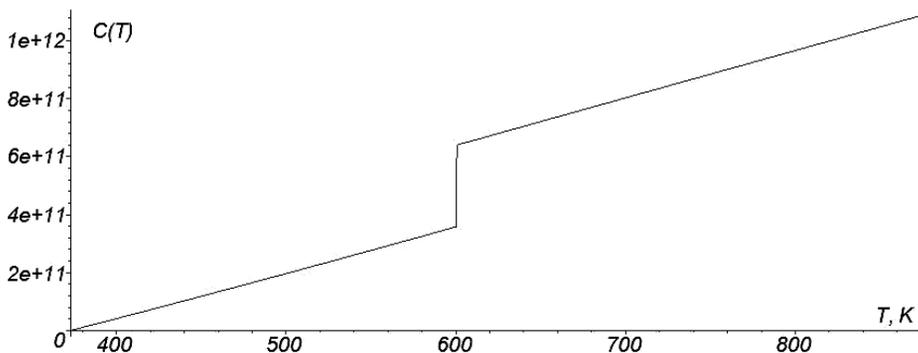
Используя (5) и (6), находим зависимости  $C(T)$  и  $\Lambda(T)$  (рис. 3 и 4).



**Рис. 1.** Теплоемкость свинца в зависимости от температуры



**Рис. 2.** Теплопроводность свинца в зависимости от температуры



**Рис. 3.** График функции объемной плотности внутренней энергии  $C(T)$

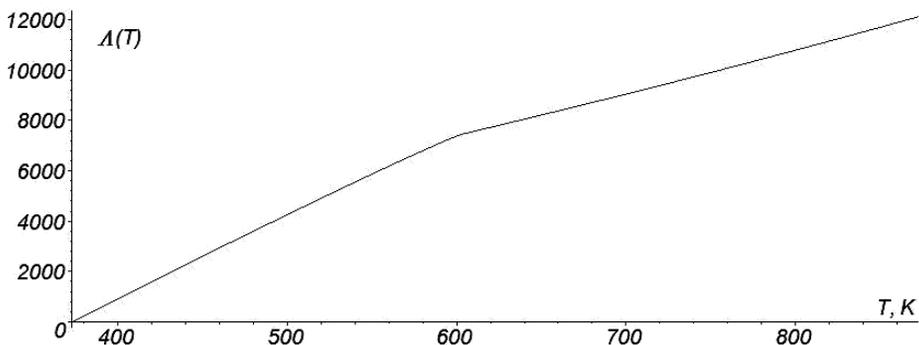


Рис. 4. График функции Кирхгофа  $\Lambda(T)$

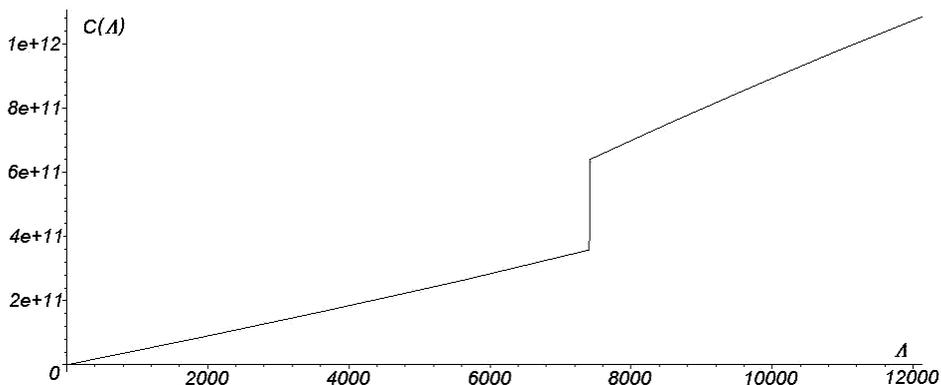


Рис. 5. График функции  $C(\Lambda)$

Затем находим зависимость  $C(\Lambda)$  (рис. 5)

Задаемся количеством разбиений по радиусу

$$N = 30,$$

соответственно

$$\Delta r = 0,0004 \text{ м.}$$

В соответствии с условием устойчивости (12) находим шаг разбиения по времени

$$\Delta t = 1,176 \text{ с;}$$

соответственно количество разбиений по времени

$$M = 3349.$$

Проводим численное решение и получаем зависимость  $\Lambda(r, t)$  (рис. 6).

Затем переходим от функции  $\Lambda(r, t)$  к функции температуры  $T(r, t)$  (рис. 7).

Наконец, находим закон движения фронта затвердевания (радиус проходного сечения для жидкой фазы) как сечение функции  $T(r, t)$  плоскостью  $T = T_{\text{плавл}} = T_{\text{затв}} = 327,4^\circ\text{C}$  (рис. 8).

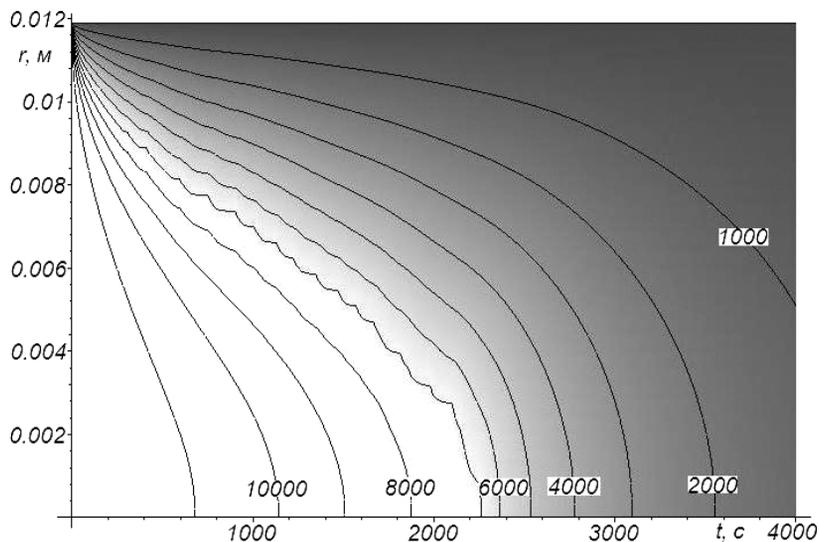


Рис. 6. Функция  $\Lambda(r, t)$

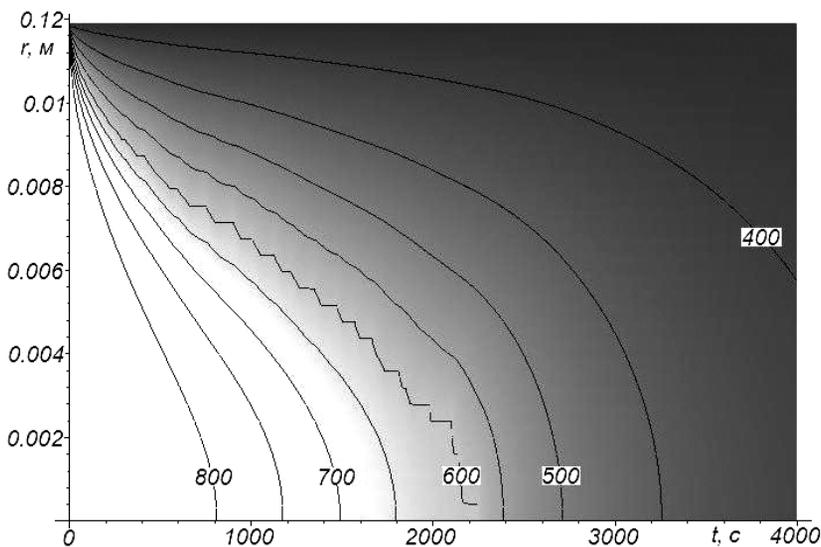


Рис. 7. Функция температуры  $T(r, t)$

**Заключение.** Метод сквозного счета, примененный в данной работе, позволяет решать задачу Стефана без выделения фронта затвердевания, что дает возможность отказаться от нахождения решений в 2-х и более областях с подвижными границами [4].

При данном подходе можно успешно решать задачи, содержащие несколько движущихся границ раздела фаз и изменяющиеся во времени граничные условия. Также возможно учесть эффект шуги, когда материал переходит из одного состояния в другое не при температуре  $T = T_{\text{плавл}} = T_{\text{затв}}$ , а в некотором небольшом интервале темпера-

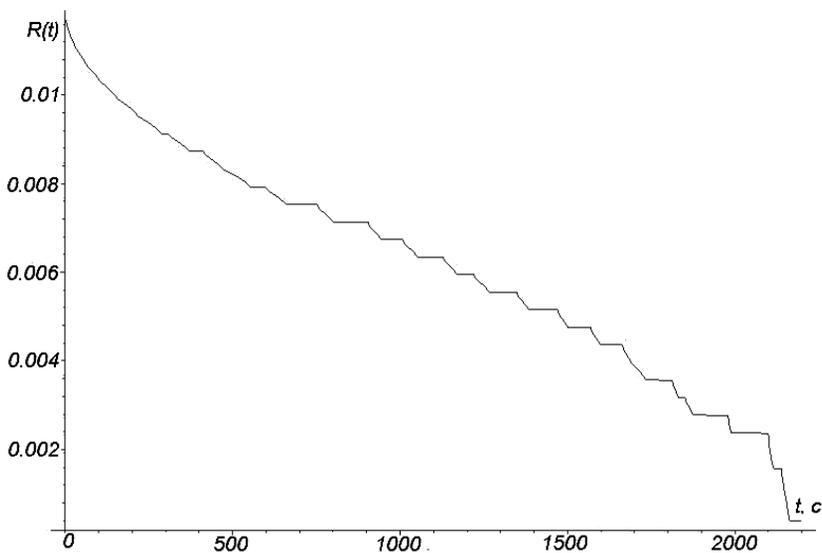


Рис. 8. Закон движения фронта затвердевания  $R_3(t)$

тур  $T = T_{\text{нач}} \dots T_{\text{кон}}$ . Для этого достаточно дельта-функцию Дирака  $\delta(u - T^*)$  в (6) заменить на плавную функцию  $F(u - T^*)$ , удовлетворяющую условию

$$\int_{T^*}^T F(u - T^*) du = 1.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З а р у б и н В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
2. З а р у б и н В. С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов ( Методы расчета) / Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1978. – 184 с.
3. З а р у б и н В. С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1966. – 216 с.
4. И л ь и н В. П., П о п о в В. Н. Об одной разностной схеме для численного решения двумерной задачи Стефана. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1991. – 24 с.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012